

BANCO DE CONTENIDO DIGITAL MATEMÁTICA

CEPRUNSA II FASE 2025



CAPÍTULO I

ÁLGEBRA

En álgebra se utilizan letras para representar números. Las letras utilizadas para representar estos números se denominan variables. Las combinaciones de variables y números junto con operaciones matemáticas forman expresiones algebraicas, motivo de nuestro estudio.



1 EL ÁLGEBRA COMO PARTE FUNDAMENTAL DE LA MATEMÁTICA

1.1 POLINOMIOS

1.1.1 DEFINICIÓN

Es la expresión algebraica racional entera que consta de dos o más términos.

Un polinomio en una variable tiene la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Donde:

n : Exponente $\{n = 0; 1; 2; 3 \dots\}$

x : Variable definida

$a_0, a_1, \dots, a_n$: Coeficientes

a_n : Coeficiente principal.

a_0 : Término independiente

Propiedades:

La suma de coeficientes del polinomio: $P(1)$

El término independiente: $P(0)$

1.1.2 GRADOS DE UN MONOMIO

ABSOLUTO

Es la suma de los exponentes de las variables.

$$M(x; y; z) = -9a^3x^5y^3z^4$$

$$GA(M) = 5 + 3 + 4 = 12$$

RELATIVO

El exponente de cada variable.

$$M(x; y; z) = 26x^6y^5z^3$$

$$GR(x) = 6$$

$$GR(y) = 5$$

$$GR(z) = 3$$

1.1.3 GRADOS DE UN POLINOMIO

ABSOLUTO

Es el mayor grado absoluto de sus términos.

$$M(x; y; z) = \underbrace{4b^4x^3}_{G.A=3} + \underbrace{7x^2y^3}_{G.A=5} - \underbrace{11z^2}_{G.A=2}$$

$$GA(M) = 5$$

RELATIVO

Es el mayor exponente de cada variable.

$$M(x; y; z) = 4x^3 + 7x^2y^3 - 11z^2$$

$$GR(x) = 3$$

$$GR(y) = 3$$

$$GR(z) = 2$$

1.1.4 CLASES DE POLINOMIOS

POLINOMIO HOMOGÉNEO	Todos sus términos son de igual grado absoluto. $P(x; y) = \underbrace{9ax^4y^7}_{G.A=11} - \underbrace{2x^9y^2}_{G.A=11} + \underbrace{3x^{10}y}_{G.A=11}$
POLINOMIO IDÉNTICAMENTE NULO	Es aquél cuyos coeficientes de los términos son ceros. $P(x) = ax^2 + bx + c$ $a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0$
POLINOMIO MÓNICO	Polinomio de una variable que tiene coeficiente principal uno. $P(x) = 4x - 8x^2 + x^3$ $A(x) = x^2 + 3x - 1$
POLINOMIO COMPLETO	Es aquel polinomio que presenta todos sus exponentes desde el mayor hasta el cero. $P(x; y) = x^3y - x^2y^2 + x - 3y^3$ Es completo respecto "x" y también respecto a "y".
POLINOMIO ORDENADO	Si los exponentes de una variable presentan un orden ya sea ascendente o descendente respecto a esa variable será ordenado. $P(x; y) = xy^8 - 2x^2y^6 + x^6y^2 - x^{10}y$ Es ordenado descendentemente respecto a "y" mientras que respecto a "x" es ascendente.
POLINOMIOS IDÉNTICOS	Si sus términos semejantes tienen coeficientes iguales. $P(x) = ax^2 + bx + c$ $Q(x) = mx^2 + nx + p$ Si $P(x) \equiv Q(x)$; si $a = m, b = n, c = p$.

**POLINOMIOS
EQUIVALENTES**

Son aquellos que, teniendo formas distintas, al asignar cantidades iguales a sus variables dan como respuesta igual valor numérico.

$$P(x; y) = (x^2 - xy + y^2)(x + y)$$

$$Q(x; y) = x^3 + y^3$$

$$P(3; 2) = Q(3; 2) = 35$$

PROPIEDADES:

$$\boxed{\text{grad}[D(x)] \geq \text{grad}[d(x)]}$$

$$\boxed{\text{grad}[q(x)] = \text{grad}[D(x)] - \text{grad}[d(x)]}$$

1.1.5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. ALGORITMO DE LA DIVISIÓN
ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

En la división tenemos:

$$\begin{array}{r|l} D(x) & d(x) \\ r(x) & q(x) \end{array}$$

$D(x)$ = Dividendo

$d(x)$ = Divisor

$q(x)$ = Cociente

$r(x)$ = Residuo

Se cumple:

$$\boxed{D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)}$$

Donde: $d(x) \neq 0$;

$$r(x) = 0 \quad \text{ó} \quad \text{grad}[r(x)] < \text{grad}[d(x)]$$

Por ejemplo:

$$\underbrace{x^3 - 7x + 4}_{D(x)} = \underbrace{(x - 2)}_{d(x)} \underbrace{(x^2 + 2x - 3)}_{q(x)} - \underbrace{2}_{r(x)}$$

EXACTA: Si $\boxed{r(x) = 0}$

$D(x)$ es divisible por $d(x)$.

$d(x)$ es un divisor o es un factor de $D(x)$.

INEXACTA: Si $\boxed{r(x) \neq 0}$

$$D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Donde:

$$0 \leq \text{grad}[r(x)] < \text{grad}[d(x)]$$

1.1.6 TEOREMA DEL RESTO

TEOREMA DEL RESTO

Consiste en hallar el residuo o resto sin realizar la división.

- Se iguala el divisor a cero.
- Se despeja la variable.
- Se reemplaza este valor en el dividendo.

EJEMPLO:

Calcular el resto de dividir:

$$\frac{(x-4)^7 + (x^2 + x - 7)^8}{x-2}$$

Aplicando el teorema:

$$x-2=0; \text{ entonces } x=2$$

$$R(x) = (2-4)^7 + (2^2 + 2 - 7)^8$$

$$R(x) = -127$$

B. 10

C. 11

D. 12

E. 13

RESOLUCIÓN:

Del polinomio dado nos dicen es completo y ordenado, deducimos que es de forma descendente, por lo tanto x^{b+7} es el término independiente.

$$P(x) = 3x^{a+b+c} + x^{b+a} - x^{b+8} + x^{b+7}$$

Ahora el exponente del término independiente lo igualamos a cero.

$$b+7=0$$

$$b=-7$$

Además, se cumple que la expresión: $b+8=1$

Luego:

$$a+b=2$$

$$a+(-7)=2$$

$$a=9$$

Además:

$$a+b+c=3$$

$$9+(-7)+c=3$$

$$c=1$$

Nos piden: $2a+b-c$

$$2(9)+(-7)-1=10$$

$$\therefore 2a+b-c=10$$

RPTA: B

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Si el siguiente polinomio es completo y ordenado:

$$P(x) = 3x^{a+b+c} + x^{b+a} - x^{b+8} + x^{b+7}.$$

Calcular $2a+b-c$

A. 9

2. Si el polinomio:

$$R(x) = x(ax^2 + bx + c) - 2x(bx^2 + cx + d) + 2d - 1,$$

es

idénticamente nulo.

Calcular: $\sqrt[3]{2abcd}$.

A. 1

B. 2

- C. 3
D. 4
E. 5

RESOLUCIÓN:

Multiplicando y ordenando el polinomio en forma ascendente:

$$\begin{aligned} R(x) &= x(ax^2 + bx + c) - 2x(bx^2 + cx + d) + 2d - 1 \\ R(x) &= ax^3 + bx^2 + cx - 2bx^2 - 2cx^2 - 2dx + 2d - 1 \\ R(x) &= (a - 2b)x^3 + (b - 2c)x^2 + (c - 2d)x + 2d - 1 \end{aligned}$$

Luego, por ser polinomio idénticamente nulo, todos sus coeficientes deben ser igual a cero:

$$2d - 1 = 0 \rightarrow 2d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$c - 2d = 0 \rightarrow c = 2d \rightarrow c = 2\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow c = 1$$

$$b - 2c = 0 \rightarrow b = 2c \rightarrow b = 2(1) \rightarrow b = 2$$

$$a - 2b = 0 \rightarrow a = 2b \rightarrow a = 2(2) \rightarrow a = 4$$

Finalmente, hallamos:

$$\sqrt[3]{2abcd} = \sqrt[3]{2(4)(2)(1)\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt[3]{8} = 2$$

RPTA: B

3. El dinero ahorrado por María, para comprar el regalo a su abuelita por Navidad, está dado por un monto en soles, numéricamente igual a veinte veces el grado absoluto del polinomio:

$$P(x; y) = ax^{\frac{a-7}{2}}y^{b-8} + (b-3)x^{\frac{9-a}{3}}y^{\frac{b-4}{6}} + (a+b-7)x^ay^{\frac{12-b}{2}}$$

¿Cuánto es el monto ahorrado?

- A. $S/120$
B. $S/203$
C. $S/140$
D. $S/250$
E. $S/200$

RESOLUCIÓN:

Por propiedad del exponente de un polinomio:

$$\begin{aligned} \frac{a-7}{2} \geq 0 \quad \wedge \quad a \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{9-a}{3} \geq 0 \\ a \geq 7 \quad \wedge \quad a \geq 0 \quad \wedge \quad a \leq 9 \\ 7 \leq a \leq 9 \end{aligned}$$

$$\text{Como: } a \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow a = \{7; 8; 9\}$$

$$\begin{aligned} b-8 \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{b-4}{6} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{12-b}{2} \geq 0 \\ b \geq 8 \quad \wedge \quad b \geq 4 \quad \wedge \quad b \leq 12 \\ 8 \leq b \leq 12 \end{aligned}$$

$$\text{Como: } a \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow b = \{8; 9; 10; 11; 12\}$$

Luego, deducimos:

$$a = 9 \quad \wedge \quad b = 10$$

Reemplazamos estos valores en los exponentes y obtenemos el polinomio:

$$P(x; y) = 9xy^2 + 7x^0y^1 + 12x^9y^1$$

El polinomio es de grado 10

Finalmente, el monto ahorrado es:

$$20(10) = S/200$$

RPTA: E

4. El término independiente del polinomio mónico:

$$P(x; y) = 3x^n + 2x^{17-n} - x^{n-14} + 5x^{\frac{n}{3}} + (b-n)x^{n+2} + 7 - n + 3b,$$

representa la cantidad (en soles) que tiene Mauricio. ¿Cuánto le quedaría, si gasta " $b + 2$ " soles?

- A. S/12
- B. S/20
- C. S/14
- D. S/25
- E. S/22

RESOLUCIÓN:

Por propiedad del exponente de un polinomio:

$$n \geq 0 \wedge 17 - n \geq 0 \wedge n - 14 \geq 0 \wedge n + 2 \geq 0$$

$$n \geq 0 \wedge n \leq 17 \quad \wedge \quad n \geq 14 \quad \wedge \quad n \geq -2$$

$$\frac{n}{3} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\therefore 14 \leq n \leq 17$$

Luego: $n = 15$

Reemplazamos estos valores en los exponentes y obtenemos el polinomio:

$$P(x) = 3x^{15} + 2x^2 - x + 5x^5 + (b - 15)x^{17} - 8 + 3b$$

Como es polinomio Mónico, el coeficiente principal es 1:

$$b - 15 = 1 \rightarrow b = 16$$

El término independiente es:

$$3b - 8 = 3(16) - 8 = 40$$

El dinero que tiene es: S/40

$$\text{Gastó: } b + 2 = 16 + 2 = \text{S/18}$$

$$\text{Por lo tanto, le quedaría: } 40 - 18 = \text{S/22}$$

RPTA: E

5. Si los polinomios:

$$P(x) = 2(mx + n)^2 + mx^2 - 2n \text{ y}$$

$$R(x) = 4(9x^2 + 8x + p), \text{ son idénticos.}$$

Calcular $P(-1)$, sabiendo que: $m > 0$.

- A. 8
- B. 12
- C. -4
- D. 14
- E. 9

RESOLUCIÓN:

Dos polinomios son idénticos si los coeficientes de sus términos semejantes son iguales.

Para lo cual acomodamos los polinomios.

$$P(x) = 2(mx + n)^2 + mx^2 - 2n$$

$$P(x) = 2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) + mx^2 - 2n$$

$$P(x) = 2m^2x^2 + 4mnx + 2n^2 + mx^2 - 2n$$

$$P(x) = (2m^2 + m)x^2 + 4mnx + 2n^2 - 2n$$

$$R(x) = 4(9x^2 + 8x + p)$$

$$R(x) = 36x^2 + 32x + 4p$$

Como los polinomios son idénticos debe cumplir:

$$2m^2 + m = 36 \quad \dots \text{(I)}$$

$$4mn = 32 \quad \dots \text{(II)}$$

$$2n^2 - 2n = 4p \quad \dots \text{(III)}$$

En la ecuación (I):

$$2m^2 + m = 36$$

$$2m^2 + m - 36 = 0$$

$$(m - 4)(2m + 9) = 0$$

$$m = 4 \quad \vee \quad m = \frac{-9}{2}$$

Por dato: $m > 0 \quad \therefore m = 4$

Reemplazamos en (II):

$$4mn = 32$$

$$4(4)n = 32$$

$$16n = 32$$

$$n = 2$$

Reemplazamos en (III):

$$2n^2 - 2n = 4p$$

$$2(2)^2 - 2(2) = 4p$$

$$4 = 4p$$

$$p = 1$$

Calculamos: $R(-1)$

$$R(x) = 36x^2 + 32x + 4$$

$$R(-1) = 36(-1)^2 + 32(-1) + 4$$

$$R(-1) = 36 - 32 + 4$$

$$\therefore R(-1) = 8$$

Finalmente: $P(x) \equiv R(x) \rightarrow P(-1) = R(-1)$

$$\therefore P(-1) = 8$$

RPTA: E

6. Don Benigno recibe un bono, cuyo monto en soles, se depositó en el banco. El valor numérico de este monto, resulta ser la suma de los coeficientes del siguiente polinomio homogéneo:

$$P(x; y) = (2r + 4)x^7y^{n^2} + 7mx^my^r + (3m + 8r)x^{3n}y^{n^2-14}$$

Si el banco le cobra una comisión del 10% del depósito, ¿cuánto recibe finalmente Don Benigno?

A. S/507,6

B. S/502

C. S/500

D. S/400,4

E. S/504,6

RESOLUCIÓN:

El polinomio es homogéneo:

$$P(x; y) = (2r + 4)x^7y^{n^2} + 7mx^my^r + (3m + 8r)x^{3n}y^{n^2-14}$$

Entonces:

$$7 + n^2 = m + r = 3n + n^2 - 14$$

$$7 + n^2 = 3n + n^2 - 14$$

$$21 = 3n \rightarrow n = 7$$

$$7 + n^2 = m + r$$

$$7 + 7^2 = m + r$$

$$56 = m + r$$

El bono es el valor numérico de la suma de coeficientes:

$$\Sigma \text{coef. } P(x; y) = 2r + 4 + 7m + 3m + 8r$$

$$= 10m + 10r + 4$$

$$= 10(m + r) + 4$$

$$= 10(56) + 4 = S/564$$

La comisión:

$$10\% (564) = \frac{10}{100} (564) = S/56,4$$

Finalmente, recibe:

$$S/564 - S/56,4 = S/507,6$$

RPTA: B

7. Observar la siguiente operación e indicar el valor de " $m - a$ ", siendo $m \neq 0$.

$$\begin{array}{r|l}
 5mx^3 - 5ax^2 + cx - 9 & mx - 3 \\
 -5mx^3 + ex^2 & mx^2 + x + 3 \\
 \hline
 & mx^2 + cx \\
 & -mx^2 + dx \\
 \hline
 & ex - 9 \\
 & -ex + 9 \\
 \hline
 & 0 \quad 0
 \end{array}$$

- A. -3
B. -2
C. -1
D. 2
E. 3

RESOLUCIÓN:

Aplicamos el algoritmo de la división:

$$D(x) = d(x)Q(x) + R(x)$$

$$5mx^3 - 5ax^2 + cx - 9 = (mx - 3)(mx^2 + x + 3) + 0$$

Igualemos solamente los términos: cúbicos y cuadráticos

$$5mx^3 = m^2x^3$$

$$5m = m^2$$

$$5m - m^2 = 0$$

$$m(5 - m) = 0$$

$$m = 0 \text{ (no cumple)} \vee m = 5$$

$$\rightarrow \boxed{m = 5}$$

$$-5ax^2 = -3mx^2 + mx^2$$

$$-5ax^2 = -2mx^2$$

$$-5ax^2 = -2(5)x^2$$

$$-5a = -10$$

$$\boxed{a = 2}$$

Entonces el valor de $m - a = 5 - 2 = 3$

RPTA: E

8. Al dividir $P(x)$ entre $(x + 1)(x + 2)(x^4 + 1)$, se obtiene un resto igual a: " $3x - 2$ "; hallar el resto de dividir $P(x)$ entre " $x + 2$ " y $P(x)$ entre " $x + 1$ ".

- A. -8 ; 5
B. -8 ; -5
C. 8 ; -5
D. 0 ; 0
E. -5 ; 3

RESOLUCIÓN:

Por el algoritmo de la división:

$$D(x) = d(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Reemplazamos:

$$P(x) = (x + 1)(x + 2)(x^4 + 1)Q(x) + 3x - 2 \dots (I)$$

Si:

$$\frac{P(x)}{x + 2} \rightarrow R_1(x) = P(-2)$$

Reemplazando en (I); $x = -2$

$$P(-2) = (-1)(0)(17)Q(-2) - 6 - 2$$

$$P(-2) = -8 \rightarrow R_1(x) = -8$$

Si:

$$\therefore \frac{P(x)}{x + 1} \rightarrow R_2(x) = P(-1)$$

Reemplazando en (I); $x = -1$

$$P(-1) = (0)(1)(2)Q(-1) - 5$$

$$P(-1) = -5 \rightarrow R_2(x) = -5$$

$$\therefore R_1(x) = -8 \quad y \quad R_2(x) = -5$$

RPTA: B

1.2 PRODUCTOS NOTABLES

Son aquellos productos que se rigen por reglas fijas y cuyo resultado puede hallarse por simple inspección. Los más importantes son:

CUADRADO DE UN BINOMIO
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
IDENTIDADES DE LEGENDRE
$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$ $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$ $(a + b)^3 - (a - b)^3 = 2b(b^2 + 3a^2)$ $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$
CUBO DE UN BINOMIO
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
DIFERENCIA DE CUADRADOS
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
DIFERENCIA Y SUMA DE CUBOS
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
PRODUCTO DE BINOMIOS QUE TIENEN UN TÉRMINO COMÚN
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$ $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$
TRINOMIO AL CUADRADO

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

TRINOMIO AL CUBO

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + c)$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + ac + bc) - 3abc$$

$$(a + b + c)^3 = 3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$

IDENTIDAD DE LAGRANGE

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

IDENTIDAD DE ARGAND

$$(x^{2m} + x^m y^n + y^{2n})(x^{2m} - x^m y^n + y^{2n}) = x^{4m} + x^{2m} y^{2n} + y^{4n}$$

CASOS PARTICULARES:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$

$$(x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1) = x^{4n} + x^{2n} + 1$$

IDENTIDADES CONDICIONALES

Si: $a + b + c = 0$, se cumple:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)$$

$$a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + ac + bc)$$

$$(ab + bc + ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2$$

Si: $a = b = c$, se cumple:

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} = a^n b^n + a^n c^n + b^n c^n$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si se cumple que:

$$n^2 - 4n - 1 = 0$$

Calcular:

$$B = \frac{n^7 - n^5 + n^3}{n^5}$$

- A. 14
B. 13
C. 19
D. 15
E. 17

RESOLUCIÓN:

Acomodando "B":

$$B = \frac{n^7}{n^5} - \frac{n^5}{n^5} + \frac{n^3}{n^5}$$

$$B = n^2 - 1 + \frac{1}{n^2} \dots (I)$$

De la condición:

$$n^2 - 4n - 1 = 0$$

$$n^2 - 1 = 4n$$

$$\frac{n^2 - 1}{n} = 4$$

$$\frac{n^2}{n} - \frac{1}{n} = 4$$

$$n - \frac{1}{n} = 4 \dots (II)$$

Aplicando el cuadrado de un binomio a (II), se tiene:

$$\left(n - \frac{1}{n}\right)^2 = 4^2$$

$$n^2 - 2n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} = 16$$

$$n^2 - 2 + \frac{1}{n^2} = 16$$

$$n^2 + \frac{1}{n^2} = 18$$

Reemplazando en (I), resulta:

$$B = n^2 + \frac{1}{n^2} - 1$$

$$B = \frac{18}{18} - 1$$

$$\therefore B = 17$$

RPTA: E**2. Si:**

$$x^2 + 5x - \sqrt{3} = 0$$

Calcular:

$$B = x(x+2)(x+3)(x+5) - 6\sqrt{3}$$

- A. 1
B. $\sqrt{3}$
C. 3
D. 6
E. $6\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

De enunciado, se tiene:

$$x^2 + 5x - \sqrt{3} = 0$$

$$x^2 + 5x = \sqrt{3} \dots (*)$$

Agrupando adecuadamente "B":

$$B = x(x+5)(x+2)(x+3) - 6\sqrt{3}$$

Aplicando propiedad distributiva y empleando producto de binomios que tiene un factor común, se obtiene:

$$B = (x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 6) - 6\sqrt{3}$$

Reemplazando (*) en la última expresión:

$$B = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 6) - 6\sqrt{3}$$

$$B = 3 + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$

$$\therefore B = 3$$

RPTA: C

3. Simplificar:

$$A = (x^3 - 3x)^2 - [(x + 1)(x - 1)]^2(x + 2)(x - 2)$$

- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos:

$$A = (x^3 - 3x)^2 - [(x + 1)(x - 1)]^2(x + 2)(x - 2)$$

Factorizando “x” y aplicando diferencia de cuadrados:

$$A = [x(x^2 - 3)]^2 - (x^2 - 1)^2(x^2 - 4)$$

Acomodando:

$$A = [x(x^2 - 1 - 2)]^2 - [x^2 - 1]^2(x^2 - 1 - 3)$$

Haciendo un cambio de variable:

$$n = x^2 - 1 \dots (*)$$

Cambiando y resolviendo:

$$A = [x(n - 2)]^2 - n^2(n - 3)$$

$$A = x^2(n - 2)^2 - n^2(n - 3)$$

Aplicando cuadrado de un binomio:

$$A = x^2(n^2 - 4n + 4) - n^3 + 3n^2 \dots (**)$$

De (*), se tiene:

$$x^2 = n + 1$$

Reemplazando en (**):

$$A = (n + 1)(n^2 - 4n + 4) - n^3 + 3n^2$$

Aplicando propiedad distributiva, resulta:

$$A = n^3 - 4n^2 + 4n + n^2 - 4n + 4 - n^3 + 3n^2$$

$$\therefore A = 4$$

4. En la siguiente tabla se muestran las seis etapas de la vida humana, según Havighurst:

ETAPA	DESDE	-	HASTA
Infancia y primera infancia	Nacimiento	-	6 años
Infancia media	7	-	12 años
Adolescencia	13	-	18 años
Adulthood temprana	19	-	30 años
Edad madura	31	-	60 años
Madurez tardía	61	-	en adelante

Si la edad de María (en años), la encontramos en:

$$E = (a + b)^3 + (a - b)^3 - (2a)^3 + 6a(a + b)(a - b) + 7$$

Determinar la etapa en la que se encuentra María.

- A. Infancia media.
B. Adolescencia.
C. Adulthood temprana.
D. Edad madura.
E. Madurez tardía.

RESOLUCIÓN:

Por dato, la edad de María es “E”:

$$E = (a + b)^3 + (a - b)^3 - (2a)^3 + 6a(a + b)(a - b) + 7$$

Acomodando “E”:

$$E = (a + b)^3 + (a - b)^3 + 3 \left(\frac{2a}{3} \right) (a + b)(a - b) - (2a)^3 + 7$$

$$E = (a+b)^3 + (a-b)^3 + 3[(a+b) + (a-b)](a+b)(a-b) - (2a)^3 + 7$$

Por cubo de un binomio, se tiene:

$$E = [(a+b) + (a-b)]^3 - (2a)^3 + 7$$

$$E = (2a)^3 - (2a)^3 + 7$$

$$E = 7$$

Por lo tanto, María se encuentra en la etapa de infancia media.

RPTA: A

5. Perú, es uno de los cinco países con mayor diversidad de primates, determinar esta cantidad dada por:

$$U = P - 8$$

Si:

$$ER = \sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1$$

$$E^2 + R^2 = \sqrt[3]{7} + 1$$

$$P = (E + R)^4 - (E - R)^4$$

- A. 56
- B. 64
- C. 26
- D. 42
- E. 49

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos:

$$P = (E + R)^4 - (E - R)^4$$

Acomodando, se tiene:

$$P = \underbrace{[(E + R)^2]^2 - [(E - R)^2]^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

$$P = [(E + R)^2 + (E - R)^2][(E + R)^2 - (E - R)^2]$$

Aplicando la Identidad de Legendre:

$$P = [2(E^2 + R^2)][4ER]$$

$$P = 8(E^2 + R^2)(ER) \dots (I)$$

Reemplazando las condiciones dadas en el enunciado en (I), resulta:

$$P = 8 \underbrace{(\sqrt[3]{7} + 1)(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1)}_{\text{suma de cubos}}$$

$$P = 8(\sqrt[3]{7}^3 + 1^3)$$

$$P = 8(7 + 1) = 64$$

Nos piden el número de especies primates de Perú, dada por:

$$U = P - 8$$

$$U = 64 - 8$$

$$\therefore U = 56$$

RPTA: A

6. Hallar un punto de corte con el eje "x", si el valor de su abscisa lo encontramos al resolver "M", en:

$$M = \frac{(m^3 + i^3 + o^3)(m^2 + i^2 + o^2)}{mio(mi + io + mo)}$$

Donde:

$$m = \sqrt{11} + \sqrt{13} - \sqrt{7}$$

$$i = \sqrt{7} + \sqrt{13} - 2\sqrt{11}$$

$$o = \sqrt{11} - 2\sqrt{13}$$

- A. (-13 ; 0)
- B. (0 ; $\sqrt{7}$)
- C. (-6 ; 0)
- D. ($\sqrt{11}$; 0)
- E. (17 ; 0)

RESOLUCIÓN:

Calculamos: $m + i + o$

$$m = \sqrt{11} + \sqrt{13} - \sqrt{7}$$

$$i = \sqrt{7} + \sqrt{13} - 2\sqrt{11}$$

$$o = \sqrt{11} - 2\sqrt{13}$$

$$\therefore m + i + o = 0$$

Por producto notable condicional, se cumple que:

$$m^3 + i^3 + o^3 = 3mio$$

También:

$$m^2 + i^2 + o^2 = -2(mi + io + mo)$$

Reemplazando en "M", se tiene:

$$M = \frac{(m^3 + i^3 + o^3)(m^2 + i^2 + o^2)}{mio(mi + io + mo)}$$

$$M = \frac{3mio[-2(mi + io + mo)]}{mio(mi + io + mo)}$$

Simplificando:

$$M = -6$$

Sea "P" el punto de corte con el eje de las abscisas:

$$P(x; 0) = (M; 0) = (-6; 0)$$

$$\therefore P = (-6; 0)$$

RPTA: C

7. Si:

$$\frac{pq}{p^2 + q^2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

Calcular el valor de:

$$R = \left(\frac{p}{q}\right)^8 + \left(\frac{q}{p}\right)^8$$

A. 625

B. 527

C. 225

D. 64

E. 49

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos:

$$\frac{pq}{p^2 + q^2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

Invertimos ambos miembros:

$$\frac{p^2 + q^2}{pq} = \frac{7}{\sqrt{7}}$$

Racionalizando:

$$\frac{p^2 + q^2}{pq} = \frac{7}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{p^2 + q^2}{pq} = \frac{7\sqrt{7}}{7}$$

$$\frac{p^2 + q^2}{pq} = \sqrt{7}$$

Acomodamos:

$$\frac{p^2}{pq} + \frac{q^2}{pq} = \sqrt{7}$$

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \sqrt{7} \dots (I)$$

Elevando (I) al cuadrado:

$$\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)^2 = (\sqrt{7})^2$$

Desarrollando el binomio al cuadrado:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 = 7$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 = 7$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 = 5 \dots (II)$$

Elevando (II) al cuadrado:

$$\left[\left(\frac{p}{q} \right)^2 + \left(\frac{q}{p} \right)^2 \right]^2 = 5^2$$

Desarrollando el binomio al cuadrado:

$$\left(\frac{p}{q} \right)^4 + 2 \left(\frac{p}{q} \right)^2 \left(\frac{q}{p} \right)^2 + \left(\frac{q}{p} \right)^4 = 25$$

$$\left(\frac{p}{q} \right)^4 + 2 + \left(\frac{q}{p} \right)^4 = 25$$

$$\left(\frac{p}{q} \right)^4 + \left(\frac{q}{p} \right)^4 = 23 \quad \dots \quad (III)$$

Elevando (III) al cuadrado:

$$\left[\left(\frac{p}{q} \right)^4 + \left(\frac{q}{p} \right)^4 \right]^2 = 23^2$$

Desarrollando el binomio al cuadrado:

$$\left(\frac{p}{q} \right)^8 + 2 \left(\frac{p}{q} \right)^4 \left(\frac{q}{p} \right)^4 + \left(\frac{q}{p} \right)^8 = 529$$

$$\left(\frac{p}{q} \right)^8 + 2 + \left(\frac{q}{p} \right)^8 = 529$$

$$\left(\frac{p}{q} \right)^8 + \left(\frac{q}{p} \right)^8 = 527$$

$$\therefore R = 527$$

RPTA: B

8. Cada fin de mes, Irene, recibe una propina (en soles), dada por la suma de los cubos de tres números. Si se sabe que, la suma y el producto de ellos es 8 y 12 respectivamente; además, la suma de los productos dos a dos (productos binarios) de los números es 19. Calcular la propina que recibirá Irene en el último trimestre del año 2023.

A. S/88

B. S/180

C. S/276

D. S/356

E. S/420

RESOLUCIÓN:

Por dato:

$$a + b + c = 8$$

$$abc = 12$$

$$ab + bc + ac = 19$$

La propina mensual de Irene es:

$$a^3 + b^3 + c^3$$

Por la identidad de trinomio al cubo, se tiene:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ac) - 3abc$$

Reemplazando valores, resulta:

$$(8)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(8)(19) - 3(12)$$

$$512 = a^3 + b^3 + c^3 + 456 - 36$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 92$$

La propina a recibir Irene, en el último trimestre del año 2023 es:

$$3(92) = \text{S/276}$$

RPTA: C

1.3 COCIENTES NOTABLES

Son ciertos cocientes que se escriben por simple inspección, sin necesidad de realizar la división. Se caracterizan por ser cocientes exactos.

FORMA GENERAL:

$$\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}; \text{ Donde } x \wedge y \text{ son las bases; } n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$$

CASOS:

$\frac{x^n - y^n}{x - y}$	$n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$	"n" PAR O IMPAR
		$= x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}$
		$T_k = x^{n-k}y^{k-1}$
$\frac{x^n + y^n}{x + y}$	$n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$	"n" IMPAR
		$= x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}$
		$T_k = \pm x^{n-k}y^{k-1}$ (+), si k es impar (-), si k es par
$\frac{x^n - y^n}{x + y}$	$n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$	"n" PAR
		$= x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}$
		$T_k = \pm x^{n-k}y^{k-1}$ (+), si k es impar (-), si k es par
$\frac{x^n + y^n}{x - y}$		No es C.N.

PROPIEDADES:

1	Si $\frac{x^a \pm y^b}{x^c \pm y^d}$; es un C.N. se cumple que: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = n^\circ \text{ de términos.}$
2	Para el cálculo del (T_k) contado de derecha a izquierda $T_k = \pm x^{k-1}y^{n-k}$
3	- Si "n" es impar, el lugar del término central lo hallamos: $t_c = \frac{n+1}{2}$ - Si "n" es par, el C.N. tiene dos términos centrales y los hallamos: $t_{c1} = \frac{n}{2}$ y $t_{c2} = \frac{n}{2} + 1$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. En el siguiente cociente notable:

$$\frac{x^{20} - y^{30}}{x^2 - y^3}$$

Calcular el lugar que ocupa el término que contiene a " x^{10} ".

- A. Sexto.
- B. Quinto.
- C. Octavo.
- D. Cuarto.
- E. Décimo.

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$\frac{x^{20} - y^{30}}{x^2 - y^3}$$

Número de términos:

$$n = \frac{20}{2} = 10$$

Hallando el término k -ésimo (T_k):

$$T_k = (x^2)^{n-k} (y^3)^{k-1}$$

$$T_k = (x^2)^{10-k} (y^3)^{k-1}$$

$$T_k = x^{20-2k} y^{3k-3}$$

Comparando:

$$x^{20-2k} = x^{10}$$

$$20 - 2k = 10$$

$$2k = 10$$

$$k = 5$$

Por lo tanto, el término ocupa el quinto lugar.

RPTA: B

2. Si: $\dots x^{195}y^{140} + x^{190}y^{147} + \dots$, son términos consecutivos del desarrollo de un cociente notable. Hallar el número de términos.

- A. 61
B. 59
C. 58
D. 60
E. 65

RESOLUCIÓN:

Formando un cociente notable de:

$$\dots x^{195}y^{140} + x^{190}y^{147} + \dots$$

Acomodamos al desarrollo de cociente notable:

$$\dots (x^5)^{39} (y^7)^{20} + (x^5)^{38} (y^7)^{21} \dots$$

Luego, el número de términos es dado por:

$$N_T = G.A. + 1$$

De donde se tiene que:

$$N_T = 39 + 20 + 1 = 38 + 21 + 1$$

$$N_T = 59 + 1$$

$$\therefore N_T = 60$$

RPTA: D

3. Hallar el menor término racional del cociente notable:

$$\frac{\sqrt[3]{4^7} - 2^3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt{2}}$$

- A. 9
B. -1
C. 3
D. 5
E. 8

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos el cociente notable:

$$\frac{\sqrt[3]{4^7} - 2^3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt{2}}$$

Acomodando el cociente notable:

$$\frac{(\sqrt[3]{4})^7 - 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt[3]{4})^7 - 2^{\frac{7}{2}}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt[3]{4})^7 - (\sqrt{2})^7}{\sqrt[3]{4} - \sqrt{2}}$$

Hallando el número de términos:

$$n = \frac{7}{1} = 7$$

Por el término k -ésimo:

$$t_k = (\sqrt[3]{4})^{n-k} (\sqrt{2})^{k-1}$$

$$t_k = (\sqrt[3]{2^2})^{7-k} (\sqrt{2})^{k-1}$$

$$t_k = (2^2)^{\frac{7-k}{3}} \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$$

$$t_k = 2^{\frac{14-2k}{3} + \frac{k-1}{2}}$$

$$t_k = 2^{\frac{28-4k+3k-3}{6}} = 2^{\frac{25-k}{6}} \dots (*)$$

Por lo tanto, $\frac{25-k}{6}$ debe ser entero positivo:

Luego: $k = 1; 7; 13; 19$

Como: $n = 7$, se descarta el 13 y el 19.

$$\therefore k = 1; 7$$

Reemplazando en (*):

$$t_1 = 2^{\frac{25-1}{6}} = 2^4 = 16$$

$$t_7 = 2^{\frac{25-7}{6}} = 2^3 = 8$$

Nos pide, el menor término racional:

$$\therefore t_7 = 8$$

RPTA: E

4. En el cociente notable:

$$\frac{(x+2)^{16} - (x-2)^{16}}{2(x^2+4)},$$

hallar el valor numérico del quinto término para $x = 0$.

- A. 2^{15}
- B. 2^{11}
- C. 2^{12}
- D. 2^{13}
- E. 2^{14}

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos:

$$\frac{(x+2)^{16} - (x-2)^{16}}{2(x^2+4)}$$

Dando la forma de un cociente notable y por Identidad de Legendre:

$$2(x^2 + 2^2) = (x+2)^2 + (x-2)^2$$

Tenemos:

$$\frac{[(x+2)^2]^8 - [(x-2)^2]^8}{(x+2)^2 + (x-2)^2}$$

$$T_k = [(x+2)^2]^{n-k} [(x-2)^2]^{k-1}$$

$$\text{Luego: } T_5 = [(x+2)^2]^{8-5} \cdot [(x-2)^2]^{5-1}$$

$$T_5 = [(x+2)^2]^3 \cdot [(x-2)^2]^4$$

$$T_5 = (x+2)^6 (x-2)^8$$

El valor numérico para $x = 0$:

$$T_5 = (0+2)^6 (0-2)^8$$

$$T_5 = 2^6 \cdot 2^8$$

$$T_5 = 2^{14}$$

RPTA: E

5. Hallar el grado absoluto del primer término central del cociente notable:

$$\frac{x^{15n+50} - y^{15n-10}}{x^{n+1} - y^{n-2}}$$

- A. 11
- B. 106
- C. 63
- D. 40
- E. 72

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos el cociente notable:

$$\frac{x^{15n+50} - y^{15n-10}}{x^{n+1} - y^{n-2}}$$

Por propiedad se cumple:

$$\frac{15n+50}{n+1} = \frac{15n-10}{n-2}$$

$$\begin{aligned}(15n + 50)(n - 2) &= (15n - 10)(n + 1) \\ 15n^2 + 20n - 100 &= 15n^2 + 5n - 10 \\ 15n &= 90 \\ n &= 6\end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\frac{x^{140} - y^{80}}{x^7 - y^4}$$

Luego, el Cociente Notable es:

$$\frac{(x^7)^{20} - (y^4)^{20}}{(x^7) - (y^4)}$$

Hallamos los términos centrales

$$\begin{aligned}t_{c_1} = t_{\left(\frac{20}{2}\right)} = t_{10} &= (x^7)^{10}(y^4)^9 \rightarrow t_{10} = x^{70}y^{36} \\ t_{c_2} = t_{\left(\frac{20}{2}+1\right)} = t_{11} &= (x^7)^9(y^4)^{10} \rightarrow t_{11} = x^{63}y^{40} \\ G.A(t_{10}) &= 70 + 36 = 106\end{aligned}$$

RPTA: B**6. Dado el cociente notable:**

$$\frac{x^{148m} - y^{296p}}{x^{2m} - y^{4p}}$$

El término de lugar 60 es $x^{56}y^{708}$, entonces, el grado del término de lugar 21 es:

- A. 234
- B. 432
- C. 214
- D. 532
- E. 452

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos el cociente notable:

$$\frac{x^{148m} - y^{296p}}{x^{2m} - y^{4p}}$$

Número de términos:

$$n = \frac{148m}{2m} = 74$$

Le damos la forma de cociente notable:

$$\frac{(x^{2m})^{74} - (y^{4p})^{74}}{x^{2m} - y^{4p}}$$

El término de lugar 60:

$$\begin{aligned}t_k &= (x^{2m})^{n-k} \cdot (y^{4p})^{k-1} \\ t_{60} &= (x^{2m})^{74-60} \cdot (y^{4p})^{60-1} \\ t_{60} &= x^{28m} \cdot y^{236p} \\ t_{60} &= x^{28m} \cdot y^{236p}\end{aligned}$$

Por dato:

$$\begin{aligned}t_{60} &= x^{56}y^{708} \\ \text{Igualando: } x^{56}y^{708} &= x^{28m}y^{236p} \\ 28m &= 56 \quad \wedge \quad 236p = 708 \\ m &= 2 \quad \wedge \quad p = 3\end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\frac{x^{296} - y^{888}}{x^4 - y^{12}}$$

Entonces el término de lugar 21 es:

$$\begin{aligned}t_{21} &= (x^4)^{74-21}(y^{12})^{21-1} \\ t_{21} &= (x^4)^{53}(y^{12})^{20} \\ t_{21} &= x^{212}y^{240}\end{aligned}$$

$$G.A(t_{21}) = 212 + 240$$

$$G.A(t_{21}) = 452$$

Por lo tanto, el grado absoluto del término de lugar 21 es 452.

RPTA: E**7. Hallar " $\alpha + \beta$ " en el cociente notable:**

$$\frac{x^\alpha - y^\beta}{x^3 - y^4}$$

Si:

$$\frac{t_6 \cdot t_9}{t_7} = x^{12}y^{28}.$$

- A. 20
- B. 84
- C. 48
- D. 36
- E. 32

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos el cociente notable:

$$\frac{x^\alpha - y^\beta}{x^3 - y^4}$$

Por propiedad se cumple:

$$n = \frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} \dots (I)$$

$$\begin{aligned} t_6 &= (x^3)^{n-6}(y^4)^{6-1} = x^{3n-18}y^{20} \\ t_9 &= (x^3)^{n-9}(y^4)^{9-1} = x^{3n-27}y^{32} \\ t_7 &= (x^3)^{n-7}(y^4)^{7-1} = x^{3n-21}y^{24} \end{aligned}$$

Reemplazando de la condición:

$$\begin{aligned} \frac{t_6 \cdot t_9}{t_7} &= x^{12}y^{28} \\ \frac{x^{3n-18}y^{20} \cdot x^{3n-27}y^{32}}{x^{3n-21}y^{24}} &= x^{12}y^{28} \\ \frac{x^{6n-45}y^{52}}{x^{3n-21}y^{24}} &= x^{12}y^{28} \\ x^{3n-24}y^{28} &= x^{12}y^{28} \end{aligned}$$

Comparando:

$$3n - 24 = 12$$

$$\begin{aligned} 3n &= 36 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

Reemplazando en (I):

$$\begin{aligned} n &= \frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} \\ 12 &= \frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} \\ 12 &= \frac{\alpha}{3} \quad \wedge \quad 12 = \frac{\beta}{4} \\ \alpha &= 36 \quad \wedge \quad \beta = 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 36 + 48 \\ \therefore \alpha + \beta &= 84 \end{aligned}$$

RPTA: B

8. Si: " $x^a y^{24}$ ", es el término central del desarrollo del cociente notable:

$$\frac{x^{75} - y^b}{x^c - y^2}$$

El valor de " $a + b + c$ " es:

- A. 49
- B. 73
- C. 91
- D. 85
- E. 89

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos el cociente notable:

$$\frac{x^{75} - y^b}{x^c - y^2}$$

Por propiedad se cumple:

$$n = \frac{75}{c} = \frac{b}{2} \dots (I)$$

Luego, planteamos:

$$t_{c_1} = t_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \dots (II)$$

Reemplazamos:

$$t_{c_1} = (x^c)^{n-c_1} (y^2)^{c_1-1} = x^a y^{24}$$

Comparando:

$$\begin{aligned} 2(c_1 - 1) &= 24 \\ c_1 - 1 &= 12 \\ c_1 &= 13 \end{aligned}$$

De (II):

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2} &= c_1 \\ \frac{n+1}{2} &= 13 \\ n &= 25 \end{aligned}$$

De (I):

$$\begin{aligned} n &= \frac{75}{c} = \frac{b}{2} \\ 25 &= \frac{75}{c} = \frac{b}{2} \\ \frac{75}{c} &= 25 \quad \wedge \quad \frac{b}{2} = 25 \\ c &= 3 \quad \wedge \quad b = 50 \end{aligned}$$

Comparando:

$$\begin{aligned} a &= c(n - c_1) \\ a &= 3(25 - 13) \\ a &= 36 \end{aligned}$$

Calculando:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 36 + 50 + 3 \\ \therefore a + b + c &= 89 \end{aligned}$$

RPTA: E

1.4 FACTORIZACIÓN

1.4.1 DEFINICIÓN

Es la transformación de un polinomio en una multiplicación, indicada de sus factores primos o potencias.

$$x^2 - 3x - 54 \xrightarrow{\text{factorización}} (x - 9)(x + 6) \xleftarrow{\text{producto}}$$

1.4.2 POLINOMIO PRIMO

Es aquel polinomio de grado mayor que cero que no admite ser transformado en multiplicación indicada. También se dice de aquel polinomio que es divisible entre sí mismo y cualquier constante de un cierto campo de números.

EJEMPLOS:

$P(x) = x + 3$; Es primo en el campo $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

$S(x) = 3x^2 - 1$; Es primo en el campo $\mathbb{Q}$. No es primo en $\mathbb{R}$.

Generalmente se ha de trabajar en los racionales, pero debe tenerse en cuenta lo siguiente:

$P(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 5)(x - 7)(x + 4)$, está factorizado en $\mathbb{Q}$.

$P(x) = (x^2 + 3)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - 7)(x + 4)$, está factorizado en $\mathbb{R}$.

1.4.3 CONTEO DE FACTORES

El número de factores primos de un polinomio se obtiene contando los factores que se encuentran como base de una potencia y que contienen al menos una variable.

Si se tiene:

$$f(x) = P(x)^a \cdot Q(x)^b \cdot R(x)^c$$

$$\rightarrow N^\circ F. \text{ Totales} = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

$$\rightarrow N^\circ F. \text{ Algebraicos} = N^\circ F. \text{ Totales} - 1$$

$$\rightarrow N^\circ F. \text{ Primos} = 3$$

$$\rightarrow F. \text{ Primos: } P(x), Q(x), R(x), R.$$

EJEMPLOS:

$$\diamond P(x) = (x - 1)^2(x + 3)^3$$

$$\rightarrow N^\circ F. \text{ Totales} = (2 + 1)(3 + 1) = 12$$

$$\rightarrow N^\circ F. \text{ Algebraicos} = 12 - 1 = 11$$

$$\rightarrow N^\circ F. \text{ Primos} = 2$$

$$F. \text{ Primos: } (x - 1) \wedge (x + 3)$$

$$\diamond P(x) = 5x^2(x^2 + 1)^3(2x + 5)^4$$

$$\rightarrow N^\circ F. \text{ Totales} = (2 + 1)(3 + 1)(4 + 1) = 60$$

$$\rightarrow N^\circ F. \text{ Algebraicos} = 60 - 1 = 59$$

$$\rightarrow N^\circ F. \text{ Primos} = 3$$

$$F. \text{ Primos: } x, x^2 + 1, 2x + 5$$

1.4.4 CRITERIOS DE FACTORIZACIÓN

1.4.4.1 FACTOR COMÚN MONOMIO

Para analizar este criterio, debe tenerse en cuenta lo siguiente:

EJEMPLO:

$$\text{Factorizar: } 4x^2y^3 + 8x^3y^2 - 12x^4y^5$$

Luego: $4x^2y^2$ es el factor común monomio.

$$4x^2y^2(y + 2x - 3x^2y^3)$$

1.4.4.2 FACTOR COMÚN POLINOMIO

Para analizar este criterio, debe tenerse en cuenta lo siguiente:

EJEMPLO:

Factorizar: $n(m + y)^2 + b(m + y)$

Luego: $(m + y)$ es el factor común polinomio.

$$(m + y)[n(m + y) + b]$$

$$(m + y)(nm + ny + b)$$

1.4.4.3 AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Para analizar este criterio, debe tenerse en cuenta lo siguiente:

EJEMPLO:

Factorizar: $P(x; y) = a^2x - 2a^2y - ax^2 + 2axy$

$$P(x; y) = a(ax - 2ay - x^2 + 2xy)$$

$$P(x; y) = a[a(x - 2y) - x(x - 2y)]$$

$$P(x; y) = a(x - 2y)(a - x)$$

1.4.4.4 FACTORIZACIÓN POR IDENTIDADES

Para este caso se utilizarán los productos notables en forma inversa, entre los más importantes ya conocidos:

- ❖ $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- ❖ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- ❖ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- ❖ $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$
- ❖ $a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = (a - b)^3$
- ❖ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- ❖ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. La nota de Amílcar es de $\overline{1a}$, donde “a” es el número de factores lineales que tiene $P(x) = x^4 - 16$. ¿Cuál es la nota de Amílcar? (UNSA, 2021).

- A. 10
- B. 11
- C. 13
- D. 14
- E. 12

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$P(x) = x^4 - 16$$

Aplicando las leyes de exponentes:

$$P(x) = (x^2)^2 - 4^2$$

Aplicando binomio al cuadrado:

$$P(x) = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

Factorizando $(x^2 - 4)$:

$$P(x) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

De donde $a = 2$ es el número de factores lineales, entonces:

$$\overline{1a} = 12$$

RPTA: E

2. Si el polinomio $P(x; y)$ es igual a la suma de los factores primos de:

$$Q(x; y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$$

Calcular $P(1; 7)$.

- A. 200
- B. 300

- C. 100
D. 400
E. 500

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$Q(x; y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$$

Por trinomio cuadrado perfecto:

$$Q(x; y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$$

$$Q(x; y) = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$$

Por diferencia de cuadrados:

$$Q(x; y) = [x^2 + y^2 + xy][x^2 + y^2 - xy]$$

 $P(x; y)$ es la suma de los factores primos de $Q(x; y)$.

$$\therefore P(x; y) = x^2 + y^2 + xy + x^2 + y^2 - xy$$

$$P(x; y) = 2x^2 + 2y^2$$

Nos pide:

$$P(1; 7) = 2(1)^2 + 2(7)^2 = 2 + 98$$

$$\therefore P(1; 7) = 100$$

RPTA: C

3. Calcular " $Q(1) - Q(2)$ ". Si $Q(x)$ es igual al factor primo cuadrático del polinomio:

$$P(x) = x^4 - 27 + x^3 - 27x$$

- A. -6
B. 4
C. 8
D. -4
E. 2

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$P(x) = x^4 - 27 + x^3 - 27x$$

Agrupamos:

$$P(x) = (x^4 + x^3) + (-27 - 27x)$$

Por factor común monomio:

$$P(x) = x^3(x + 1) - 27(1 + x)$$

Por factor común polinomio:

$$P(x) = (x + 1)(x^3 - 27)$$

Por diferencia de cubos:

$$P(x) = (x + 1)(x^3 - 3^3)$$

$$P(x) = (x + 1)(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

 $Q(x)$ es igual al factor primo cuadrático:

$$\therefore Q(x) = x^2 + 3x + 9$$

Evaluamos:

$$Q(1) = 1^2 + 3(1) + 9 = 13$$

$$Q(2) = 2^2 + 3(2) + 9 = 19$$

Me pide:

$$\therefore Q(1) - Q(2) = 13 - 19 = -6$$

RPTA: A

4. La edad de Pedrito es " $5A - 3$ ", donde " A " representa la cantidad de factores algebraicos que tiene el siguiente polinomio:

$x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 1$. Indica su edad dentro de 10 años.

- A. 18 años
B. 22 años
C. 30 años
D. 42 años
E. 54 años

RESOLUCIÓN:Tenemos: $x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 1$ Descomponiendo $-3x^4$; así:

$$-3x^4 = x^4 - 4x^4$$

Reemplazamos:

$$x^6 + 2x^5 + x^4 - 4x^4 + 4x^2 - 1$$

Agrupando:

$$(x^6 + 2x^5 + x^4) - (4x^4 - 4x^2 + 1)$$

Factorizamos los TCP

$$(x^3 + x^2)^2 - (2x^2 - 1)^2$$

Factorizamos la diferencia de cuadrados:

$$(x^3 + x^2 + 2x^2 - 1)(x^3 + x^2 - 2x^2 + 1)$$

$$(x^3 + 3x^2 - 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

Hallando la cantidad de factores totales:

$$(2)(2) = 4$$

Entonces el número de factores algebraicos es: 3

Calculando la edad actual:

$$5A - 3 = 5(3) - 3 = 12$$

Finalmente, la edad dentro de 10 años será:

$$12 + 10 = 22 \text{ años.}$$

5. Indicar un factor primo del polinomio:

$$4m^3n^2 - 2m^3n + 2m^4n - 4m^2n^2$$

- A. $m + 2n$
- B. $m + 1$
- C. $m^2 - 2$
- D. $12m$
- E. $2m - 1$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado se tiene:

$$4m^3n^2 - 2m^3n + 2m^4n - 4m^2n^2$$

Aplicando factor común monomio:

$$2m^2n(2mn - m + m^2 - 2n)$$

Agrupando términos y factorizando:

$$2m^2n[(m^2 - m) + (2mn - 2n)]$$

$$2m^2n[m(m - 1) + 2n(m - 1)]$$

$$2m^2n(m - 1)(m + 2n)$$

Por lo tanto, un factor primo es $m + 2n$

RPTA: A

6. Factorizar e indicar el número de factores algebraicos que tiene el siguiente polinomio:

$$M(a) = a^6 - 4a^3 - 32$$

- A. 4
- B. 7
- C. 1
- D. 8
- E. 6

RPTA: B

RESOLUCIÓN:

Del enunciado se tiene:

$$M(a) = a^6 - 4a^3 - 32$$

Factorizando:

$$M(a) = (a^3 - 8)(a^3 + 4)$$

Acomodamos:

$$M(a) = (a^3 - 2^3)(a^3 + 4)$$

Por diferencia de cubos:

$$M(a) = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)(a^3 + 4)$$

Hallamos:

$$\text{Factores totales} = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$$

Nos pide:

$$\text{Factores algebraicos} = 8 - 1 = 7$$

RPTA: B

7. Una empresa se dedica a fabricar memorias USB. El costo (en soles) de fabricar por unidad, viene dado por el producto de los factores totales y factores primos del polinomio:

$M(a) = a^3 + a^2 - a - 1$. ¿Cuánto será el costo de 50 memorias USB?

- A. 600 soles.
- B. 250 soles.
- C. 180 soles.
- D. 500 soles.
- E. 700 soles.

RESOLUCIÓN:

Del enunciado se tiene:

$$M(a) = a^3 + a^2 - a - 1$$

Por factor común monomio:

$$M(a) = a^2(a + 1) - (a + 1)$$

Por factor común polinomio:

$$M(a) = (a + 1)(a^2 - 1)$$

Por diferencia de cuadrados:

$$M(a) = (a + 1)(a + 1)(a - 1)$$

$$M(a) = (a + 1)^2(a - 1)$$

Luego, hallamos:

$$\text{Factores totales} = (2 + 1)(1 + 1) = 6$$

$$\text{Factores primos} = 2$$

El precio de cada memoria USB es:

$$(6)(2) = 12 \text{ soles}$$

Entonces, el precio de 50 memorias USB será:

$$(50)(12) = 600 \text{ soles}$$

RPTA: A

8. Factorizar e indicar el número de factores totales que tiene el siguiente polinomio:

$$M(a; b; c) = (a + b + c)^3 - (a - b + c)^3$$

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 1
- E. 5

RESOLUCIÓN:

Del enunciado se tiene:

$$M(a; b; c) = (a + b + c)^3 - (a - b + c)^3$$

Por cambio de variable:

$$a + c = m$$

$$M(m; b) = (m + b)^3 - (m - b)^3$$

Por diferencia de cubos:

$$M(m; b) = [(m + b) - (m - b)] \left[(m + b)^2 + \underbrace{(m + b)(m - b)}_{+ (m - b)^2} \right]$$

Diferencia de cuadrados:

$$M(m; b) = 2b[(m + b)^2 + m^2 - b^2 + (m - b)^2]$$

$$M(m; b) = 2b[(m + b)^2 + (m - b)^2 + m^2 - b^2]$$

Por identidades de Legendre:

$$M(m; b) = 2b[2(m^2 + b^2) + m^2 - b^2]$$

$$M(m; b) = 2b[2m^2 + 2b^2 + m^2 - b^2]$$

$$M(m; b) = 2b(3m^2 + b^2)$$

Luego, reemplazamos " $m = a + c$ ":

$$M(a; b; c) = 2b[3(a + c)^2 + b^2]$$

$$M(a; b; c) = 2b(3a^2 + 6ac + 3c^2 + b^2)$$

Nos pide: Factores totales = $(1 + 1)(1 + 1) = 4$

RPTA: C

1.5 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS Y POLINOMIOS

1.5.1 FACTORIZACIÓN POR EL MÉTODO DEL ASPA SIMPLE

Se emplea para factorizar trinomios de la forma general:

$$P(x; y) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n}$$

El procedimiento a seguir es:

PASO 1	Se adecua la expresión a la forma antes mencionada.
PASO 2	Se descompone convenientemente los extremos (teniendo cuidado con los signos).
PASO 3	Se efectúa el producto en aspa y se suman los resultados, si este coincide con el término central de la expresión, entonces se concluye que los factores serán las sumas horizontales.

EJEMPLO:

Factorizar: $P(x) = 6x^2 + 21 - 23x$

PASO 1: $P(x) = 6x^2 + 21 - 23x$

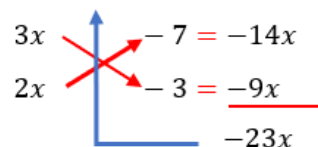
PASO 2: $P(x) = 6x^2 - 23x + 21$

$$3x \quad - 7$$

$$2x \quad - 3$$

PASO 3:

$$P(x) = 6x^2 - 23x + 21$$



$$\begin{array}{rcl} 3x & \times & -7 = -14x \\ 2x & \times & -3 = -9x \\ \hline & & -23x \end{array}$$

$$P(x) = (3x - 7)(2x - 3)$$

1.5.2 FACTORIZACIÓN POR EL MÉTODO DEL ASPA DOBLE

Se aplica para factorizar polinomios de la siguiente forma:

$$ax^{2n} \pm bx^n y^n \pm cy^{2n} \pm dx^n \pm ey^n \pm f$$

Y también para algunos polinomios de 4to. grado.

PROCEDIMIENTO:

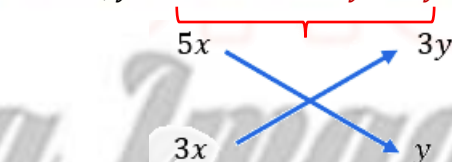
$$P(x; y) = 15x^2 + 3y^2 + 23y + 14 + 14xy + 41x$$

- A) Primero se ordena convenientemente, es decir, en forma decreciente para una de las variables.

$$P(x; y) = 15x^2 + 14xy + 3y^2 + 23y + 41x + 14$$

- B) Se ejecuta un aspa simple para los 3 primeros términos:

$$P(x; y) = 15x^2 + 14xy + 3y^2 + 23y + 41x + 14$$



$$\begin{array}{rcl} 5x & \times & 3y \\ 3x & \times & y \\ \hline & & 15xy + 3xy = 18xy \end{array}$$

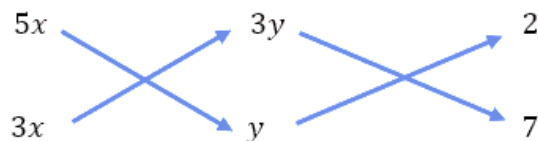
Verificando: $5xy$

$$9xy$$

$$\hline 14xy$$

- C) Junto a esta aspa simple se traza otra de modo que el producto de los elementos del extremo derecho de este grupo multiplicados verticalmente sea el último término.

$$P(x; y) = 15x^2 + 14xy + 3y^2 + 23y + 41x + 14$$



Verificando:

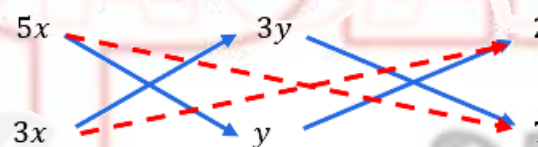
$$21y$$

$$2y$$

$$23y$$

D) Verificamos con un aspa simple con los factores del primer término y del último término.

$$P(x; y) = 15x^2 + 14xy + 3y^2 + 23y + 41x + 14$$



$$\text{Verificando: } 35x + 6x = 41x$$

E) Finalmente, el primer factor es la suma de los términos tomados horizontalmente de la primera línea y el segundo factor es la suma de los términos de la segunda línea.

$$P(x) = (5x + 3y + 2)(3x + y + 7)$$

1.5.3 FACTORIZACIÓN POR EL MÉTODO QUITA Y PON

Consiste en sumar y restar una misma cantidad de tal manera que se forme una suma o diferencia de cubos al mismo tiempo que se presenta el factor.

EJEMPLO: Factorizar: $x^5 + x^4 + 1$

A) Sumando y restando x^2

$$x^5 - x^2 + x^4 + x^2 + 1$$

B) Agrupando y factorizando:

$$x^2(x^3 - 1) + (x^4 + x^2 + 1)$$

$$x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^4 + x^2 + 1)$$

C) Factorizando el último trinomio por la identidad de Argand

$$x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

D) Factorizando por factor común polinomio:

$$(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x^2 - x + 1)$$

$$x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$$

1.5.4 FACTORIZACIÓN DE DIVISORES BINÓMICOS

Se emplea para factorizar polinomios de una sola variable y de cualquier grado, cuya única condición fundamental es que acepten al menos un factor de primer grado.

Determinación de los posibles ceros de un polinomio

$$\text{Posibles ceros} = \frac{\text{Divisores del término independiente(TI)}}{\text{Divisores del primer coeficiente(CP)}}$$

Realizamos el esquema con los coeficientes del polinomio

EJEMPLO: Factorizar:

$$P(x) = x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4; C.P. = 1 \text{ y } T.I. = 4$$

Procedimiento a seguir para factorizar

Paso 1	Se determinan los posibles ceros del polinomio Posibles ceros: $= \frac{\pm 1; \pm 2; \pm 4}{\pm 1}$ Posibles ceros: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$
Paso 2	Se deduce el factor que da lugar al cero del polinomio, mediante el siguiente teorema de la divisibilidad algebraica. Si un polinomio $P(x)$ se anula para $x = a$ ó $P(a) = 0$. Entonces dicho polinomio tendrá un factor $(x - a)$. $P(1) = (1)^5 + 5(1)^4 + 7(1)^3 - (1)^2 - 8(1) - 4 = 0$
Paso 3	El otro factor se determina utilizando la regla de RUFFINI, que se ha de emplear tantas veces como ceros tenga el polinomio

	1	5	7	-1	-8	-4
1	↓	1	6	13	12	4
	1	6	13	12	4	0
-1	↓	-1	-5	-8	-4	
	1	5	8	4	0	
-2	↓	-2	-6	-4		
	1	3	2	0		

Por lo tanto, los factores según el esquema serán:

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x^2 + 3x + 2)$$

Factorizando el trinomio:

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 2)(x + 1)$$

Finalmente quedaría factorizado así:

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)^2(x + 2)^2$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Hallar la suma de los coeficientes de los factores primos del siguiente polinomio:

$$P(a) = (a - 2)(a + 3)(a + 2)(a - 1) + 3$$

- A. -2
- B. -4
- C. -1
- D. 1
- E. 2

RESOLUCIÓN:

Del enunciado se tiene:

$$P(a) = (a - 2)(a + 3)(a + 2)(a - 1) + 3$$

Multiplicamos:

$$P(a) = (a^2 + a - 6)(a^2 + a - 2) + 3$$

Efectuando cambio de variable:

$$m = a^2 + a \dots (*)$$

Luego:

$$(m - 6)(m - 2) + 3$$

Operamos:

$$m^2 - 8m + 12 + 3$$

$$m^2 - 8m + 15$$

Factorizando:

$$(m - 5)(m - 3)$$

Reemplazando (*) en la última expresión, se tiene:

$$P(a) = (a^2 + a - 5)(a^2 + a - 3)$$

Entonces, la suma de los coeficientes de los factores primos es:

$$\therefore 1 + 1 - 5 + 1 + 1 - 3 = -4$$

RPTA: B

2. Debido al difícil momento por el que se está atravesando en el Perú, se llegó a la conclusión que el decrecimiento económico es el

1,3N% mensual; donde N representa la cantidad de factores primos de un polinomio

$$P(x) = (x^2 + 8x + 13)^3 - 9(2x^2 + 16x + 29) - (x + 4)^4;$$

¿Cuánto fue ese porcentaje?

- A. 2,5%
- B. 14%
- C. 12%
- D. 9%
- E. 6,5%

RESOLUCIÓN:

Reacomodando la expresión tenemos:

$$P(x) = (x^2 + 8x + 13)^3 - 9[2(x^2 + 8x + 13) + 3] - [(x + 4)^2]^2$$

Haciendo un cambio de variable: $a = x^2 + 8x + 13$, se tiene que:

$$P(x) = (x^2 + 8x + 13)^3 - 9 \left[2 \left(\frac{x^2 + 8x + 13}{a} \right) + 3 \right] - \left[\frac{x^2 + 8x + 13}{a} + 3 \right]^2$$

$P(a) = a^3 - 9(2a + 3) - (a + 3)^2$, aplicando productos notables:

$$P(a) = a^3 - a^2 - 24a - 36$$

Por el criterio de divisores binómicos:

$$a = \{+1; -1; +2; -2; +3; \dots; +36; -36\},$$

Usando Ruffini:

	1	-1	-24	-36
$a = -2$		-2	6	36
	1	-3	-18	0
$a = -3$		-3	18	
	1	-6	0	

Luego tenemos que su forma factorizada será:

$$P(a) = (a + 2)(a + 3)(a - 6),$$

Reemplazando el valor de "x":

$$P(x) = (x^2 + 8x + 13 + 2)(x^2 + 8x + 13 + 3)(x^2 + 8x + 13 - 6)$$

$$P(x) = (x^2 + 8x + 15)(x^2 + 8x + 16)(x^2 + 8x + 7)$$

Finalmente usamos aspa simple tenemos que:

$$P(x) = (x + 5)(x + 3)(x + 4)^2(x + 7)(x + 1)$$

Factores primos: 5

$$\text{Así que: } 1,3N\% = 1,3(5)\% = 6,5\%$$

RPTA: E

3. Factorice y obtenga el factor primo de mayor coeficiente lineal de:

$$P(x) = x^6 - 4x^3 - 32$$

A. $x^2 + 2x + 4$

B. $x^2 + 2x + 5$

C. $x^2 + 2x + 6$

D. $x^2 + 2x + 8$

E. $x^2 + 2x + 9$

RESOLUCIÓN:

Por aspa simple:

$$\begin{array}{rcl}
 P(x) = x^6 - 4x^3 - 32 & & \\
 \begin{array}{l} x^3 \quad \quad -8 \rightarrow -8x^3 \\ x^3 \quad \quad 4 \rightarrow \quad 4x^3 \\ \hline \quad \quad \quad -4x^3 \end{array} & &
 \end{array}$$

De ahí, se tiene:

$$P(x) = (x^3 - 8)(x^3 + 4)$$

Utilizando diferencia de cubos en el primer factor:

$$P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x^3 + 4)$$

El factor primo de mayor coeficiente lineal es:

$$x^2 + 2x + 4$$

RPTA: A

4. Factorizar e indicar el producto de los términos independientes de los factores primos de:

$$(x^2 + x + 1)^2 + 3x^2 + 3x - 15$$

A. 14

B. -12

C. -14

D. 15

E. -15

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$(x^2 + x + 1)^2 + 3x^2 + 3x - 15$$

$$(x^2 + x + 1)^2 + 3(x^2 + x) - 15$$

Cambio de variable: $m = x^2 + x$

$$(\underbrace{x^2 + x}_m + 1)^2 + 3(\underbrace{x^2 + x}_m) - 15$$

La expresión queda:

$$(m + 1)^2 + 3m - 15$$

Desarrollando el cuadrado de la suma de un binomio:

$$m^2 + 2m + 1 + 3m - 15$$

$$m^2 + 5m - 14$$

Por aspa simple: $(m + 7)(m - 2)$

Reemplazamos: $m = x^2 + x$

$$(x^2 + x + 7)(x^2 + x - 2)$$

Por aspa simple:

$$(x^2 + x + 7)(\underbrace{x^2 + x - 2}_{(x + 2)(x - 1)})$$

$$(x^2 + x + 7)(x + 2)(x - 1)$$

Nos pide:

$$\therefore (7)(2)(-1) = -14$$

RPTA: C

5. El espacio que recorre un Leopardo para capturar a un Venado es igual a $P(x) = 8a^2 - b(2a + b)$; sí, su velocidad es de $35m/s$ y el tiempo de captura es igual a $13s$.

Calcular los valores numéricos de los parámetros “a” y “b” respectivamente, siendo éstos, números positivos.

- A. 2 y 5
- B. 3 y 7
- C. 10 y 6
- D. 8 y 3
- E. 5 y 12

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$P(x) = 8a^2 - b(2a + b)$$

Desarrollando tenemos:

$$P(x) = 8a^2 - 2ab - b^2$$

Factorizamos el trinomio con el aspa simple y obtenemos:

$$P(x) = (4a + b)(2a - b)$$

Recordemos que: $d = v \cdot t$

Entonces, formamos el sistema:

$$\begin{cases} 4a + b = 35 \\ 2a - b = 13 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 6a &= 48 \\ a &= 8 \\ \rightarrow b &= 3 \\ \therefore a &= 8 \text{ y } b = 3 \end{aligned}$$

RPTA: D

6. Determinar la suma de los términos de los factores primos de:

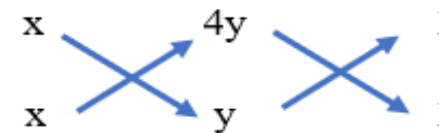
$$x^2 + 5xy + 4y^2 + 2x + 5y + 1$$

- A. $2x - 4y - 2$
- B. $3x + 2y + 2$
- C. $2x + 5y + 2$
- D. $2x - 4y + 2$
- E. $2x + 3y + 2$

RESOLUCIÓN:

Factorizamos utilizando el método de aspa doble:

$$x^2 + 5xy + 4y^2 + 2x + 5y + 1$$



Verificaciones:

$$1ra \text{ Aspa: } xy + 4xy = 5xy$$

$$2da \text{ Aspa: } 4y + y = 5y$$

$$3ra \text{ Aspa: } x + x = 2x$$

Tomamos los factores en forma horizontal.

$$(x + 4y + 1)(x + y + 1)$$

La suma de los términos de los factores primos es:

$$2x + 5y + 2$$

RPTA: C

7. Al sumar los factores primos lineales del polinomio $P(x) = x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 56x^2 - 108x - 144$ se obtiene una ecuación la cual, al darle un valor numérico a “x” de 150, se obtiene:

- A. 225
- B. 347
- C. 106
- D. 318
- E. 454

RESOLUCIÓN:

Sea el polinomio

$$P(x) = x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 56x^2 - 108x - 144$$

Usando los divisores binómicos tenemos que:

Posibles ceros: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \dots$

Aplicamos Ruffini:

	1	5	-13	-56	-108	-144
-2		-2	-6	38	36	144
	1	3	-19	-18	-72	0
4		4	28	36	72	
	1	7	9	18	0	
-6		-6	-6	-18		
	1	1	3	0		

Por lo tanto:

$$P(x) = (x + 2)(x - 4)(x + 6)(x^2 + x + 3)$$

Hallando la suma de los factores lineales tenemos que:

$$(x + 2) + (x - 4) + (x + 6) = 3x + 4$$

Aplicando en $x = 150$ tenemos que $3x + 4 = 3(150) + 4 = 454$

RPTA: E

8. El Ministerio de Educación el año 2022 destinó un presupuesto para pagar la deuda del 30 % de preparación de clases, al profesor José le dieron “N” miles de soles ¿Cuánto le dieron al profesor José si “N” es el número de factores totales de:

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10?$$

- A. 5 000 soles
- B. 8 000 soles
- C. 4 000 soles
- D. 1 600 soles
- E. 6 000 soles

RESOLUCIÓN:

Calculamos los posibles ceros: $\pm(1, 2, 5, 10)$ son todos los divisores del término independiente con signo $\pm$.

Empezamos con los valores mas pequeños, tomando solo los valores que eliminan al polinomio.

Para: $x = 1$

$$R = P(1) = 13 + 6(1)2 + 3(1) - 10$$

$$R = P(1) = 0$$

Si el polinomio se anula para $x = 1$ entonces un factor será $(x - 1)$.

$$\therefore P(x) = (x - 1) Q(x) \dots \dots \dots (*)$$

Calculamos $Q(x)$ por Ruffini.

	1	6	3	-10
1		1	7	+10
	1	7	10	0

$$Q(x) = x^2 + 7x + 10$$

Reemplazando en (*)

$$P(x) = (x - 1)(x + 5)(x + 2)$$

Entonces:

$$N^{\circ} F. Totales = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$$

Por lo tanto, el profesor José recibió 8 000 soles

RPTA: B

1.6 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE POLINOMIOS

MCM El mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas, es la expresión de menor grado posible que contenga un número entero de veces como factor a dichas expresiones. Para determinar el mínimo común múltiplo se factoriza las expresiones y se forma el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente

MCD El máximo común divisor de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de mayor grado posible que está contenido como factor un número entero de veces en dichas expresiones. Para determinar el M.C.D. se factoriza las expresiones y se forma el producto de los factores comunes con su menor exponente.

PROPIEDAD

Para dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$

Se cumple:

$$MCD(P, Q) \cdot MCM(P, Q) = P(x) \cdot Q(x)$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. El tiempo promedio dedicado a la actividad física de un adolescente en una institución educativa está dado por un modelo obtenido a partir del procesamiento de datos de un estudio, dicho modelo es el MCD de las siguientes expresiones:

$$A(x) = x^2 + 9x$$

$$B(x) = 18x^2 + x^3 + 81x$$

$$C(x) = 2x^2 + 18x$$

¿Cuál es ese modelo?

A. $3(x + 3)$

B. $x(x + 9)$

C. x

D. x^2

E. $(x - 3)^2$

RESOLUCIÓN:

Factorizamos cada una de las expresiones:

$$A = x^2 + 9x = x(x + 9)$$

$$B(x) = 18x^2 + x^3 + 81x = x(x + 9)^2$$

$$C(x) = 2x^2 + 18x = 2x(x + 9)$$

El MCD es $x(x + 9)$

El modelo planteado es $x(x + 9)$

RPTA: B

2. El número de sismos que ha registrado un sismografo en un día en la ciudad de Arequipa está determinado por el valor de " a " que se

encuentra en el MCD de $(x^2 + 14x + 48)$ y $(x^2 + 8x + 12)$ el cual es $(x + a)$ ¿cuál es ese número de sismos?

- A. 5
- B. 7
- C. 10
- D. 6
- E. 3

RESOLUCIÓN:

Factorizando:

$$\begin{aligned}x^2 + 14x + 48 &= (x + 6)(x + 8) \\(x^2 + 8x + 12) &= (x + 2)(x + 6)\end{aligned}$$

El MCD de ambos polinomios es: $x + 6$

Comparando: $x + a = x + 6 \rightarrow a = 6$

Por lo tanto, el número de sismos fue 6.

RPTA: D

3. Dados los polinomios:

$$\begin{aligned}P(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\Q(x) &= x^4 - 25x^2 + 144 \\R(x) &= x^3 - 3x^2 - 16x + 48\end{aligned}$$

Calcular la suma de coeficientes del MCM de dichos polinomios

- A. 120
- B. 240
- C. -240
- D. -120
- E. -80

RESOLUCIÓN:

De nuestro enunciado, factorizamos los polinomios:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$P(x) = x(x^2 - 6x + 9)$$

$$P(x) = x(x - 3)^2$$

$$Q(x) = x^4 - 25x^2 + 144$$

$$Q(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 16)$$

$$Q(x) = (x - 3)(x + 3)(x - 4)(x + 4)$$

$$R(x) = x^3 - 3x^2 - 16x + 48$$

$$R(x) = x^2(x - 3) - 16(x - 3)$$

$$R(x) = (x - 3)(x^2 - 16)$$

$$R(x) = (x - 3)(x - 4)(x + 4)$$

Calculamos el MCM:

El MCM debe ser todos los factores de los tres polinomios y si se repite, se coloca una sola vez con su mayor exponente.

$$MCM(P, Q, R) = x(x - 3)^2(x + 3)(x - 4)(x + 4)$$

Nos pide la suma de los coeficientes:

$$x = 1$$

$$MCM(P, Q, R) = 1(1 - 3)^2(1 + 3)(1 - 4)(1 + 4)$$

$$MCM(P, Q, R) = (-2)^2(4)(-3)(5)$$

$$MCM(P, Q, R) = -240$$

RPTA: C

4. Se tiene los polinomios:

$$A(x) = (x - 5)^{m-4}(x + 4)^n(x + 2)^{p+1}$$

$$B(x) = (x - 5)^{m-1}(x + 4)^{n+1}(x + 2)^{p-1}$$

$$C(x) = (x - 5)^{m-2}(x + 4)^{n+2}(x + 2)^{p-2}$$

Si el $MCD(A, B, C) = (x - 5)^4(x + 2)^5(x + 4)^6$. Hallar el número de factores totales del MCM de A, B y C .

- A. 748
- B. 415
- C. 750

D. 648

E. 842

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$A(x) = (x - 5)^{m-4}(x + 4)^n(x + 2)^{p+1}$$

$$B(x) = (x - 5)^{m-1}(x + 4)^{n+1}(x + 2)^{p-1}$$

$$C(x) = (x - 5)^{m-2}(x + 4)^{n+2}(x + 2)^{p-2}$$

El MCD debe ser siempre factor de los tres polinomios, por ello se considera cada factor primo con su menor exponente.

$$MCD(A, B, C) = (x - 5)^{m-4}(x + 2)^{p-2}(x + 4)^n$$

Según nuestro dato:

$$MCD(A, B, C) = (x - 5)^4(x + 2)^5(x + 4)^6$$

Comparando:

$$m - 4 = 4$$

$$m = 8$$

$$n = 6$$

$$p - 2 = 5$$

$$p = 7$$

Reemplazando:

$$A(x) = (x - 5)^4(x + 4)^6(x + 2)^8$$

$$B(x) = (x - 5)^7(x + 4)^7(x + 2)^6$$

$$C(x) = (x - 5)^6(x + 4)^8(x + 2)^4$$

El MCM debe ser todos los factores de los tres polinomios y si se repite, se coloca una sola vez con su mayor exponente.

$$MCM(A, B, C) = (x - 5)^7(x + 4)^8(x + 2)^8$$

El número de factores totales es:

$$N^{\circ} f. t. = (7 + 1)(8 + 1)(8 + 1) = 648$$

RPTA: D

5. Determinar el número de factores algebraicos del polinomio B, si el MCD y el MCM de los polinomios A y B son:

$$MCD(A, B) = (x + 3)(x - 1)$$

$$MCM(A, B) = (x + 6)(x + 1)(x - 1)(x + 3)^2$$

Además $A = (x + 1)(x + 6)(x + 3)$.

A. 8

B. 6

C. 7

D. 4

E. 5

RESOLUCIÓN:

Recordemos:

$$A \cdot B = MCD(A, B) \cdot MCM(A, B)$$

$$(x + 1)(x + 6)(x + 3) \cdot B$$

$$= (x + 3)(x - 1)(x + 6)(x + 1)(x - 1)(x + 3)^2$$

$$B = (x + 3)^2(x - 1)$$

El número de factores algebraicos de B es:

$$N^{\circ} f. t. = (2 + 1)(1 + 1) = 6$$

$$N^{\circ} f. a. = 6 - 1 = 5$$

RPTA: E

6. Determinar la suma de coeficientes del polinomio que resulta de dividir el MCM entre el MCD de los siguientes polinomios:

$$A(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$B(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$C(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

A. 8

B. 6

C. 7

D. 0

E. 5

RESOLUCIÓN:

Hallamos el Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo de:

$$A(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$B(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$C(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Factorizando cada expresión:

$$A(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$A(x) = x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 8x + 4$$

$$A(x) = x^2(x + 2) + (3x + 2)(x + 2)$$

$$A(x) = (x + 2)(x^2 + 3x + 2)$$

$$A(x) = (x + 2)(x + 2)(x + 1)$$

$$A(x) = (x + 2)^2(x + 1)$$

$$B(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$B(x) = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4$$

$$B(x) = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4$$

$$B(x) = x^2(x - 1) + 4(x^2 - 1)$$

$$B(x) = x^2(x - 1) + 4(x + 1)(x - 1)$$

$$B(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$$

$$B(x) = (x - 1)(x + 2)^2$$

$$C(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$C(x) = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$$

$$C(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 6x(x + 2)$$

$$C(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4 + 6x)$$

$$C(x) = (x + 2)(x^2 + 4x + 4)$$

$$C(x) = (x + 2)^3$$

El Máximo Común Divisor será:

$$MCD(A, B, C) = (x + 2)^2$$

El Mínimo Común Múltiplo será:

$$MCM(A, B, C) = (x + 2)^3(x + 1)(x - 1)$$

Dividiendo el MCM entre el MCD:

$$\frac{MCM(A, B, C)}{MCD(A, B, C)} = \frac{(x + 2)^3(x + 1)(x - 1)}{(x + 2)^2} = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$$

$$\text{La suma de coeficientes es } P(1) = (1 + 2)(1 + 1)(1 - 1) = 0$$

RPTA: D

7. Se tiene los polinomios:

$$A(x) = x^3 - x^2 - 6x \text{ y } B(x), \text{ donde:}$$

$$MCD(A, B).MCM(A, B) = x^6 - 13x^4 + 36x^2$$

Hallar el valor numérico del polinomio $B(x)$ para $x = -2$

A. 8

B. 5

C. 10

D. -8

E. -12

RESOLUCIÓN:

Por teorema:

Para dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$

Se cumple:

$$MCD(P, Q).MCM(P, Q) = P(x).Q(x)$$

Según nuestro enunciado, factorizamos:

$$MCD(A, B).MCM(A, B) = x^6 - 13x^4 + 36x^2$$

$$MCD(A, B).MCM(A, B) = x^2(x^4 - 13x^2 + 36)$$

$$MCD(A, B).MCM(A, B) = x^2(x^2 - 4)(x^2 - 9)$$

$$MCD(A, B).MCM(A, B) = x^2(x + 2)(x - 2)(x + 3)(x - 3)$$

Además:

$$A(x) = x^3 - x^2 - 6x$$

$$A(x) = x(x^2 - x - 6)$$

$$A(x) = x(x - 3)(x + 2)$$

Luego, reemplazamos:

$$MCD(A, B).MCM(A, B) = A(x).B(x)$$

$$x^2(x + 2)(x - 2)(x + 3)(x - 3) = x(x - 3)(x + 2).B(x)$$

$$B(x) = x(x - 2)(x + 3)$$

Finalmente, evaluamos para $x = -2$.

$$B(-2) = -2(-2 - 2)(-2 + 3)$$

$$B(-2) = 8$$

El número de factores totales es:

$$N^{\circ} f. t. = (2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 18$$

$$\therefore 18 \text{ hoyos}$$

RPTA: E

RPTA: A

8. En algunos deportes, como el golf, un campo típico tiene " n " hoyos, donde " n " es el número de factores totales del producto de 2 polinomios cuyo MCM es $x^3 - x^2 - 4x + 4$ y su MCD es $x^2 + x - 2$ ¿cuántos hoyos tiene?

- A. 8 hoyos
- B. 5 hoyos
- C. 10 hoyos
- D. 8 hoyos
- E. 18 hoyos

RESOLUCIÓN:

Por teorema:

Para dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$

Se cumple:

$$MCD(P, Q) \cdot MCM(P, Q) = P(x) \cdot Q(x)$$

Factorizando a los polinomios:

$$MCM = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

$$MCM = x^2(x - 1) - 4(x - 1)$$

$$MCM = (x - 1)(x + 2)(x - 2)$$

$$MCD = x^2 + x - 2$$

$$MCD = (x + 2)(x - 1)$$

Reemplazando:

$$MCD(P, Q) \cdot MCM(P, Q) = P(x) \cdot Q(x)$$

$$(x + 2)(x - 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2) = P(x) \cdot Q(x)$$

$$(x + 2)^2(x - 1)^2(x - 2) = P(x) \cdot Q(x)$$

1.7 ECUACIONES CUADRÁTICAS

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Es una ecuación polinómica de segundo grado que tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0; a, b, c \in R$$

Las ecuaciones cuadráticas pueden ser:

Clases	Características	Ejemplo
Completas	$ax^2 + bx + c = 0 ;$ $a \neq 0; b \neq 0;$ $c \neq 0.$	$2x^2 - 7x + 3 = 0$ $(2x - 1)(x - 3) = 0$ $2x - 1 = 0 \vee x - 3 = 0$ $x = \frac{1}{2} \vee x = 3$ $C.S. = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$
Incompletas	$ax^2 + bx + c = 0 ;$ $c = 0$	$3x^2 + 6x = 0$ $3x(x + 2) = 0$ $x = 0 \vee x + 2 = 0$ $x = 0 \vee x = -2$ $C.S. = \{-2; 0\}$
	$ax^2 + bx + c = 0 ;$ $b = 0$	$2x^2 - 18 = 0$ $2(x^2 - 9) = 0$ $x^2 - 9 = 0$ $(x + 3)(x - 3) = 0$ $x + 3 = 0 \vee x - 3 = 0$ $x = -3 \vee x = 3$ $C.S. = \{-3; 3\}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

 es la discriminante

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
La ecuación no tiene soluciones reales, sus raíces son imaginarias y conjugadas.	La ecuación tiene una raíz real (doble) o dos soluciones iguales.	La ecuación tiene dos raíces reales distintas.

RELACIÓN ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA: $ax^2 + bx + c = 0$

SUMA DE RAÍCES	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$3x^2 + 6x - 1 = 0$ La suma de sus 2 raíces será: $x_1 + x_2 = -\frac{6}{3}$ $x_1 + x_2 = -2$
PRODUCTO DE RAÍCES	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$	$3x^2 + 6x - 1 = 0$ El producto de sus 2 raíces será: $x_1 \cdot x_2 = \frac{(-1)}{3}$ $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3}$

DIFERENCIA DE RAÍCES

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

$3x^2 + 6x - 1 = 0$
La diferencia de sus 2 raíces será:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{(6)^2 - 4(3)(-1)}}{3}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Siendo la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$:
tiene 2 soluciones dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

RAÍCES RECÍPROCAS

También llamadas inversas. Su producto es 1.

$$x_1 \cdot x_2 = 1$$

$$\frac{c}{a} = 1 \rightarrow \boxed{c = a}$$

RAÍCES SIMÉTRICAS

También llamadas opuestas. Su suma es 0.

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$-\frac{b}{a} = 0 \rightarrow \boxed{b = 0}$$

RAÍCES IGUALES

Su discriminante es 0.

$$\boxed{\Delta = 0}$$

Teorema de las ecuaciones cuadráticas equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen raíces comunes.

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ mx^2 + nx + p = 0 \end{cases} \text{ entonces } \boxed{\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}}$$

Teorema de la raíz común

Si las ecuaciones:

$$ax^2 + bx + c = 0; \forall a \neq 0$$

$$mx^2 + nx + p = 0; \forall m \neq 0$$

Admiten una sola raíz común, entonces se cumplirá:

$$\boxed{(ap - cm)^2 = (an - bm)(bp - cn)}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Sean "m" y "n" las raíces de la ecuación $2x(x - 3) = x^2 - x - 6$.
Calcular el valor de " $m^2 + mn - n^2$ ", si $m > n$.

- A. 15
- B. 12
- C. 13
- D. 14
- E. 11

RESOLUCIÓN:

De la expresión: $m^2 - n^2 + m \cdot n$

$$(m + n)(m - n) + m \cdot n$$

Calculando la suma, diferencia y producto de las raíces:

Reduciendo la ecuación:

$$2x(x - 3) = x^2 - x - 6$$

$$2x^2 - 6x = x^2 - x - 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

De la teoría: $m + n = -\frac{-5}{1} = 5$

$$m \cdot n = \frac{6}{1} = 6$$

$$m - n = \frac{\sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{1}$$

$$m - n = 1$$

Entonces: $m^2 - n^2 + m \cdot n$

$$(m + n)(m - n) + m \cdot n$$

$$\therefore 5(1) + 6 = 11$$

RPTA: E

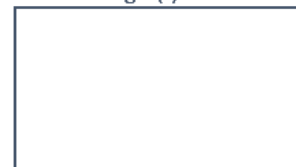
2. Un terreno rectangular, tiene 600 m^2 ; además, " x " es el ancho del terreno y está en la ecuación $x^2 - 4(x - 3) = 177$. Calcular el largo del terreno.

- A. 15 m
- B. 25 m
- C. 35 m
- D. 40 m
- E. 50 m

RESOLUCIÓN:

Esbozando el problema:

Largo (l)



Ancho (x)

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 4(x - 3) = 177$$

$$x^2 - 4x + 12 - 177 = 0$$

$$x^2 - 4x - 165 = 0$$

$$(x - 15)(x + 11) = 0$$

$$x - 15 = 0 \vee x + 11 = 0$$

$$x = 15 \vee x = -11$$

El ancho del terreno es: 15m.

Del área del terreno: $(\text{largo})(\text{ancho}) = 600$

$$l(15) = 600$$

$$l = \frac{600}{15}$$

$$l = 40$$

$\therefore$ El largo del terreno es 40 m

RPTA: D

3. Dos números enteros positivos se diferencian en 6 unidades y la suma de sus cuadrados es 218. Encontrar dichos números y dar como repuesta su producto.

- A. 91
- B. 92
- C. 38
- D. 48
- E. 58

RESOLUCIÓN:

Del enunciado del problema:

x : número mayor

y : número menor

$$x - y = 6 \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 = 218 \dots (2)$$

De la primera ecuación: $y = x - 6$

Reemplazando en la ecuación (2) tenemos:

$$x^2 + (x - 6)^2 = 218$$

$$x^2 + x^2 - 12x + 36 = 218$$

$$2x^2 - 12x - 182 = 0$$

$$x^2 - 6x - 91 = 0$$

$$(x - 13)(x + 7) = 0$$

$$x = 13 \vee x = -7$$

Sabiendo que los valores son positivos $x = 13$

Entonces reemplazando en (1):

$$13 - y = 6$$

$$y = 7$$

Por tanto, el producto es: $xy = 13(7) = 91$

RPTA: A

4. La diferencia de un número positivo con su recíproco es $\frac{15}{4}$.

Encontrar dicho número y dar como respuesta el doble del número, menos tres.

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, sea: x : el número

$$x - \frac{1}{x} = \frac{15}{4}$$

Multiplicando por 4:

$$4\left(x - \frac{1}{x}\right) = 4\left(\frac{15}{4}\right)$$

$$4x^2 - 4 = 15x$$

$$4x^2 - 15x - 4 = 0$$

$$(4x + 1)(x - 4) = 0$$

$$x = -\frac{1}{4} \vee x = 4$$

Según lo que pide el problema es:

$$2x - 3 = 2(4) - 3 = 5$$

Por lo tanto, el doble del número menos tres es 5.

RPTA: E

5. Si las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$, son las inversas de las raíces de la ecuación $2x^2 + 6x - 5 = 0$. Hallar el valor de " $a^2 - b^2 + ab$ ".

- A. 11/25
- B. 22/25
- C. 33/25
- D. 44/25
- E. 13/25

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos que el conjunto solución de:

$$2x^2 + 6x - 5 = 0 \text{ es } \{x_1; x_2\}$$

$$\text{Entonces: } x_1 + x_2 = -3 \wedge x_1 x_2 = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Y el conjunto solución de } x^2 + ax + b = 0 \text{ es } \left\{\frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_2}\right\}$$

Además, tenemos que:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -a \wedge \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = b$$

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2}{x_1x_2} &= -a \wedge \frac{1}{x_1x_2} = b \\ \frac{-3}{-\frac{5}{2}} &= -a \wedge \frac{1}{-\frac{5}{2}} = b \\ a &= -\frac{6}{5} \wedge b = -\frac{2}{5} \\ a^2 - b^2 + ab &= \left(-\frac{6}{5}\right)^2 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{36}{25} - \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{44}{25} \\ \therefore a^2 - b^2 + ab &= \frac{44}{25}\end{aligned}$$

RPTA: D

6. Determinar los valores de “m” y “n”; sabiendo que, las ecuaciones:

$$(2m)x^2 + 3mx + 8 = 0 \text{ y}$$

$$(3n-2)x^2 + (2n-2)x + 4 = 0,$$

tienen las mismas raíces. (Dar como respuesta “m + n”)

- A. 0
- B. $2/5$
- C. $3/5$
- D. $-2/5$
- E. $-1/5$

RESOLUCIÓN:

Por la equivalencia de ecuaciones se tiene:

$$\frac{2m}{3n-2} = \frac{3m}{2n-2} = \frac{8}{4}$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{2m}{3n-2} &= 2 \\ 2m &= 6n - 4\end{aligned}$$

$$m - 3n = -2 \dots (I)$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{3m}{2n-2} &= 2 \\ 3m &= 4n - 4\end{aligned}$$

$$3m - 4n = -4 \dots (II)$$

Resolviendo el sistema con las ecuaciones (I) y (II):

$$\begin{cases} m - 3n = -2 \dots (I) \\ 3m - 4n = -4 \dots (II) \end{cases}$$

Multiplicando por -3 a la ecuación (I)

$$\begin{cases} -3m + 9n = 6 \dots (I) \\ 3m - 4n = -4 \dots (II) \end{cases}$$

$$5n = 2 \rightarrow n = \frac{2}{5}$$

Reemplazando este valor en la ecuación (I):

$$m - 3\left(\frac{2}{5}\right) = -2 \rightarrow m = -\frac{4}{5}$$

Por lo tanto: $m + n = -\frac{2}{5}$

RPTA: D

7. El Libro de los Récords Guinness publicó que, el hombre más alto de la historia mide $2,7q$ m. Hallar la talla del hombre más alto, donde la siguiente ecuación tiene solución única.

$$(2\sqrt{x})^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 + 3\left(1 + \frac{3}{q}\right) = 0$$

- A. $2,72$ m
- B. $2,73$ m
- C. $2,71$ m
- D. $2,74$ m
- E. $2,78$ m

RESOLUCIÓN:

Reduciendo la ecuación:

$$(2\sqrt{x})^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 + 3\left(1 + \frac{3}{q}\right) = 0$$

$$4x + \frac{9}{x} + 3\left(1 + \frac{3}{q}\right) = 0$$

$$4x^2 + 3\left(1 + \frac{3}{q}\right)x + 9 = 0$$

Como tiene solución única la discriminante es cero, entonces:

$$b^2 - 4ac = 0$$

Reemplazando:

$$\left[3\left(1 + \frac{3}{q}\right)\right]^2 - 4(4)(9) = 0$$

$$9\left(1 + \frac{3}{q}\right)^2 = 16(9)$$

$$\left(1 + \frac{3}{q}\right)^2 = 16$$

Entonces:

$$1 + \frac{3}{q} = 4 \vee 1 + \frac{3}{q} = -4$$

$$q = 1 \vee q = -\frac{3}{5}$$

Como q debe ser número natural entonces $q = 1$

Por lo tanto, la talla del hombre más alto es 2,71 m.

RPTA: C

8. Eduardo aprovecha este mes de primavera para comprar rosas importadas del extranjero para su venta, donde su inversión total fue de 480 soles. Si las rosas que en total compró hubieran costado 8 soles menos, entonces el hubiera comprado 10 rosas más. ¿Cuál es el precio de cada rosa que compró Eduardo?

A. S/ 18

B. S/20

C. S/22

D. S/24

E. S/28

RESOLUCIÓN:

Del problema:

x : precio de una rosa

y : cantidad de rosas

Planteando:

$$xy = 480$$

Del problema se deduce que:

$$(x - 8)(y + 10) = 480$$

$$xy - 8y + 10x - 80 = 480$$

$$10x - 8y = 80$$

$$y = \frac{10x - 80}{8} = \frac{5x - 40}{4}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$x\left(\frac{5x - 40}{4}\right) = 480$$

$$5x^2 - 40x = 1920$$

Simplificando:

$$x^2 - 8x - 384 = 0$$

Resolviendo por fórmula general:

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{1600}}{2}; x_2 = \frac{8 - \sqrt{1600}}{2}$$

Por tanto, $x_1 = 24 \vee x_2 = -16$

Así que cada rosa costó 24 soles.

RPTA: D

CAPÍTULO II

ÁLGEBRA

El álgebra es una rama clave de las matemáticas que estudia la manipulación de símbolos y números mediante operaciones. Incluye la resolución de ecuaciones, desde polinomiales hasta sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, y el análisis de inecuaciones. Las matrices y determinantes son herramientas esenciales en álgebra lineal, usadas para resolver sistemas de ecuaciones y transformaciones. La racionalización simplifica expresiones con radicales. El álgebra es fundamental en ciencias e ingeniería, facilitando la modelización y resolución de problemas complejos, y es vital para el desarrollo de diversas aplicaciones tecnológicas y científicas.



2 EL ÁLGEBRA COMO ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN

2.1 RAÍCES DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL

RAÍCES DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.

La ecuación polinomial:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Con coeficiente $a_0 \neq 0$, y grado $n \geq 1$ con cualquier tipo de coeficientes numéricos tiene por lo menos una raíz o “n” raíces ya sea real o compleja.

Como consecuencia del teorema, cualquier polinomio $P(x)$ de grado n se puede descomponer en factores lineales de la forma:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$$

Donde $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n$ son las raíces del polinomio, y a_n es el coeficiente principal (el coeficiente de x^n).

2.1.1 TEOREMA DE CARDANO - VIETA

Establece relaciones entre los coeficientes de un polinomio y las sumas y productos de sus raíces. Este teorema es especialmente útil para polinomios de grado n y proporciona las siguientes relaciones:

A. La suma de raíces tomadas de una en una.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

B. La suma de los productos de las raíces tomadas de dos en dos.

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

C. La suma de los productos de las raíces tomadas de tres en tres.

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + \cdots + x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

Este patrón continúa alternando el signo hasta el cálculo de:

D. Producto de todas las raíces.

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}$$

Si “n” es impar se cambia de signo a la división de $\frac{a_n}{a_0}$.

Si “n” es par no se cambia de signo a la división de $\frac{a_n}{a_0}$.

APLICACIONES

El teorema de Vieta es muy útil en:

- La resolución de ecuaciones polinómicas.
- El análisis de las propiedades de las raíces sin resolver explícitamente la ecuación.
- La factorización de polinomios.

En resumen, el teorema de Vieta establece relaciones precisas entre los coeficientes de un polinomio y las raíces de dicho polinomio, proporcionando una herramienta poderosa para trabajar con ecuaciones algebraicas.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Sabiendo que, una de las raíces de la ecuación $x^3 - 7x^2 + 2x + n = 0$, es -2 . Indicar la suma de las otras dos raíces.

- A.** 2
- B.** 4
- C.** 5
- D.** 7
- E.** 9

RESOLUCIÓN:

Como una raíz es $x_1 = -2 \cdots (*)$
además

$$x^3 - 7x^2 + 2x + n = 0$$

Por el teorema de Cardano se tiene:

$$S = x_1 + x_2 + x_3 = 7 \cdots (1)$$

Reemplazando (*) en (1) tenemos:

$$\begin{aligned} -2 + x_2 + x_3 &= 7 \\ \Rightarrow x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

RPTA: E

2. En la ecuación $2x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$, dos de sus raíces suman

1. Hallar la tercera raíz.

- A. 1
- B. -1
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $-\frac{1}{2}$
- E. -2

RESOLUCIÓN:

Sea x_1, x_2 y x_3 soluciones de la ecuación:

Como

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$$

Por el teorema de Cardano se tiene:

$$S = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow S = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-1}{2} \dots (1)$$

Por dato se tiene:

$$x_1 + x_2 = 1 \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$1 + x_3 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + x_3 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$$

RPTA: D

3. Determinar el valor de " p ", si una raíz de la ecuación: $x^3 - 5x^2 + qx + p = 0$; $p \wedge q \in \mathbb{R}$, es $2 + i$.

- A. -4
- B. -2
- C. -5
- D. -7
- E. 9

RESOLUCIÓN:

Como una raíz es $x_1 = 2 + i$

$$\Rightarrow x_2 = 2 - i$$

Por el teorema de Cardano se tiene:

la suma es:

$$S = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-5}{1} = 5 \dots (1)$$

$$P = x_1 x_2 x_3 = -\frac{p}{1} \dots (2)$$

Reemplazando las soluciones en (1) tenemos:

$$2 + i + 2 - i + x_3 = -\frac{-5}{1} = 5$$

$$\Rightarrow x_3 = 1$$

Ahora reemplazando las soluciones en (2) tenemos:

$$(2 + i)(2 - i)x_3 = -p$$

$$\Rightarrow (4 - (-1)) \cdot 1 = -p$$

$$\Rightarrow p = -5$$

RPTA: C

4. Si: a, b y c , son las raíces de la ecuación: $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$. Calcular: $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ba}$.

- A. 5
B. -5
C. -4
D. -2
E. -7

$$Q = \frac{28}{-4}$$

$$\Rightarrow Q = -7$$

RPTA: E

RESOLUCIÓN:

Como:

$$Q = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ba}$$

Sacando mínimo común múltiplo

$$Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \dots (1)$$

Ahora de la ecuación

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$$

La suma es:

$$S_1 = a + b + c = -\frac{-4}{1} = 4 \dots (2)$$

$$S_2 = ab + bc + ac = 2 \dots (3)$$

El producto es:

$$P = abc = -\frac{4}{1} = -4 \dots (4)$$

Como se sabe que:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ac) - 3abc \dots (5)$$

Reemplazando (2), (3) y (4) en (5) se tiene:

$$(4)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3 \cdot 4 \cdot 2 - 3(-4)$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 64 - 24 - 12$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 28 \dots (6)$$

Reemplazando en (6) y (4) en (1) se tiene:

5. Si: $3 - 2\sqrt{2}$, es una raíz de la ecuación $mx^3 - 11x^2 - nx + 1 = 0$. Calcular: " mn ".

- A. 10
B. 8
C. 12
D. 7
E. 6

RESOLUCIÓN:Como una raíz es $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$mx^3 - 11x^2 - nx + 1 = 0$$

Por el teorema de Cardano se tiene:

$$S = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-11}{m} = \frac{11}{m} \dots (1)$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{-n}{m} = -\frac{n}{m} \dots (2)$$

$$P = x_1x_2x_3 = -\frac{1}{m} \dots (3)$$

Reemplazando las soluciones en (3) tenemos:

$$(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})x_3 = -\frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{m}$$

Ahora reemplazando las soluciones en (1) tenemos:

$$3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{m} = \frac{11}{m}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{12}{m} \Rightarrow m = 2$$

Por lo que

$$x_3 = -\frac{1}{2}$$

de (2) tenemos:

$$x_1x_2 + x_3(x_2 + x_1) = \frac{-n}{m} = -\frac{n}{m} \dots (4)$$

Reemplazando las soluciones en (4)

$$(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \cdot 6 = -\frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - 3 = -\frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow n = 4$$

Por lo que $mn = 8$

6. Si: x_1, x_2 y x_3 , son las raíces de la ecuación:

$$4x^3 - 2x^2 + 7x - 3 = 0$$

Calcular:

$$Q = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{1}{x_1 \cdot x_3}$$

- A. $\frac{2}{3}$
- B. $\frac{3}{2}$
- C. $-\frac{2}{3}$
- D. $-\frac{3}{2}$
- E. $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN:

Como:

$$Q = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_3}$$

Sacando mínimo común múltiplo

$$Q = \frac{x_3 + x_2 + x_1}{x_1x_2x_3} \dots (1)$$

Ahora de la ecuación

$$4x^3 - 2x^2 + 7x - 3 = 0$$

Por el teorema de Cardano se tiene:

La suma es:

$$S = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$$

El producto es:

$$P = x_1x_2x_3 = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

Reemplazando en (1) tenemos:

$$Q = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

RPTA: B

RPTA: A

7. Hallar el valor de "k", si las raíces de la ecuación $x^3 - 9x^2 + kx - 24 = 0$, están en progresión aritmética.

- A. 12
- B. 13
- C. 24
- D. 26
- E. 28

RESOLUCIÓN:

Como las raíces están en progresión aritmética entonces sean estas

$a - r, a, a + r$ donde r es la razón

Además

$$x^3 - 9x^2 + kx - 24 = 0$$

Por el teorema de Cardano se tiene:

la suma es:

$$S_1 = a - r + a + a + r = 9 \dots (2)$$

$$\Rightarrow 3a = 9$$

$$\Rightarrow a = 3$$

El producto es:

$$P = (a - r)a(a + r) = 24$$

$$\Rightarrow 3(3 - r)(3 + r) = 24$$

$$\Rightarrow (9 - r^2) = 8$$

$$\Rightarrow r = 1$$

Entonces las soluciones son: 2, 3 y 4

Por el teorema de Cardano también se tiene:

La suma tomada de dos en dos:

$$S_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = k$$

$$\Rightarrow k = 26$$

RPTA: D

8. Si dos raíces complejas de la ecuación $2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 2 = 0$, son " i " e " $i + 1$ ". Hallar el valor de: " $a + b + c + d$ ".

A. 0

B. 2

C. 4

D. 6

E. 8

RESOLUCIÓN:

Como tenemos dos raíces $i, i + 1$,

Entonces otras dos raíces son $-i, -i + 1, m$

Además

$$2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 2 = 0$$

Por el teorema de Cardano se tiene:

El producto es:

$$P = i(-i)(1+i)(1-i)m = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow -i^2(1 - i^2)m = 1$$

Debido a que $i^2 = -1$

$$\Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

Construyendo la ecuación tenemos

$$(x - i)(x + i)(x - 1 - i)(x - 1 + i)(2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)(2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2x^3 - x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 6x - 2 = 0$$

Comparando con

$$2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 2 = 0$$

Entonces $a = -5, b = 8, c = -7$ y $d = 6$

Por lo que $a + b + c + d = -5 + 8 - 7 + 6 = 2$

RPTA: B

9. Sabiendo que, las raíces de la ecuación:

$$x^3 + mx^2 + nx + m = 0,$$

son proporcionales a 2, 3 y 4. Hallar " n ".

A. $\frac{39}{4}$

- B. $\frac{27}{4}$
 C. $\frac{26}{5}$
 D. $-\frac{23}{5}$
 E. $\frac{25}{4}$

RESOLUCIÓN:

Como las raíces son proporcionales a 2, 3 y 4

Entonces las raíces son $2k, 3k$ y $4k$

Además: $x^3 + mx^2 + nx + m = 0$

Por el teorema de Cardano se tiene:

la suma es:

$$S = 9k = -m \dots (1)$$

El producto es:

$$P = 24k^3 = -m \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$\begin{aligned} 24k^3 &= 9k \\ k^2 &= \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Por el teorema de Cardano también se tiene que:

La suma tomada de dos en dos:

$$\begin{aligned} S_2 &= (2k)(3k) + (2k)(4k) + (3k)(4k) = n \\ \Rightarrow 6k^2 + 8k^2 + 12k^2 &= n \\ \Rightarrow 26 \cdot \frac{3}{8} &= n \\ \Rightarrow n &= \frac{39}{4} \end{aligned}$$

RPTA: A

10. Una de las raíces de la ecuación $2x^3 + mx^2 + nx + 4 = 0$, es $2 - \sqrt{2}$. Calcular el valor de: $Q = \sqrt[3]{2n - 3m}$.

- A. 4
 B. 6
 C. 8
 D. 2
 E. 10

RESOLUCIÓN:

Como una raíz es $x_1 = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 2 + \sqrt{2}$

$$2x^3 + mx^2 + nx + 4 = 0$$

Por el teorema de Cardano se tiene:

$$\begin{aligned} P &= x_1 x_2 x_3 = -\frac{4}{2} = -2 \dots (3) \\ \Rightarrow (2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})x_3 &= -2 \\ \Rightarrow 2x_3 &= -2 \Rightarrow x_3 = -1 \end{aligned}$$

Construyendo la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} (x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2})(2x + 2) &= 0 \\ \Rightarrow 2(x^2 - 4x + 2)(x + 1) &= 0 \\ \Rightarrow 2x^3 - 6x^2 - 4x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Comparando con $2x^3 + mx^2 + nx + 4 = 0$

$$m = -6 \text{ y } n = -4$$

Por lo tanto, reemplazando en $Q = \sqrt[3]{2n - 3m}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q &= \sqrt[3]{2(-4) - 3(-6)} = \sqrt{-2 + 18} \\ \Rightarrow Q &= 4 \end{aligned}$$

RPTA: A

2.2 MATRICES Y OPERACIONES CON MATRICES

2.2.1 MATRIZ

Una matriz es un conjunto de números o expresiones numéricas que se ordenan como una tabla de filas y columnas. Cada una de las intersecciones de filas o columnas se denomina elemento de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.2.2 ORDEN DE UNA MATRIZ

Está dado por la multiplicación indicada del número de filas por número de columnas.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{orden } 3 \times 3$$

$$B = [b_{ij}], 3 \times 3; i: \text{filas}; j: \text{columnas}$$

2.2.3 CLASES DE MATRICES:

2.2.3.1 MATRIZ FILA:

$$D = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1j}]$$

2.2.3.2 MATRIZ COLUMNA:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \end{bmatrix}$$

2.2.3.3 MATRIZ CUADRADA:

N° de filas = N° de columnas

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

TRAZA DE LA MATRIZ: Suma de los elementos de la diagonal principal, en este caso, 2 y 4. $\text{Traz}(A_{2 \times 2}) = 2 + 4 = 6$

2.2.3.4 MATRIZ NULA:

Todos sus elementos son iguales a 0.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.3.5 MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR:

Es una matriz cuadrada: $a_{ij} = 0$ para $i > j$

Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2.3.6 MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR:

Es una matriz cuadrada: $a_{ij} = 0$ para $i < j$

Ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7/2 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

2.2.3.7 MATRIZ DIAGONAL:

Matriz cuadrada: $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$

Ejemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

2.2.3.8 MATRIZ ESCALAR:

Es una matriz diagonal: $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{mn} = k$

Ejemplo:

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2.3.9 MATRIZ UNITARIA O IDENTIDAD (I):

Es una matriz diagonal donde: $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{mn} = 1$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.3.10 MATRIZ TRANSPUESTA:

Se obtiene al intercambiar las filas por las columnas:

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1/2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

$$I = I^t$$

$$(KA)^t = KA^t$$

$$(AB)^t = B^t \times A^t$$

$$(A^t)^t = A$$

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

2.2.3.11 MATRIZ SIMÉTRICA:

Es una matriz cuadrada donde: $A = A^t$

$a_{ij} = a_{ji}$ para $i \neq j$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1/3 \\ -5 & 3 & 7 \\ 1/3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

2.2.3.12 MATRIZ ANTISIMÉTRICA:

Es una matriz cuadrada, donde $A = -A^t$ tal que $a_{ij} = -a_{ji}$; los elementos de la diagonal principal son ceros $a_{ii} = 0, i = j$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 1/5 \\ 7 & 0 & 8 \\ -1/5 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.3.13 MATRIZ IDEMPOTENTE:

Es una matriz cuadrada, donde $A^2 = A$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = A$$

2.2.3.14 MATRIZ INVOLUTIVA:

Es una matriz cuadrada, donde: $A^2 = I$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

2.2.4 MATRICES CONMUTABLES:

Si $A \cdot B = B \cdot A$; además $(A \cdot B)^P = A^P \cdot B^P$; $P \in \mathbb{N}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.5 MATRIZ ORTOGONAL:

Es una matriz cuadrada donde: $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$; es invertible, la inversa de una matriz ortogonal también es ortogonal.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; M^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

2.2.6 MATRIZ DE COFACTORES:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Cofactor de A .

$$CA = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 11 \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -6 & -9 & 11 \\ -5 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

2.2.7 MATRIZ ADJUNTA:

Es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$CA = \begin{bmatrix} -6 & -5 & 2 \\ -9 & -1 & 3 \\ 11 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow adjunta(A) = Adj(A)$$

$$(CA)^t = \begin{bmatrix} -6 & -5 & 2 \\ -9 & -1 & 3 \\ 11 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

2.2.8 OPERACIONES CON MATRICES

2.2.8.1 PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN ESCALAR POR LA MATRIZ

Sean α y β dos escalares y A, B dos matrices del mismo orden, entonces:

$$1.- (\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha (B \cdot A)$$

$$2.- \alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$3.- (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

$$4.- I \cdot A = A$$

$$5.- 0 \cdot A = A$$

2.2.8.2 PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

Si dos matrices se pueden sumar se llaman conformables respecto a dicha operación.

$$1.- A + B = B + A, \text{ Conmutativa}$$

$$2.- A + (B + C) = (A + B) + C, \text{ Asociativa.}$$

2.2.8.3 PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

El producto de dos matrices $A \cdot B$ está definido solo cuando el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B .

- 1.- $A \cdot B \neq B \cdot A$
- 2.- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- 3.- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- 4.- $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
- 5.- $k(A \cdot B) = A(k \cdot B)$; k es un escalar.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar el valor de las variables “ x ”, “ y ”, “ w ” y “ z ”, para que se cumpla:

$$\begin{bmatrix} x+y & 6z \\ 2w & 2x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

- A. $x = -2; y = 1; w = 3$ y $z = \frac{1}{3}$
- B. $x = 2; y = 1; w = 3$ y $z = \frac{1}{3}$
- C. $x = -2; y = -1; w = 3$ y $z = \frac{1}{5}$
- D. $x = -2; y = 5; w = 8$ y $z = \frac{1}{3}$
- E. $x = -2; y = -1; w = 3$ y $z = 1$

RESOLUCIÓN:

Las matrices son de la misma dimensión es decir el mismo orden, al realizar la igualación de los términos obtenemos

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x+y & 6z \\ 2w & 2x-3y \end{bmatrix} \\ \begin{cases} x+y = -1 \\ 6z = 2 \\ 2w = 6 \\ 2x-3y = -7 \end{cases} \end{cases}$$

Para z

$$6z = 2$$

$$z = \frac{2}{6}$$

$$z = \frac{1}{3}$$

Para w

$$2w = 6$$

$$w = \frac{6}{2}$$

$$w = 3$$

Para x e y , un sistema

$$\begin{cases} x+y = -1 \dots (1) \\ 2x-3y = -7 \dots (2) \end{cases}$$

Multiplicamos (1) por 3

$$\begin{cases} 3x+3y = -3 \\ 2x-3y = -7 \end{cases}$$

$$5x = -10$$

$$x = -2$$

$$y = 1$$

Resolviendo el sistema, tenemos:

$$x = -2; y = 1; w = 3 \text{ y } z = \frac{1}{3}$$

RPTA: A

2. Formar la matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, de modo que se cumpla:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}; i \geq j \\ i+j; i < j \end{cases}$$

$$\text{A. } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

B. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

D. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

E. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN:

Planteamos la matriz de acuerdo a sus características

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= (-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1 \\ a_{22} &= (-1)^{2+2} = (-1)^4 = 1 \\ a_{33} &= (-1)^{3+3} = (-1)^6 = 1 \\ a_{21} &= (-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1 \\ a_{32} &= (-1)^{3+2} = (-1)^5 = -1 \\ a_{31} &= (-1)^{3+1} = (-1)^4 = 1 \\ a_{12} &= 1 + 2 = 3 \\ a_{23} &= 2 + 3 = 5 \\ a_{13} &= 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

RPTA: A

3. Sean las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -3 \\ -2 & 8 & -7 & 8 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 8 & -5 \\ 6 & 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Determinar " $3C + 2D$ ".

A. $\begin{bmatrix} 13 & -14 & 4 & -19 \\ 6 & 28 & -9 & 10 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & -14 & 34 & -19 \\ 6 & -8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 13 & -14 & 34 & -19 \\ 6 & 28 & -19 & 10 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 3 & -14 & 34 & -19 \\ -6 & 28 & -19 & 0 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 13 & -14 & 34 & -19 \\ 6 & 0 & -9 & 7 \end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN:

Determinamos cada matriz escalar

$$3C = \begin{bmatrix} 3(5) & 3(-2) & 3(6) & 3(-3) \\ 3(-2) & 3(8) & 3(-7) & 3(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -6 & 18 & -9 \\ -6 & 24 & -21 & 24 \end{bmatrix}$$

$$2D = \begin{bmatrix} 2(-1) & 2(-4) & 2(8) & 2(-5) \\ 2(6) & 2(2) & 2(1) & 2(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 16 & -10 \\ 12 & 4 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

Ambas matrices resultaron de orden 2×4 , entonces se pueden sumar

$$\begin{aligned} 3C + 2D &= \begin{bmatrix} 15 & -6 & 18 & -9 \\ -6 & 24 & -21 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -8 & 16 & -10 \\ 12 & 4 & 2 & -14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & -14 & 34 & -19 \\ 6 & 28 & -19 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto, } 3C + 2D = \begin{bmatrix} 13 & -14 & 34 & -19 \\ 6 & 28 & -19 & 10 \end{bmatrix}$$

RPTA: C

4. Dada la siguiente igualdad:

$$3 \begin{bmatrix} m+2 & n \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m-2 & -n \\ y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Determinar el valor de las incógnitas.

- A. $m = -1; n = 2; y = 0$
 B. $m = 0; n = 2; y = 1$
 C. $m = 1; n = 2; y = 7$
 D. $m = 1; n = 2; y = 0$
 E. $m = 1; n = 2; y = -2$

RESOLUCIÓN:

Hacemos las operaciones indicadas

$$3 \begin{bmatrix} m+2 & n \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m-2 & -n \\ y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3m+6 & 3n \\ 3 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m-2 & -n \\ y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m+8 & 4n \\ 3-y & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Entonces por matrices iguales

$$\begin{cases} 2m+8=10 \\ 4n=8 \\ 3-y=3 \end{cases}$$

Para m

$$2m+8=10$$

$$2m=2$$

$$\rightarrow m=1$$

Para n

$$4n=8$$

$$n=2$$

Para y

$$3-y=3$$

$$y=0$$

Los valores de las incógnitas son

$$m=1; n=2; y=0$$

RPTA: D

5. Una empresa de automóviles, dispone de dos plantas de fabricación, una en EE. UU. y otra en Francia; en los que fabrica dos modelos de coches "M1" y "M2", de tres colores diferentes "x", "y", "z". Su capacidad de producción diaria en cada planta está dada por las siguientes matrices ("A" para EE. UU y "B" para Francia).

$$A = \begin{bmatrix} 300 & 95 \\ 250 & 100 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 190 & 90 \\ 200 & 100 \\ 150 & 80 \end{bmatrix}$$

Determinar la representación matricial de la producción total por día.

- A. $\begin{bmatrix} 90 & 185 \\ 450 & 250 \\ 350 & 180 \end{bmatrix}$
 B. $\begin{bmatrix} 490 & 185 \\ 450 & 200 \\ 550 & 170 \end{bmatrix}$
 C. $\begin{bmatrix} 490 & 185 \\ 150 & 252 \\ 350 & 180 \end{bmatrix}$
 D. $\begin{bmatrix} 400 & 185 \\ 450 & 220 \\ 350 & 180 \end{bmatrix}$
 E. $\begin{bmatrix} 490 & 185 \\ 450 & 200 \\ 350 & 180 \end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN:

Por los datos entendemos que producen 2 modelos de autos y de 3 colores

Planta EE. UU

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{M1} & \text{M2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 300 & 95 \\ 250 & 100 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Planta Francia

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{M1} & \text{M2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 190 & 90 \\ 200 & 100 \\ 150 & 80 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Para determinar la producción total de las dos plantas tendríamos que sumar la producción de la planta EE. UU. y la de Francia. Entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} 300 & 95 \\ 250 & 100 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 190 & 90 \\ 200 & 100 \\ 150 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 + 190 & 95 + 90 \\ 250 + 200 & 100 + 100 \\ 200 + 150 & 100 + 80 \end{bmatrix}$$

La producción total es

$$A + B = \begin{bmatrix} 490 & 185 \\ 450 & 200 \\ 350 & 180 \end{bmatrix}$$

RPTA: E

6. Si tenemos la matriz "B", dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Hallar el valor de } \frac{1}{2}B.$$

A. $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -9 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN:

El escalar $\frac{1}{2}$ se multiplica por cada uno de los términos de la matriz $\frac{1}{2} \cdot$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(6) & \frac{1}{2}(-3) & \frac{1}{2}(4) \\ \frac{1}{2}(5) & \frac{1}{2}(-2) & \frac{1}{2}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

RPTA: A

7. Calcular la matriz que resulta de la operación de $3AA^t - 2I$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

A. $\begin{bmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 20 & 51 \\ 51 & -55 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 28 & 51 \\ 52 & 25 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 28 & 51 \\ 41 & 75 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 78 & 54 \\ 51 & 85 \end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN:

Reemplazamos la matriz A en la expresión $3AA^t - 2I$.

Recordemos que I es la matriz identidad del mismo orden que A.

Entonces $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$3AA^t - 2I = 3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (1)$$

Para $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(3) + 1(1) & 3(5) + 1(2) \\ 5(3) + 2(1) & 5(5) + 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{bmatrix}$

Reemplazamos en ... (1)

$$3AA^t - 2I = 3 \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$3AA^t - 2I = \begin{bmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{bmatrix}$$

RPTA: A

8. Determinar los valores de "m" para los cuales $X = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, si se sabe que, $X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$.

A. $m_1 = -2; m_2 = \frac{1}{2}$

B. $m_1 = 2; m_2 = 2$

C. $m_1 = 2; m_2 = 9$

D. $m_1 = -2; m_2 = -\frac{1}{2}$

E. $m_1 = 2; m_2 = \frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN:

Reemplazamos la matriz X

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{5}{2} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \frac{5}{2} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 - \frac{5}{2}m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos igualar:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0$$

$$2m^2 - 5m + 2 = 0$$

Por fórmula cuadrática

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

Entonces los valores que puede tomar "m" son

$$m_1 = \frac{5 + 3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$m_2 = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

RPTA: E

9. Determinar los valores de "x" e "y" en la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A. $x = \frac{1}{4}; y = -\frac{7}{4}$

B. $x = -\frac{5}{4}; y = -\frac{8}{5}$

C. $x = -\frac{5}{4}; y = -\frac{7}{4}$

D. $x = 4; y = -2$

E. $x = -1; y = \frac{7}{4}$

RESOLUCIÓN:

Tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos matrices y obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{bmatrix}$$

Por comparación en matrices iguales

$$x - y = 3 + 2x$$

$$3x + 2y = 3y - 2$$

Entonces transponiendo tenemos un sistema:

$$\begin{cases} x + y = -3 \dots (1) \\ 3x - y = -2 \dots (2) \end{cases}$$

$$4x = -5$$

$$x = -\frac{5}{4}$$

$$x = -\frac{5}{4}$$

Para "y" reemplazamos en (1)

$$-\frac{5}{4} + y = -3$$

$$y = -3 + \frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{7}{4}$$

Por lo tanto, los valores son:

$$x = -\frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{7}{4}$$

10. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, calcular A^{128}

A. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN:

Dada la matriz:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

Entonces:

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

RPTA: C

RPTA: C

2.3 DETERMINANTE E INVERSA DE UNA MATRIZ 2X2

2.3.1 DETERMINANTE DE LA MATRIZ

Es una aplicación a una matriz cuadrada que la convierte en un número real. Se denota así: **$\det(A)$ o $|A|$** :

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ se define su determinante:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

EJEMPLO:

Halla el **$\det(A)$** de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (2)(-5) - (4)(-3) = -10 + 12 = 2$$

Por lo tanto:

$$\det(A) = 2$$

2.3.2 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

- ☞ Si se intercambian las filas por las columnas en un determinante su valor no se altera.
- ☞ Si todos los elementos de una fila o columna son ceros, el determinante vale cero.
- ☞ Si se intercambian 2 filas o 2 columnas continuas en un determinante, el valor de éste cambia de signo.
- ☞ Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales o proporcionales, su determinante es cero.
- ☞ Una matriz cuadrada y su transpuesta tienen la misma determinante.
- ☞ El determinante de una matriz diagonal, triangular inferior o triangular superior es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

2.3.3 INVERSA DE UNA MATRIZ DE ORDEN 2 x 2

Una matriz cuadrada " **A** " es invertible si existe una matriz " **B** " tal que, **$A \cdot B = B \cdot A = I$** ; por lo tanto la matriz " **B** " es la inversa de " **A** ". Se denota así:

$$B = A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = \frac{1}{|A|} (CA)^t$$

EJEMPLO:

Hallar la inversa de **A**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$1.- \det(A) = 13$$

$$2.- \text{adj}(A) = CA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$(CA)^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

3.- Multiplicamos por la inversa de su determinante.

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

➤ PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA

- 1.- $I^{-1} = I$
- 2.- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- 3.- $(A^{-1})^{-1} = A$
- 4.- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcular $\det(A \cdot A^t)$

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

RESOLUCIÓN:

Primero:

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\det(A \times A^t) = 5 \times 1 - 1 \times 1 = 4$$

∴ El valor de la $\det(A \times A^t)$ es 4.

RPTA: D

2. Determinar todos los valores de "m" para que $\det(A) = 0$, si: $A =$

$$\begin{bmatrix} m-1 & -2 \\ 1 & m-4 \end{bmatrix}$$

- A. 2 ó 4
- B. 3 ó 7
- C. 2 ó 3
- D. 7 ó 1
- E. 2 ó 7

RESOLUCIÓN:

Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} m-1 & -2 \\ 1 & m-4 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces:

$$(m-1)(m-4) - (1)(-2) = 0$$

$$(m-1)(m-4) + 2 = 0$$

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$(m-2)(m-3) = 0$$

∴ Los valores de "m" son:

$$m = 2 \vee m = 3$$

RPTA: C

3. El precio de un producto está determinado por el valor de " $\det(A)$ ", siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular el precio del producto (en soles).

- A. 0
- B. -14
- C. -16
- D. 16
- E. 14

RESOLUCIÓN:

Por el método de submatrices o cofactores

Elegimos la fila 3

$$|A| = 0 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2(3 - (-5))$$

$$|A| = -16$$

$$12 + 5,76 = 17,76$$

El precio del producto es " $-\det(A)$ "

Entonces:

$$-\det(A) = -(-16)$$

$\therefore$ El precio del producto es de 16 soles.

RPTA: D

4. La siguiente matriz representa el pago del mes de noviembre del consumo de agua y luz de Mario y Rolando:

	Luz	Agua
Mario	48	8
Rolando	36	12

Para el mes de diciembre, les aumentan un 2% del valor de la determinante de dicha matriz, a cada uno de los servicios mostrados en el gráfico. ¿Cuánto pagará Rolando por el servicio de agua en el mes de diciembre?

- A. 12,20 soles
- B. 17,76 soles
- C. 17,20 soles
- D. 18,20 soles
- E. 10,20 soles

RESOLUCIÓN:

Del enunciado calculamos el valor del determinante:

$$\det(M) = (48)(12) - (36)(8)$$

$$\det(M) = 576 - 288$$

$$\det(M) = 288$$

Haciendo el aumento respectivo:

$$A = 2\% \cdot 288$$

$$A = 5,76$$

Por lo tanto, lo que pagará Rolando por el servicio de agua en el mes de diciembre será de:

5. Calcular el determinante de " A ", si:

$$A = 2C - 3B$$

$$\text{Además, } B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- A. 110
- B. 111
- C. 109
- D. 113
- E. 112

RESOLUCIÓN:

Piden $\det(A)$

Tenemos por dato:

$$A = 2C - 3B$$

Desarrollando:

$$A = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} -8 & -7 \\ 3 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (-8)(-11) - (-7)(3)$$

$$\det(A) = 88 + 21$$

$$\det(A) = 109$$

$\therefore$ El valor de la " $\det(A)$ " es 109

RPTA: B

RPTA: C

6. Sea "A" una matriz cuadrada de orden 3×3 con $\det(A) = -4$.
Calcular el valor de $\det(2A^t(A^2)^{-1})$.

- A. -4
- B. 3
- C. -2
- D. 4
- E. -3

RESOLUCIÓN:

Por dato:

A es una matriz cuadrada de orden 3×3

Además: $\det(A) = -4$

Nos pide: $\det(2A^t(A^2)^{-1})$

Recordemos:

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A); n: \text{orden de } A$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A^t) = \det(A)$$

Sea:

$$x = \det(2A^t(A^2)^{-1})$$

$$x = \det(2A^t) \times \det(A^2)^{-1}$$

$$x = 2^3 \det(A^t) x \frac{1}{\det(A^2)}$$

$$x = 8 \det(A) x \frac{1}{(\det(A))^2}$$

$$x = \frac{8}{\det(A)} = \frac{8}{-4}$$

$$x = -2$$

$\therefore$ El valor de la $\det(2A^t(A^2)^{-1})$ es -2.

7. María tiene " $b^2 - 1$ " años. El valor de "b" es la suma de los valores de "x" e "y", si se sabe que:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 2y \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 60$$

$$\begin{vmatrix} y & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & y^2 + 9y + 26 \end{vmatrix} = -24$$

Calcular la edad de María.

- A. 50 años
- B. 45 años
- C. 63 años
- D. 24 años
- E. 42 años

RESOLUCIÓN:

Se sabe que en el caso de una matriz triangular superior o inferior la determinante es el resultado del producto de la diagonal.

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 2y \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 60$$

$$(3)(x)(x-1) = 60$$

$$x(x-1) = 20$$

Por lo tanto :

$$x = 5; x = -4$$

$$\begin{vmatrix} y & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & y^2 + 9y + 26 \end{vmatrix} = -24$$

RPTA: C

$$(y)(1)(y^2 + 9y + 26) = -24$$

$$y^3 + 9y^2 + 26y + 24 = 0$$

Desarrollamos por Ruffini:

$$(y + 2)(y + 3)(y + 4) = 0$$

Los valores obtenidos de y son:

$$y = -2; y = -3; y = -4$$

Luego, la suma de los valores de " x " e " y " es:

$$x + y = (5 - 4) + (-2 - 3 - 4) = -8$$

Por lo tanto: $b = x + y$

$$b = -8$$

Finalmente la edad de María es:

$$b^2 - 1$$

$$(-8)^2 - 1$$

$$64 - 1$$

$$63$$

Por lo tanto, la edad de María es 63 años.

RPTA: C

8. En una escuela profesional de Matemática, se sabe que, el número de estudiantes es " $2b$ ", el valor de " b " se encuentra en la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & b & b \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Además, se sabe que, $4 \det(A) = -6 \det(A^T)$

Calcular la cantidad de estudiantes de la escuela profesional de Matemática.

- A. 4
- B. 8
- C. 5
- D. 3
- E. 7

RESOLUCIÓN:

De la condición del problema se tiene:

$$4 \det(A) = -6 \det(A^T)$$

$$4 \det(A) = -6 \det(A)$$

$$4 \det(A) + 6 \det(A) = 0$$

$$10 \det(A) = 0$$

$$\det(A) = 0$$

Entonces, aplicando Sarrus:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & b & b \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$0 = 1(b)(9) + (4)(8)(3) + (7)(2)(b) - (3)(b)(7) - (b)(8)(1) - (9)(2)(4)$$

$$0 = 9b + 96 + 14b - 21b - 8b - 72$$

$$0 = -6b + 24$$

$$b = 4$$

Por lo tanto, la cantidad de estudiantes de la escuela profesional de Matemática es " $2b$ "

$$2(4) = 8$$

RPTA: B

9. El precio, por mayor, de un producto de primera necesidad; está determinado por la traza de la inversa de la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

Calcular el precio del producto.

- A. 0,30 soles
- B. 0,22 soles
- C. 0,32 soles
- D. 0,28 soles
- E. 0,33 soles

RESOLUCIÓN:

Calculamos la determinante de la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$
$$\det(A) = (7)(9) - (-2)(5)$$
$$\det(A) = 63 + 10 = 73$$

Ahora calculamos su inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{73} \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9/73 & -5/73 \\ 2/73 & 7/73 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\text{Tr} \, az(A^{-1}) = 9/73 + 7/73 = 16/73 = 0,22$$

∴ El precio del producto es de 0,22 soles.

RPTA: B

2.4 DETERMINANTE E INVERSA DE UNA MATRIZ 3X3

2.4.1 DETERMINANTE DE LA MATRIZ

Es una aplicación a una matriz cuadrada que la convierte en un número real. Se denota así: **$\det(A)$ o $|A|$** :

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, se define:

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

EJEMPLO:

Halla el **$\det(A)$** de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Aplicando la definición:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (1 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot -2 \cdot 1 + 2 \cdot -3 \cdot -1) - (-1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot -2 \cdot -3 + 4 \cdot 5 \cdot 2)$$

$$|A| = (20 - 8 + 6) - (-4 + 6 + 40) = 18 - 42 = -24$$

Por lo tanto:

$$\det(A) = -24$$

2.4.1.1 CÁLCULO DE DETERMINANTES

A. Regla de Sarrus

Se aplica la matriz trasladando las dos primeras columnas a la parte final y se aplican multiplicaciones en dirección de las diagonales, conforme se indica.

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

B. Regla de la Estrella

Se multiplican los elementos siguiendo el esquema:

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

2.4.2 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

- ☞ Una matriz cuadrada y su transpuesta tienen el mismo determinante, es decir $|A| = |A^t|$ siendo A cuadrada.
- ☞ Sean las matrices cuadradas A y B y del mismo orden se tendrá $|AB| = |A| \cdot |B|$
- ☞ Si una matriz cuadrada tiene los elementos de dos filas o dos columnas, respectivamente proporcionales; se dira que su determinante es cero.
- ☞ Si se intercambian dos filas o columnas consecutivas de una matriz cuadrada, su determinante solo cambia de signo.

- ☞ Al sumar una fila o columna a otra fila o columna respectivamente el determinante no varia.
- ☞ El determinante de una matriz diagonal triangular superior o inferior es igual al producto de multiplicar los elementos de la diagonal principal.
- ☞ El determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es igual a cero.
- ☞ Sea A una matriz de orden n ; se cumple que $|kA| = k^n|A|$; k es un escalar.

MATRIZ SINGULAR

Una matriz es singular si su determinante es cero. Si su determinante es diferente de cero se llama matriz no singular.

2.4.3 INVERSA DE LA MATRIZ

Sea A una matriz cuadrada; si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden tal que $AB = BA = I$, definiremos a B como la matriz inversa de A y la denotaremos por A^{-1} , es decir, $B = A^{-1}$.

TEOREMA

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si es una matriz no singular, en tal caso se dice que la matriz es invertible.

2.4.3.1 OBTENCIÓN DE LA MATRIZ INVERSA**A. MATRIZ DE COFACTORES**

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Si A_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} , entonces la matriz:

$$\text{Cof}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

A esta matriz se le llama matriz de cofactores.

B. ADJUNTA DE UNA MATRIZ

A la transpuesta de la matriz de cofactores se le llama adjunta de la matriz A .

$$\Rightarrow \text{Adj } A = [\text{Cof}(A)]^t$$

PROPIEDAD

Sea A una matriz invertible, entonces la matriz inversa está dada por:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

EJEMPLO:

Calcular la inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver, usamos la matriz de cofactores:

$$A_c = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Calculamos:

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$C_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

Luego

$$A_c = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & -11 & 6 \\ 8 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

La matriz **Adj (A)** es la transpuesta de la matriz de cofactores (A_c):

$$\text{Adj } A = A_c^t = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & -11 & -1 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos la determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 28$$

Finalmente, la inversa será:

$$A^{-1} = \frac{1}{28} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 4 & -11 & -1 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{11}{28} & -\frac{1}{28} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

C. MÉTODO DE GAUSS – JORDAN

Consiste en transformar la matriz inicial en una equivalente por medio de las transformaciones elementales, por tanto:

I) Se forma la matriz ampliada compuesta por la matriz **A** y la matriz identidad del mismo orden de **A**, lo cual da como resultado (**A/I**).

II) Se efectúan las operaciones solo por filas en toda la matriz ampliada, de manera que A se transforme en una matriz identidad. La matriz resultante presentará la forma (**I/A⁻¹**) de donde **A⁻¹** se puede leer a la derecha de la línea punteada.

$$(A:I) \xrightarrow{O.E.F.} (I:B) \rightarrow A^{-1} = B$$

EJEMPLO:

Calcular la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

La idea es reducir **A** hacia la matriz identidad por operaciones sobre filas y, simultáneamente aplicar estas operaciones a **I** para producir **A⁻¹**

Formamos la matriz ampliada, adjuntando la matriz identidad a la derecha de **A**.

Aplicamos las operaciones sobre las filas a ambos lados, hasta que el lado izquierdo se reduce a **I**.

La matriz final tendrá la forma [**I: A⁻¹**]

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{f_2-2f_1 \\ f_3-f_1}]{\text{A la fila 2 le restamos dos veces la fila 1 y a la fila 3 le restas la fila 1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_3+2f_2} \text{A la fila 3 le sumas dos veces la fila 2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-f_3} \text{multiplicamos la fila 3 por } -1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & : & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{f_2+3f_3 \\ f_1-3f_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & : & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & : & 0 & -5 & -4 \end{array} \right]$$

A la fila 2 le sumas tres veces la fila 3 y a la fila 1 le restas tres veces la fila 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & : & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & : & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1-2f_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & : & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & : & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

A la fila 1 le restas dos veces la fila 2

Por lo tanto, la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES

Sean A y B matrices cuadradas no singulares y un escalar distinto de cero.

- 1) $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$
- 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 3) $(A^{-1})^{-1} = A$
- 4) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$
- 5) $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$
- 6) Si $A \times A^t = I$, se dice que A es ortogonal.
- 7) $(I^{-1})^{-1} = I$
- 8) $(A^\lambda)^{-1} = (A^{-1})^\lambda$
- 9) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Calcular:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

- A. 0
B. 1
C. 5
D. 10
E. 9

RESOLUCIÓN:

Por propiedades:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2+1 \\ 4 & 5 & 5+1 \\ 7 & 8 & 8+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0 + \begin{vmatrix} 1 & 1+1 & 1 \\ 4 & 4+1 & 1 \\ 7 & 7+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Luego:

$$|A| = 0$$

RPTA: A

2. Calcular:

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

- A. 52
B. -4
C. -52
D. 4
E. -26

RESOLUCIÓN

Por la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc}
 4 & -5 & 2 \\
 3 & 1 & -1 \\
 -2 & 3 & -4 \\
 4 & -5 & 2 \\
 3 & 1 & -1
 \end{array}$$

Por los productos

$$-16 + 18 - 10 + 4 + 12 - 60$$

$$\therefore -52$$

RPTA: C**NOTA:**

Determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 a & b & c & d \\
 a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\
 a^3 & b^3 & c^3 & d^3
 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

3. Si el valor del determinante

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$$

Calcular el valor de:

$$B = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$$

- A. 25
B. 100
C. 200
D. 50
E. 150

RESOLUCIÓN:

Como las filas tienen como factor común el valor 2, se tiene:

$$B = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & c & b \\ u & w & v \\ p & r & q \end{vmatrix}$$

Intercambiamos las columnas dos y tres

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & c & b \\ u & w & v \\ p & r & q \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

Intercambiamos las filas dos y tres

$$\begin{aligned}
 &= -8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-1)(8) \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} \\
 &= 8 \cdot 25 = 200
 \end{aligned}$$

RPTA: C

4. Hallar la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

- A. $\begin{pmatrix} 25 & 7 & -1 \\ -9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix}$
 B. $\frac{1}{54} \begin{pmatrix} 25 & 7 & -1 \\ -9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 25 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & -14 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$
 D. $\frac{1}{54} \begin{pmatrix} 25 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & -14 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$
 E. $\begin{pmatrix} 25 & 9 & 4 \\ 7 & 9 & -14 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

Calculamos el determinante:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 54$$

Calculamos la matriz adjunta:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 25 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & -14 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos su transpuesta:

$$(\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 25 & 7 & -1 \\ -9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

La inversa viene dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Adj } A)^t$

$$A^{-1} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 25 & 7 & -1 \\ -9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

5. ¿Para qué valores de x la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

no admite matriz inversa?

- A. $\mathbb{R}$
- B. $\mathbb{R}^+$
- C. $\mathbb{R}^-$
- D. 0
- E. no tiene inversa

RESOLUCIÓN

Calculamos el determinante reduciendo los cálculos a partir de la tercera columna

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = x$$

Una matriz no posee inversa si su determinante es cero. Así, la matriz A no tiene inversa cuando $x = 0$.

RPTA: D

6. ¿Para qué valores de m la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

no admite matriz inversa?

- A. $\mathbb{R}$
- B. $\mathbb{R}^+$
- C. $\mathbb{R}^-$
- D. $\mathbb{R}_0^+$
- E. $\mathbb{R}_0^-$

RPTA: B**RESOLUCIÓN:**

Calculamos el determinante

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -m^2 - 7$$

Una matriz no posee inversa si su determinante es cero. El determinante $-m^2 - 7$ siempre es negativo para cualquier valor real de m . Así, la matriz A siempre posee inversa, independientemente del valor real de m .

RPTA: A

7. Resolver la ecuación matricial: $A \cdot X + 2B = 3C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- A. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- E. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

El determinante de A es distinto de cero, por lo que existe su inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación

$$A \cdot X + 2B = 3C$$

$$A \cdot X + 2B - 2B = 3C - 2B$$

$$A \cdot X = 3C - 2B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (3C - 2B)$$

$$X = A^{-1} \cdot (3C - 2B)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left[3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

RPTA: E

8. Dada la matriz A tal que:

$$|A| = \begin{vmatrix} x^2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ y & x-2 & -5 \end{vmatrix}$$

Si su traza es 1 y el producto de sus elementos de la diagonal secundaria es -16 . Hallar su determinante ($x > 0$).

- A. 8
- B. -36
- C. 0
- D. 40
- E. 80

RESOLUCIÓN:

Por dato de la traza, tenemos:

$$\text{traz}(A) = x^2 + 2 - 5 = 1$$

$$x^2 = 4$$

Pero como $x > 0$, entonces $x = 2$

Por dato del producto de la diagonal secundaria, tenemos:

$$y \times 2 \times 1 = -16 \rightarrow y = -8$$

Entonces se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -8 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

De ahí que:

$$|A| = -40 - 32 + 0 - (-16) - 0 - (-10) = -72 + 36 = -36$$

RPTA: B

RUNSA
Nueva Imagen

2.5 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS Y TRES VARIABLES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS O TRES VARIABLES

Es un conjunto formado por dos o mas ecuaciones lineales que se verifican simultáneamente para un mismo conjunto de valores atribuidos a sus letras o incógnitas.

$$\begin{cases} ax + by = c \dots\dots (1) \\ dx + ey = f \dots\dots (2) \end{cases} \quad \begin{cases} ax + by + mz = c \dots\dots (1) \\ dx + ey + nz = f \dots\dots (2) \\ gx + hy + pz = i \dots\dots (3) \end{cases}$$

$C.S. = \{(x; y)\}$ $C.S. = \{(x; y; z)\}$

TIPOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

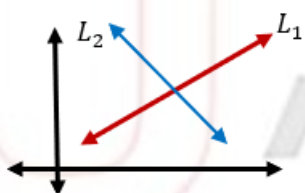
$$\begin{cases} ax + by = c \dots\dots (1) \\ dx + ey = f \dots\dots (2) \end{cases}$$

SISTEMAS COMPATIBLES

DETERMINADO

Es cuando tiene solución única, se verifica:

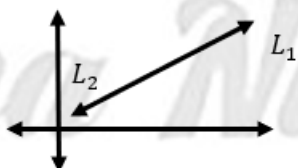
$$a.e \neq bd$$



INDETERMINADO

Es cuando tiene infinitas soluciones, se verifica:

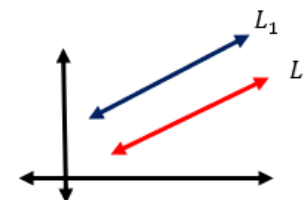
$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$



SISTEMAS INCOMPATIBLES

Es cuando no tiene solución, se verifica:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$$



2.5.1 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN PARA SISTEMAS DE ECUACIONES CON DOS O TRES VARIABLES

Para un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres variables se pueden aplicar varios métodos:

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

REDUCCIÓN: Consiste en multiplicar a dos ecuaciones por números para que al sumarlas se elimine una variable y se obtenga una ecuación con una sola variable.

EJEMPLO: Hallar los valores de "x" e "y" mediante el método de reducción:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 300x + 50y = 23000 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} (-50) & \begin{array}{l} x + y = 50 \\ 300x + 50y = 23000 \\ \hline -50x - 50y = -2500 \\ 300x + 50y = 23000 \\ \hline x = 82 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{reemplazando} \\ y = -32 \end{array}$$

SUSTITUCIÓN

Consiste en despejar cualquier variable de una ecuación y reemplazar en la otra.

EJEMPLO: $\begin{cases} x + y = 12 \dots (I) \\ x - 3y = 0 \dots (II) \end{cases}$

Despejando x ; Reemplazando en I :

$$x = 3y \rightarrow 3y + y = 12 \rightarrow y = 3$$

IGUALACIÓN: Consiste en despejar una misma variable de las dos ecuaciones y luego igualarlas.

EJEMPLO: $\begin{cases} x + y = 12 \dots (I) \\ \frac{x}{2} - 2y = 0 \dots (II) \end{cases}$

Despejando " x " en (I) y (II)

$$x = 12 - y \quad x = 4y$$

$$\text{Igualamos: } 12 - y = 4y \rightarrow y = \frac{12}{5}$$

$$\text{Luego reemplazamos: } x = 4y \rightarrow x = 4\left(\frac{12}{5}\right) \rightarrow x = \frac{48}{5}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. En la sala de ventas, Bruno, contó que el doble del número de autos más el triple de motocicletas es 280. Si la diferencia entre el número de llantas de autos y de motos es 240. ¿Cuántos móviles hay en la tienda?

- A. 80
- B. 90
- C. 120
- D. 124
- E. 132

RESOLUCIÓN:

Número de autos: x

Número de motocicletas: y

Del enunciado:

$$2x + 3y = 280 \dots \dots \dots (ec. I)$$

Además:

$$4x - 2y = 240$$

Simplificamos:

$$2x - y = 120 \dots \dots \dots (ec. II)$$

Por sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 280 \dots \dots \dots (ec. I) \\ 2x - y = 120 \dots \dots \dots (ec. II) \end{cases}$$

Restamos $I - II$

$$\begin{aligned} 4y &= 160 \\ y &= 40 \end{aligned}$$

Reemplazamos en $ec. I$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 280 \\ 2x + 3(40) &= 280 \\ 2x &= 280 - 120 \\ 2x &= 160 \\ x &= 80 \end{aligned}$$

Finalmente, el número de móviles será 120

RPTA: C

2. El precio de un cuaderno es de $S/20$ menos que el precio de un libro. Si a la tercera parte del precio del cuaderno se le disminuye

$S/4$, se obtiene la sexta parte del precio del libro. Hallar la suma de cifras del precio del libro.

- A. 12
- B. 9
- C. 8
- D. 10
- E. 7

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

Precio del libro: $x + 20$

Precio del cuaderno: x

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{x}{3} - 4 &= \frac{x + 20}{6} \\ \frac{x - 12}{3} &= \frac{x + 20}{6} \\ \frac{x - 12}{x - 12} &= \frac{6}{x + 20} \\ \frac{1}{2x - 24} &= \frac{2}{x + 20} \\ 2x - 24 &= x + 20 \\ x &= 44\end{aligned}$$

El precio del libro será $S/64$

Nos pide la suma de cifras, por tanto, sería 10

RPTA: D

3. Sean " x " e " y ", dos números positivos que satisfacen las condiciones:

$$\begin{cases} \sqrt{xy} = 18 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 8 \end{cases}$$

Determinar el valor de $\sqrt{x + y}$

- A. 10
- B. $\sqrt{8}$
- C. 9
- D. 8
- E. $\sqrt{10}$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, la siguiente elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - \sqrt{y} &= 8 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &= (8)^2 \\ x + y - 2\sqrt{xy} &= 64 \\ x + y - 2(18) &= 64 \\ x + y &= 64 + 36 \\ x + y &= 100\end{aligned}$$

Nos pide:

$$\begin{aligned}\sqrt{x + y} \\ \sqrt{100} &= 10\end{aligned}$$

RPTA: A

4. Un paciente necesita 65 u de proteínas y 45 u de carbohidratos. En el mercado de su barrio encontró dos tipos de alimentos; el del tipo "A" que contiene 3 u de proteínas y 2 u de carbohidratos, el del tipo "B" que contiene 4 u de proteínas y 3 u de carbohidratos. ¿Cuántos alimentos del tipo "B" comprará?

- A. 12
- B. 10
- C. 5
- D. 8
- E. 6

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado, ordenamos en una tabla:

	Proteínas	Carbohidratos
Tipo "A"	3	2
Tipo "B"	4	3
Totales	65	45

Número de alimentos:

Tipo "A": x

Tipo "B": y

Planteamos nuestro sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 65 \\ 2x + 3y = 45 \end{cases}$$

Eliminamos " x "

$$\begin{aligned} -2 \begin{cases} 3x + 4y = 65 \\ 2x + 3y = 45 \end{cases} \\ \begin{cases} -6x - 8y = -130 \\ 6x + 9y = 135 \end{cases} \end{aligned}$$

Sumamos miembro a miembro:

$$y = 5$$

Por tanto, se compraron 5 alimentos del tipo "B"

RPTA: C

5. Calcular " $m + n$ ", para que en el sistema adjunto en " x " e " y ", tenga infinitas soluciones.

$$\begin{cases} nx + my = n \\ (m^2 - 2n + 12)x + y = 3 \end{cases}$$

- A. 16
- B. 10
- C. 14
- D. 12
- E. 8

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, por propiedad:

$$\frac{n}{m^2 - 2n + 12} = \frac{m}{1} = \frac{n}{3}$$

De la ecuación:

$$\frac{m}{1} = \frac{n}{3} \\ n = 3m$$

Comparamos la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{n}{m^2 - 2n + 12} &= \frac{n}{3} \\ m^2 - 2n + 12 &= 3 \\ m^2 - 2(3m) + 9 &= 0 \\ m^2 - 6m + 9 &= 0 \\ (m - 3)^2 &= 0 \\ m &= 3 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} n &= 3m \\ n &= 3(3) \\ n &= 9 \end{aligned}$$

Nos pide:

$$m + n = 12$$

RPTA: D

6. Al resolver el sistema:

$$\begin{cases} x\sqrt{\frac{x}{y}} + y\sqrt{\frac{y}{x}} = 34 \\ x - y = 12 \end{cases}$$

Se puede obtener soluciones enteras para " x " y para " y ". Determinar el valor de " y ".

- A. 16
- B. 8

- C. 4
D. 2
E. 1

Recordemos: $x - y = 12$

Por tanto: $x = 16$ e $y = 4$

RPTA: C

RESOLUCIÓN:

De nuestra ecuación, multiplicamos por $\sqrt{xy}$

$$x \sqrt{\frac{x}{y}} + y \sqrt{\frac{y}{x}} = 34$$

$$\left(x \sqrt{\frac{x}{y}} + y \sqrt{\frac{y}{x}} \right) (\sqrt{xy}) = 34(\sqrt{xy})$$

$$x^2 + y^2 = 34\sqrt{xy}$$

Además:

$$x - y = 12$$

$$(x - y)^2 = 12^2$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 144$$

Reemplazamos:

$$34\sqrt{xy} - 2xy = 144$$

$$17\sqrt{xy} - xy = 72$$

$$0 = xy - 17\sqrt{xy} + 72$$

$$0 = \sqrt{xy}^2 - 17\sqrt{xy} + 72$$

Por aspa simple:

$$0 = (\sqrt{xy} - 9)(\sqrt{xy} - 8)$$

$$\sqrt{xy} = 9$$

$$xy = 81$$

Recordemos: $x - y = 12$

De aquí " x " e " y " $\notin \mathbb{Z}$

Entonces, solo nos quedaría:

$$\sqrt{xy} = 8$$

$$xy = 64$$

7. Del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - a = 0 \\ x^2 + x + b = 0 \end{cases}$$

Sea " r " una raíz común y sabiendo que: $a + b = 3$; entonces, el módulo de la suma de las otras raíces es:

- A. 9
B. 7
C. 3
D. 5
E. 0

RESOLUCIÓN:

Si una raíz común es " r ", entonces:

$$\begin{cases} r^2 + 2r - a = 0 \\ r^2 + r + b = 0 \end{cases}$$

Cambiamos de signo:

$$\begin{cases} r^2 + 2r - a = 0 \\ -r^2 - r - b = 0 \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro:

$$r = a + b$$

$$r = 3$$

Reemplazamos en cada una de las ecuaciones:

$$x^2 + 2x - a = 0$$

$$3^2 + 2(3) - a = 0$$

$$a = 15$$

$$x^2 + x + b = 0$$

$$3^2 + 3 + b = 0$$

$$b = -12$$

Finalmente, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 15 &= 0 \\(x - 3)(x + 5) &= 0 \\x &= 3 \vee x = -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + x - 12 &= 0 \\(x - 3)(x + 4) &= 0 \\x &= 3 \vee x = -4\end{aligned}$$

Nos pide:

$$|-5 + (-4)| = 9$$

RPTA: A

8. En una granja hay gallinas, pavos y cerdos. Hay 5 animales entre pavos y gallinas, 7 animales entre pavos y cerdos, y 8 animales entre gallinas y cerdos. Hallar la cantidad total de animales en dicha granja.

- A. 8
- B. 16
- C. 15
- D. 10
- E. 18

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado:

$$\begin{aligned}p + g &= 5 \\p + c &= 7 \\g + c &= 8\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro

$$\begin{aligned}2p + 2g + 2c &= 20 \\p + g + c &= 10\end{aligned}$$

Entonces, hay 10 animales en total.

RPTA: D

9. El ahorro diario que me propuse de hoy en adelante (en soles), es el valor numérico de la variable “x” obtenido del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - z = 1 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

¿Cuánto voy a ahorrar en el mes de noviembre?

- A. S/31
- B. S/30
- C. S/62
- D. S/60
- E. S/90

RESOLUCIÓN:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \dots\dots\dots ec(1) \\ 2x - z = 1 \dots\dots\dots ec(2) \\ 2x - 2y = 4 \dots\dots\dots ec(3) \end{cases}$$

De (1) y (2), eliminamos la variable z

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \dots\dots\dots (1) \\ 2x - z = 1 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Obtenemos: $3x + 2y = 1 \dots\dots\dots ec(4)$

Finalmente, de (4) y (3), sumando miembro a miembro

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \dots\dots\dots (4) \\ 2x - 2y = 4 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

Obtenemos: $5x = 5$

$$x = 1$$

Mi ahorro diario, equivale a S/ 1

∴ El mes de noviembre tiene 30 días, por lo tanto, ahorraría 30 soles.

RPTA: B

2.6 SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES

Recibe este nombre a un conjunto de inecuaciones, las cuales se verifican para los mismos valores numéricos de sus incógnitas; como ejemplo podemos tomar las referencias:

A. Sistema de inecuaciones lineales con una sola incógnita:

Es de la forma:
$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$$

La solución de estos sistemas se obtiene resolviendo por separado cada una de las inecuaciones que lo componen y hallando los valores comunes a las soluciones encontradas.

El número de inecuaciones que pueden presentarse es cualquier número mayor a o igual que dos.

Así, por ejemplo, para hallar el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} x + 4 < 1 \\ 1 - 2x \geq 3 \end{cases}$$
 aplicamos lo siguiente:

✓ Resolvemos la primera inecuación:

$$x + 4 < 1 \Leftrightarrow x < 1 - 4 \Leftrightarrow x < -3 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty; -3 \rangle$$

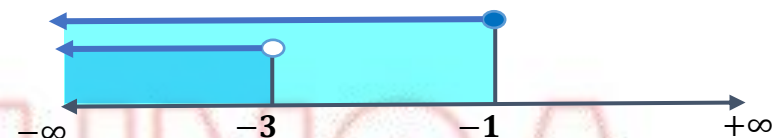
✓ La segunda ecuación nos da:

$$1 - 2x \geq 3 \Leftrightarrow 1 - 3 \geq 2x \Leftrightarrow -2 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq -1 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty; -1 \rangle$$

Por tanto, la solución de ambas inecuaciones es:

$$S = \langle -\infty; -3 \rangle \cap \langle -\infty; -1 \rangle = \langle -\infty; -3 \rangle$$

Gráficamente:

**B. Sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas:**

Es de la forma:
$$\begin{cases} ax + by + c > 0 \\ dx + cy < 0 \\ fx > 0 \end{cases}$$

El signo $>$ o $<$ pueden ser sustituido por $\geq$ o $\leq$.

Un punto $(x_0; y_0)$ es solución del sistema si lo es de cada una de las inecuaciones.

El conjunto de soluciones viene dado por la región del plano común a las regiones solución de cada una de las inecuaciones. Por tanto, se debe resolver cada inecuación del sistema por separado y a continuación hallar la región del plano común a todas esas inecuaciones.

Así por ejemplo si tenemos el sistema
$$\begin{cases} 2x + y > 4 \\ x - 2y < 8 \end{cases}$$

De los puntos $P(1; 2)$, $Q(4; 1)$, $R(6; 2)$ y $S(2; -4)$ indica los que sean solución.

Para hallar el conjunto de soluciones de $2x + y > 4$, representamos la recta $2x + y = 4$, la cual tiene a $(0; 4)$ y $(2; 0)$ como puntos.

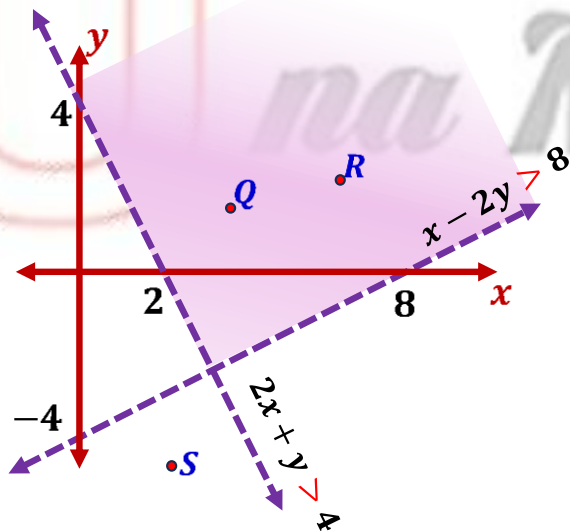
El conjunto de soluciones de $2x + y > 4$ es el semiplano a la derecha de la recta.

Para la segunda inecuación, $x - 2y < 8$, representamos $x - 2y = 8$, que tiene por puntos $(0; -4)$ y $(8; 0)$.

El conjunto de soluciones de $x - 2y < 8$ es el semiplano superior.

La solución del sistema es la porción de plano común a los semiplanos indicados.

A esa región pertenecen los puntos Q y R dados.



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Resolver la inecuación $\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$, ¿cuál de los puntos es solución del sistema?

- A. $(1; 1)$
- B. $(-2; 2)$
- C. $(1; 1/4)$
- D. $(4; 4)$
- E. $(1/7; 2/3)$

RESOLUCIÓN:

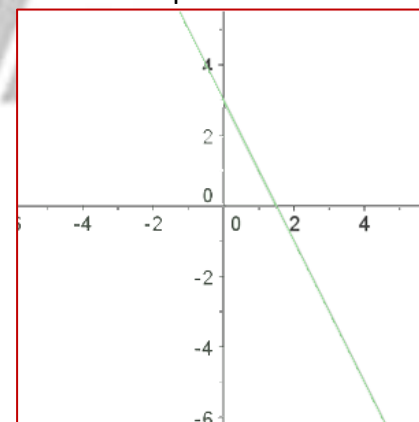
De la expresión, transformamos la primera desigualdad en igualdad $2x + y = 3$

A una de las dos variables le damos dos valores y los sustituimos en la igualdad anterior para obtener dos puntos A_1, B_1

$$x = 0 \rightarrow 2(0) + y = 3 \rightarrow y = 3 \rightarrow A_1 = (0; 3)$$

$$x = 1 \rightarrow 2(1) + y = 3 \rightarrow y = 1 \rightarrow B_1 = (1; 1)$$

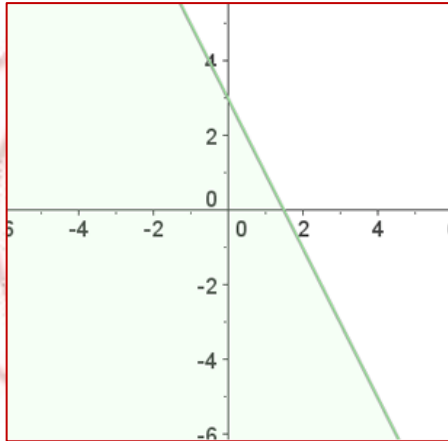
Al representar y unir estos dos puntos obtenemos una recta:



Tomamos un punto arbitrario, por ejemplo, el $(0; 0)$ y lo sustituimos en la desigualdad. Si se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la solución será el otro semiplano

$$(0; 0) \rightarrow 2(0) + 0 \leq 3 \rightarrow 0 \leq 3$$

Como se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra $(0; 0)$ incluida la recta.



Representamos la región solución de la segunda inecuación.

Transformamos la desigualdad en igualdad $x + y = 1$

Damos a una de las dos variables dos valores para obtener dos puntos

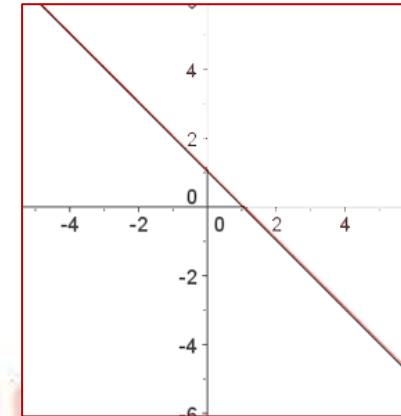
A_2, B_2

Ahora

$$x = 0 \rightarrow 0 + y = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow A_2 = (0; 1)$$

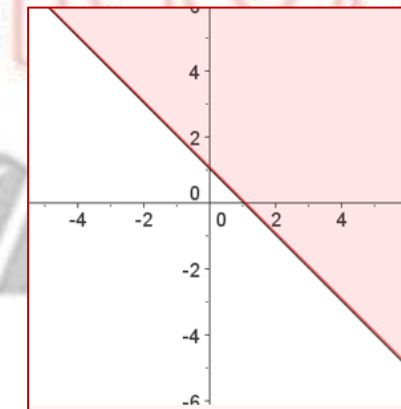
$$x = 1 \rightarrow 1 + y = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow B_2 = (1; 0)$$

Al representar y unir estos dos puntos obtenemos una recta.

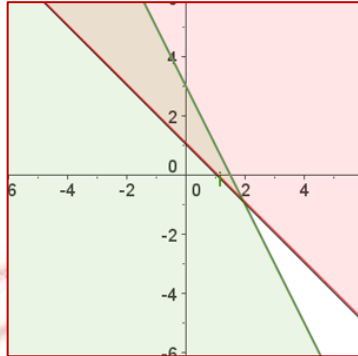


Sustituimos el punto $(0; 0)$ en la desigualdad para verificar si la satisface: $(0; 0) \rightarrow 0 + 0 \geq 1 \rightarrow 0 \geq 1$

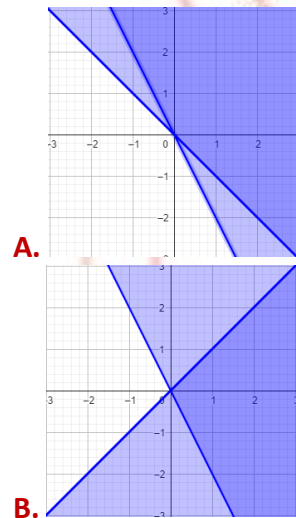
Como no se cumple, la solución es el semiplano donde no se encuentra $(0; 0)$ incluida la recta



La solución del sistema de inecuaciones es la intersección de las dos regiones soluciones.

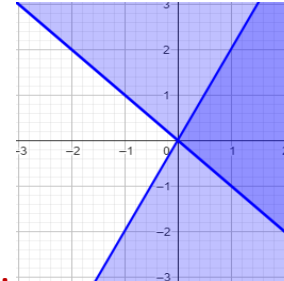


2. Al resolver el siguiente sistema $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$ es:

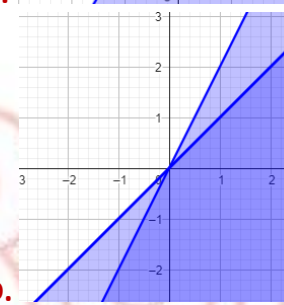


RPTA: D

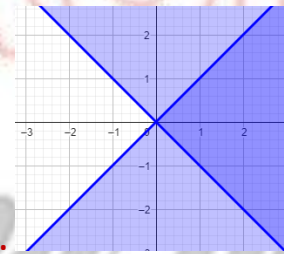
C.



D.



E.



RESOLUCIÓN:

Representamos la región solución de la primera inecuación.

Transformamos la desigualdad en igualdad $x + y = 0$

Sustituimos dos valores de la variable x en la igualdad anterior, con ello obtenemos dos puntos A_1, B_1 .

$$x = 0 \rightarrow 0 + y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow A_1 = (0; 0)$$

$$x = 1 \rightarrow 1 + y = 1 \rightarrow y = -1 \rightarrow B_1 = (1; -1)$$

Al representar y unir estos puntos obtenemos una recta.

Tomamos un punto arbitrario que no esté en la recta, por ejemplo, el $(1;0)$ y lo sustituimos en la desigualdad. Si se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la solución será el otro semiplano

También:

$(1;0)$

$(1;0) \rightarrow 1 + 0 \geq 0 \rightarrow 1 \geq 0$

Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto $(1;0)$ incluida la recta



Representamos la región solución de la segunda inecuación.

Transformamos la desigualdad en igualdad $2x - y = 0$

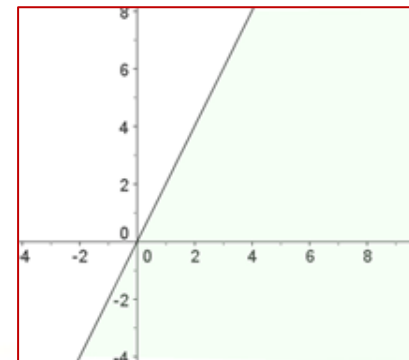
Sustituimos dos valores de la variable x en la igualdad anterior, con ello obtenemos dos puntos A_2, B_2 .

$x = 0 \rightarrow 2(0) - y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow A_2 = (0;0)$

$x = 1 \rightarrow 2(1) - y = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B_2 = (1;2)$

Tomamos un punto arbitrario que no esté en la recta, por ejemplo, el $(1;0)$ y lo sustituimos en la desigualdad $(1;0) \rightarrow 2(1) - 0 \geq 0 \rightarrow 2 \geq 0$

Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto $(1;0)$ incluida la recta.



La solución del sistema de inecuaciones es la intersección de las regiones soluciones.



RPTA: A

3. Determinar el conjunto solución de la expresión: $\begin{cases} 2x + 3 \geq 1 \\ -x + 2 \geq -1 \end{cases}$

- A. $[1; 3]$.
- B. $[-1; -3]$.
- C. $[1; -3]$.
- D. $[-1; 3]$.
- E. $[-3; 1]$.

RESOLUCIÓN:

Resolvemos la primera inecuación $2x + 3 \geq 1$

Restamos 3 en ambos lados de la desigualdad y obtenemos

$$2x + 3 - 3 \geq 1 - 3$$

$$2x \geq -2$$

$$x \geq -1$$

Resolviendo la segunda inecuación, obtenemos:

$$-x + 2 \geq -1$$

$$-x + 2 - 2 \geq -1 - 2$$

$$-x \geq -3$$

$$x \leq 3$$

Representamos gráficamente las soluciones



La solución del sistema de inecuaciones es la intersección de las dos soluciones, es decir todos los puntos que son comunes a ambas, esto es, $[-1; 3]$.

RPTA: D

4. El conjunto solución del sistema $\begin{cases} 2x + 3 \geq 1 \\ -x + 2 < -1 \end{cases}$ es:

- A. $\langle 1; +\infty \rangle$
- B. $\langle 3; +\infty \rangle$
- C. $\langle 1; 3 \rangle$
- D. $[-1; +\infty \rangle$
- E. $[3; +\infty \rangle$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo la primera inecuación, tenemos:

$$2x + 3 \geq 1$$

$$2x \geq -2$$

$$x \geq -1$$

Resolviendo la segunda inecuación:

$$-x + 2 < -1$$

$$-x < -3$$

$$x > 3$$

Graficando, tenemos:



La solución del sistema de inecuaciones es la intersección de las dos soluciones, es decir todos los puntos que son comunes a ambas. Notamos que $x=3$ es un punto que pertenece a la solución de la primera inecuación, pero no pertenece a la de la segunda, por tanto, $x=3$ es el extremo inferior del intervalo abierto solución

$$C.S. = \langle 3; +\infty \rangle$$

RPTA: B

5. ¿Cuál es el conjunto solución de $\begin{cases} 10(x + 1) + x \leq 6(2x + 1) \\ 4(x - 10) < -6(2 - x) - 6x \end{cases}$?

- A. $\langle 4; 7 \rangle$
- B. $\langle 4; 7]$
- C. $[4; 7)$
- D. $\langle -4; 7 \rangle$
- E. $[4; 7]$

RESOLUCIÓN:

Resolvemos la primera inecuación, para lo cual realizamos las multiplicaciones y simplificamos las operaciones

$$10(x + 1) + x \leq 6(2x + 1)$$

$$10x + 10 + x \leq 12x + 6$$

$$11x + 10 \leq 12x + 6$$

$$4 \leq x$$

$$x \geq 4$$

Resolviendo la segunda ecuación:

$$4(x - 10) < -6(2 - x) - 6x$$

$$4x - 40 < -12 + 6x - 6x$$

$$4x - 40 < -12$$

$$4x < 28$$

$$x < 7$$

Representamos gráficamente:



La solución del sistema de inecuaciones es la intersección de las dos soluciones anteriores, es decir todos los puntos que son comunes a ambas. Notamos que $x=7$ es un punto que pertenece a la solución de la primera inecuación, pero no pertenece a la de la segunda, por tanto, $x=7$ es el extremo superior del intervalo solución mientras que $x=4$ es el extremo inferior.

$$C.S. = [4; 7)$$

RPTA: C

6. El punto que pertenece a la solución del sistema $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$ es:

A. $(-3; 1)$

B. $(1; 6)$

C. $(2; 6)$

D. $(2; -6)$

E. $(3; 1)$

RESOLUCIÓN:

Representamos la región solución de la primera inecuación, convirtiéndola en igualdad.

$$x + y = 0$$

Consideramos dos valores para la variable x , con lo que obtenemos dos puntos A_1, B_1

$$x = 0 \rightarrow 0 + y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow A_1 = (0; 0)$$

$$x = 1 \rightarrow 1 + y = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow B_1 = (1; -1)$$

Al representar y unir estos puntos obtenemos una recta.

Tomamos un punto arbitrario que no esté en la recta, por ejemplo, el $(1; 0)$ y lo sustituimos en la desigualdad. Si se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la solución será el otro semiplano

$$(1; 0) \rightarrow 1 + 0 \geq 0 \rightarrow 1 \geq 0$$

Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto $(1; 0)$ incluida la recta.



Representamos la región solución de la segunda inecuación, convirtiéndola en igualdad.

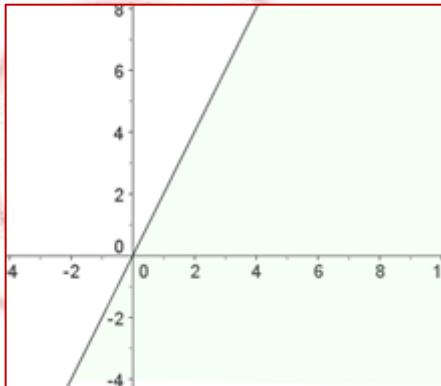
$$2x - y = 0$$

Consideramos dos valores para la variable x , con lo que obtenemos dos puntos A_2, B_2

$$x = 0 \rightarrow 2(0) - y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow A_2 = (0; 0)$$

$$x = 1 \rightarrow 2(1) - y = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B_2 = (1; 2)$$

Tomamos un punto arbitrario que no esté en la recta, por ejemplo, el $(1;0)$ y lo sustituimos en la desigualdad $(1; 0) \rightarrow 2(1) - 0 \geq 0 \rightarrow 2 \geq 0$. Como se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto $(1;0)$ incluida la recta.



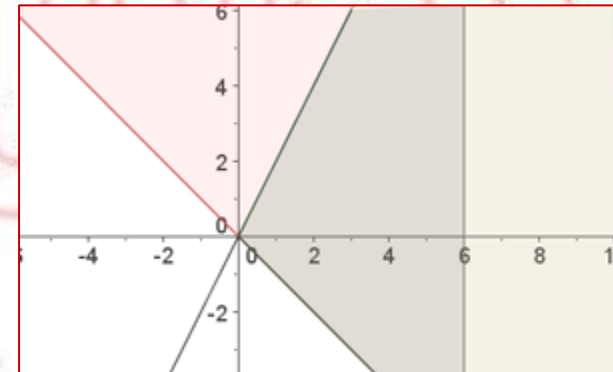
Representamos la región solución de la tercera inecuación, como en los casos anteriores lo convertimos a una igualdad, teniendo:

$$x = 6$$

Consideramos un valor de x que no esté en la recta, por ejemplo 2 y lo sustituimos en la desigualdad $x = 2 \rightarrow 2 \leq 6$. Como se cumple la desigualdad la solución es el semiplano donde se encuentra el valor 2



La solución es la intersección de las gráficas, entonces:



De la gráfica se deduce que $(3;1)$ pertenece a la solución del sistema.

RPTA:E

7. Una compañía fabrica y venden dos modelos de lámpara L_1 y L_2 . Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L_1 y de 30 minutos para el L_2 ; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el modelo L_1 y de 10 minutos para L_2 . Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 y 10 soles para L_1 y L_2 , respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

- A. 2750 soles
- B. 3050 soles
- C. 3600 soles
- D. 3750 soles
- E. 2000 soles

RESOLUCIÓN:

Sea del problema:

x = nº de lámparas L_1

y = nº de lámparas L_2

Sea entonces mi función objetivo: $f(x; y) = 15x + 10y$

Pasando el tiempo a horas, se tiene:

20 min = $\frac{1}{3}$ h

30 min = $\frac{1}{2}$ h

10 min = $\frac{1}{6}$ h

Convirtiendo mis datos en una tabla:

	L_1	L_2	Tiempo
Manual	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	100
Máquina	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	80

De ahí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y &\leq 100 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y &\leq 80 \end{aligned}$$

Como el número de lámparas son números naturales, tendremos dos restricciones más:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Hallando el conjunto de soluciones factibles:

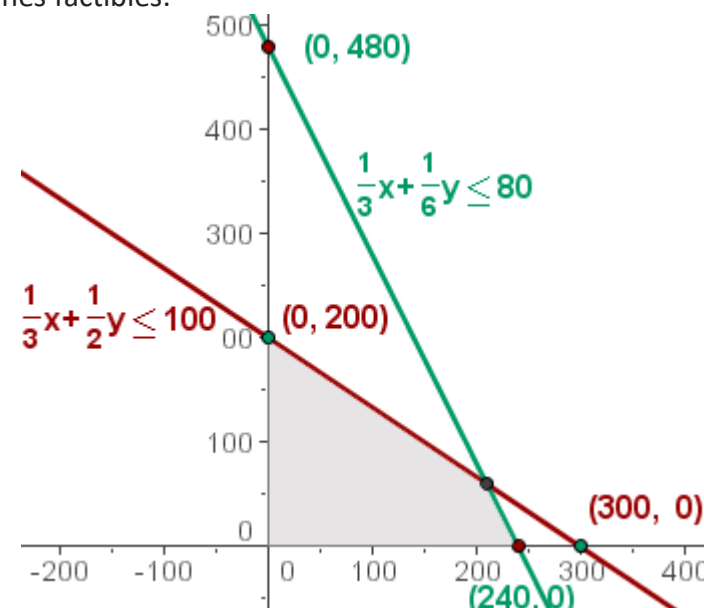
Tenemos que representar gráficamente las restricciones, pero sabemos que como $x \geq 0, y \geq 0$ trabajaremos en el primer cuadrante.

Representamos las rectas, a partir de sus puntos de corte con los ejes.

Resolvemos gráficamente la inecuación: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y \leq 100$. Para ello tomamos un punto (0;0)

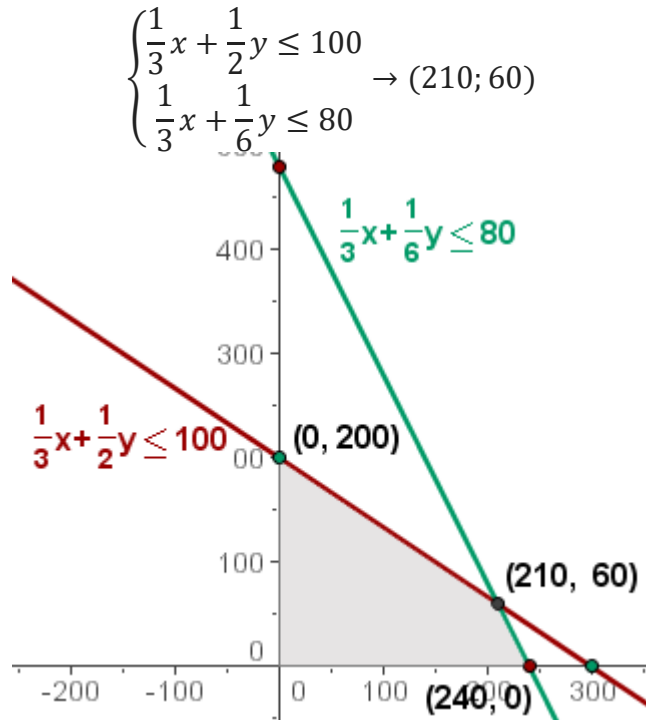
$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{2}(0) &\leq 100 \\ \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{6}(0) &\leq 80 \end{aligned}$$

La zona de intersección de las soluciones de las inecuaciones sería la solución al sistema de inecuaciones, que constituye el conjunto de las soluciones factibles.



La solución óptima si es única se encuentra en un vértice del recinto. Estos son las soluciones a los sistemas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y &\leq 100; x = 0 \rightarrow (0; 200) \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y &\leq 80; y = 0 \rightarrow (240; 0) \end{aligned}$$



En la función objetivo sustituimos cada uno de los vértices.

$$f(0; 200) = 15(0) + 10(200) = 2000$$

$$f(240; 0) = 15(240) + 10(0) = 3600$$

$$f(210; 60) = 15(210) + 10(60) = 3750$$

La solución óptima es fabricar 210 del modelo L_1 y 60 del modelo L_2 para obtener un beneficio de 3750 soles.

RPTA: D

RUNSA
 eua Imagen

2.7 RADICACIÓN Y RACIONALIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.7.1 CONCEPTO GENERAL DE RAÍZ

Llamamos raíz de una expresión algebraica a otra expresión algebraica que elevada a una potencia resulta la expresión primera.

El signo utilizado para calcular la raíz de una expresión se llama **radical**. Dentro de él se coloca la expresión sobre la cual se pretende hallar la raíz. A esta expresión la denominamos **cantidad subradical**. Encima del radical colocamos el **índice** que indica la potencia a la que hay que elevar la raíz para que se reproduzca la cantidad subradical. El conjunto de todos estos elementos es lo que llamamos **expresión radical**. Veamos un ejemplo de todo ello:

$$\sqrt[3]{9x^3a^9} = 3xa^3$$

Índice Radical
Cantidad subradical Raíz
radical

Podríamos decir que la radicación es la operación opuesta a la potenciación.

El **grado de un radical** viene expresado por su índice. En el ejemplo anterior el radical sería de tercer grado, pues el índice del radical es 3. Cuando el radical no lleva índice se supone que el índice es 2 y el radical sería de segundo grado.

El signo de las raíces dependerá del índice del radical y del signo de la cantidad subradical. El siguiente cuadro expresa claramente cada situación.

2.7.1.1 TEOREMAS DE RADICACIÓN

Sean $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_0^+$ $\wedge$ $\{n, p\} \subset \mathbb{N} - \{1\}$, entonces se tiene:

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot p]{a^p}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} ; b \neq 0$	$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$
$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$	$a^p \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{n \cdot p} \cdot b}$

2.7.1.2 RADICALES DOBLES

Son aquellos que se caracterizan porque dentro de un radical se encuentra otros radicales relacionadas con las operaciones de adición o sustracción $\sqrt[n]{A \pm \sqrt[m]{B}}$.

2.7.1.3 TRANSFORMACIÓN DE UN RADICAL DOBLE EN SIMPLE

1. Para la forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Siendo A y B dos elementos racionales positivos para su transformación en radicales simples $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$.

De donde:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Tal que $\{x, y\} \subset \mathbb{Q}^+ \wedge x > y$

Sumando miembro a miembro las expresiones:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{x}$$

Elevando al cuadrado:

$$(A + \sqrt{B}) \cdot (A - \sqrt{B}) + 2\sqrt{A^2 - B} = 4x$$

De aquí:

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

De la misma manera, restando las expresiones se tiene:

$$x = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

Considerando que $C = \sqrt{A^2 - B}$ (como $x, y \in \mathbb{Q}^+ \rightarrow C \in \mathbb{Q}$)

$$\text{Tendremos } \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Si por ejemplo consideramos la expresión $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ expresada en radical simple se tendría que aplicar los siguientes pasos:

Sea $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ la transformación en radicales simples-, entonces:

$$11 + 6\sqrt{2} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

$$11 - 6\sqrt{2} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

Sumando ambas expresiones se tiene:

$$22 = 2(x + y)$$

$$x + y = 11 \dots \dots (I)$$

Restando las mismas expresiones obtenemos:

$$12\sqrt{2} = 4\sqrt{xy}$$

$$xy = 18 \dots \dots (II)$$

De (I) y (II), se deduce que $x = 9 \wedge y = 2$

Luego tenemos:

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$$

En el caso de aplicar directamente la fórmula dada se tendrá:

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{11 + \sqrt{72}}$$

$$A = 11 \wedge B = 72 \Rightarrow C = \sqrt{11^2 - 72} = 7$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{11 + \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+7}{2}} + \sqrt{\frac{11-7}{2}} = 3 + \sqrt{2}$$

2.7.2 RACIONALIZACIÓN

Es una expresión que consiste en transformar una expresión (con denominador irracional) en otra equivalente parcialmente racional (con denominador racional).

2.7.2.1 FACTOR RACIONALIZANTE (F. R.)

Es la expresión por la que hay que multiplicar a una cantidad irracional para convertirla en racional.

2.7.2.2 PRINCIPALES CASOS QUE SE PRESENTAN

Denominador irracional	Factor racionalizante	Denominador racionalizado
$\sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	a
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$a - b$ $a + b$
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a + b$ $a - b$

Y así de manera sucesiva se sigue la misma secuencia.

Además, uno de los factores es el factor racionalizante del otro.

2.7.2.3 RACIONALIZACIÓN DE MONOMIOS

En este caso el *F.R.* será un radical homogéneo a la expresión por racionalizar, en donde los exponentes de sus letras serán cantidades que le faltan a los exponentes de la expresión inicial para ser iguales al índice del radical o a uno de sus múltiplos:

EJEMPLO:

Racionalizar los casos:

$$1) E = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2b^3}} \rightarrow F.R. = \sqrt[7]{a^5b^4}$$

Por lo tanto:

$$E = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2b^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{a^5b^4}}{\sqrt[7]{a^5b^4}} = \frac{\sqrt[7]{a^5b^4}}{\sqrt[7]{a^7b^7}} = \frac{\sqrt[7]{a^5b^4}}{ab}$$

$$2) F = \frac{1}{\sqrt[4]{a^{27}b^{13}}} \rightarrow F.R. = \sqrt[4]{ab^3}$$

Por lo tanto:

$$F = \frac{1}{\sqrt[4]{a^{27}b^{13}}} \cdot \frac{\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[4]{ab^3}} = \frac{\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[4]{a^{28}b^{16}}} = \frac{\sqrt[4]{ab^3}}{a^7b^4}$$

2.7.2.4 RACIONALIZACIÓN DE BINOMIOS DE GRADO DOS

Para este caso se debe tener en cuenta que el *F.R.* debe ser el conjugado del denominador, cuya forma es:

$$\frac{N}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \rightarrow F.R. = \sqrt{a} \mp \sqrt{b}$$

EJEMPLO:

Racionalizar:

$$H = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\underbrace{\sqrt{5} - \sqrt{3}}_{F.R.}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$

2.7.2.5 RACIONALIZACIÓN DE BINOMIOS DE ÍNDICE 3 O SU MÚLTIPLO

En este caso para racionalizar se utiliza la suma o diferencia de cubos.

Así:

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b$$

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$$

EJEMPLO:

$$\text{Racionalizar } A = \frac{2}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}$$

De la expresión:

$$A = \frac{2}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} \rightarrow F.R. = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4}$$

$$A = \frac{2}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}} = \frac{2(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{4}^3-\sqrt[3]{2}^3} = \frac{2(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})}{4-2}$$

$$A = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Transformar la expresión: $\sqrt{8 - \sqrt{60}}$

- A. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$
- B. $\sqrt{3} - \sqrt{5}$
- C. $\sqrt{5} - \sqrt{3}$
- D. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$
- E. $2\sqrt{5} - \sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

Sea del problema:

$$A = 8$$

$$B = 60$$

Por lo tanto, de la fórmula

$$C = \sqrt{8^2 - 60} = 2$$

Luego:

$$\begin{aligned}\sqrt{8 - \sqrt{60}} &= \sqrt{\frac{8+2}{2} - \sqrt{\frac{8-2}{2}}} \\ \sqrt{8 - \sqrt{60}} &= \sqrt{5} - \sqrt{3}\end{aligned}$$

RPTA: C

2. Efectuá y simplifica M:

$$M = \frac{\sqrt[3]{a^2b^4}\sqrt{2^2ab}}{\sqrt[4]{2ab}}$$

- A. $\sqrt[12]{a^{11}b^{19}}$
- B. $\sqrt[12]{2^4a^{10}b^{17}}$
- C. $\sqrt[12]{2a^{11}b^9}$
- D. $\sqrt[12]{2^9a^{11}b^{19}}$
- E. $\sqrt[12]{2^8a^{10}b^{19}}$

RESOLUCIÓN:

De la expresión se tiene que:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2b^4}\sqrt{2^2ab}}{\sqrt[4]{2ab}} = \frac{\sqrt[12]{(a^2b^4)^4}\sqrt[12]{(2^2ab)^6}}{\sqrt[12]{(2ab)^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^{12}a^{14}b^{22}}{2^3a^3b^3}}$$

Entonces:

$$M = \sqrt[12]{2^9a^{11}b^{19}}$$

RPTA: D

3. Simplifica la expresión $\frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{xy^2}}{\sqrt[4]{x^4y}}$

- A. $\sqrt[12]{x^2y^9}$
- B. $\sqrt[12]{x^5y^8}$
- C. $\sqrt[12]{x^3y^7}$
- D. $\sqrt[12]{x^4y^8}$
- E. $\sqrt[12]{x^2y^{11}}$

RESOLUCIÓN:

De la expresión se tiene:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{xy^2}}{\sqrt[4]{x^4y}} = \frac{12\sqrt{(x^2)^4}\sqrt{(xy^2)^6}}{12\sqrt{(x^4y)^3}} = \sqrt[12]{\frac{x^{14}y^{12}}{x^{12}y^3}}$$

De ahí que

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{xy^2}}{\sqrt[4]{x^4y}} = \sqrt[12]{x^2y^9}$$

RPTA: A

4. Racionalizar la siguiente expresión $\frac{2}{\sqrt[4]{2x^2y^3}}$

- A. $\frac{\sqrt[4]{8x^2y}}{xy}$
- B. $\frac{\sqrt[4]{8x^2y}}{xy}$
- C. $\frac{\sqrt[4]{4x^2y}}{xy}$
- D. $\frac{\sqrt[4]{8x^3y}}{xy}$
- E. $\frac{\sqrt[4]{6x^2y}}{xy}$

RESOLUCIÓN:

De la expresión

$$\frac{2}{\sqrt[4]{2x^2y^3}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2x^2y^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{(2x^2y^3)^3}}{\sqrt[4]{(2x^2y^3)^3}} = \frac{2\sqrt[4]{(2x^2y^3)^3}}{\sqrt[4]{(2x^2y^3)^4}}$$

$$\frac{2\sqrt[4]{2^3x^6y^9}}{2x^2y^3} = \frac{2xy^2\sqrt[4]{8x^2y}}{2x^2y^3} = \frac{\sqrt[4]{8x^2y}}{xy}$$

RPTA: B

5. Racionalizar la siguiente fracción que tiene una resta de raíces en el denominador:

$$\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$$

- A. $\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2b}$
- B. $\frac{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}{2b}$
- C. $\frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{2b}$
- D. $\frac{a-b-\sqrt{a^2-b^2}}{2b}$
- E. $\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2b}$

RESOLUCIÓN:

Como tenemos una resta en el denominador, multiplicamos por su conjugado:

$$\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a+b} \cdot (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}$$

De ahí que:

$$\frac{(\sqrt{a+b})^2 + \sqrt{a+b}\sqrt{a-b}}{(\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{a-b})^2}$$

Las raíces cuadradas que están al cuadrado desaparecen:

$$= \frac{a+b+\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}}{a+b-a+b}$$

El denominador se simplifica fácilmente. En el numerador aplicamos la propiedad *el producto de raíces es igual a la raíz del producto de sus radicandos* y tenemos una suma por diferencia:

$$\frac{a + b + \sqrt{a^2 - b^2}}{2b}$$

RPTA: C

6. Sumar las siguientes fracciones y racionalizar el resultado:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

- A. $\frac{a-b}{b}$
 B. $\frac{a+b}{a}$
 C. $\frac{a-b}{a+b}$
 D. $\frac{b}{a-b}$
 E. $\frac{a+b}{a-b}$

RESOLUCIÓN:

Para poder sumar las fracciones tienen que tener el mismo denominador. Notamos que el denominador de una de ellas es el conjugado de la otra.

El denominador común para poder sumar las fracciones es el producto de los denominadores:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

Multiplicamos y dividimos cada fracción por el factor que le falta al denominador para que ambas fracciones tengan el denominador común:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Sumamos las fracciones:

$$\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}$$

Simplificamos el denominador, que es una suma por diferencia

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

Y el numerador es:

$$\begin{aligned} \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) &= (\sqrt{a})^2 - \sqrt{a}\sqrt{b} - \sqrt{b}\sqrt{a} + (\sqrt{b})^2 \\ &= a - \sqrt{ab} + \sqrt{ab} + b = a + b \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{a + b}{a - b}$$

RPTA: E

CAPÍTULO III

ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA PLANA

En el presente capítulo estudiaremos los principios fundamentales de la divisibilidad, aprenderemos a resolver ecuaciones diofánticas lineales, aplicaremos los criterios de divisibilidad para hallar residuos o valores de las cifras desconocidas de un numeral. Aprenderemos a descomponer canónicamente un número entero positivo y obtendremos información acerca de sus divisores.



3 LA ARITMÉTICA Y LA GEOMETRÍA COMO CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

3.1 TEORÍA DE DIVISIBILIDAD

La teoría de la divisibilidad es una parte de la teoría de los números que estudia las condiciones que debe reunir un número para ser divisible por otro, así como las consecuencias que se deriven de estos.

3.1.1 DIVISIBILIDAD

La divisibilidad es la cualidad que tiene un número de ser dividido exactamente por otro entero positivo. Es decir, un número entero A es divisible por otro número entero positivo B si al dividir A entre B , la división resulta entera y exacta.

En general:

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ 0 & K \end{array} \rightarrow B \in \mathbb{Z}^+; \{A; K\} \subset \mathbb{Z}$$

Se interpreta:

- A es divisible por B
- B es divisor de A
- B divide a A

EJEMPLOS:

- $$\begin{array}{r} 91 \overline{) 7} \rightarrow 7 \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 \quad 13 \end{array}$$

Se interpreta:
91 es divisible por 7
7 es divisor de 91
- $$\begin{array}{r} -44 \overline{) 4} \rightarrow 4 \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 \quad -11 \end{array}$$

Se interpreta:
-44 es divisible por 4
4 es divisor de -44

3.1.2 MULTIPLICIDAD

Un número entero A es múltiplo de otro número entero positivo B si A es el resultado de multiplicar a B por otro número entero.

A es múltiplo de $B \Leftrightarrow A = B \times K$

Donde: $B \in \mathbb{Z}^+ \wedge \{A; K\} \subset \mathbb{Z}$

Se lee: “ A es múltiplo de B ”

Se denota: $A \overset{0}{=} B$

EJEMPLO:

- $$-91 = \underbrace{7}_{7 \in \mathbb{Z}^+} (-13)$$

Se lee: “-91 es múltiplo de 7”.

Se denota: $-91 \overset{0}{=} 7$

OBSERVACIONES:

- Los divisores de un número forman un conjunto finito, pero los múltiplos de un número forman un conjunto infinito.

EJEMPLO:

Divisores de 35 = {1; 5; 7; 35}

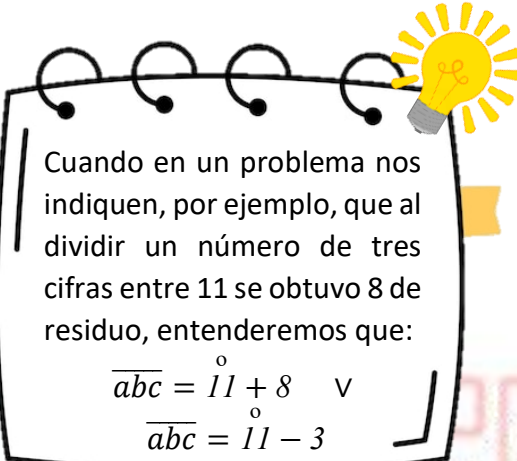
Múltiplos de 35 = {...; -70; -35; 0; 35; 70; ...}

- Si el número A no es múltiplo de B y $A > B$:

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{r} A \overline{) B} \\ r_d \quad k \end{array}$	$\begin{array}{r} A \overline{) B} \\ r_e \quad k+1 \end{array}$
$A = Bk + r_d$ $A \overset{0}{=} B + r_d$	$A = B(k+1) - r_e$ $A \overset{0}{=} B - r_e$
Se cumple: $r_d + r_e = B$	

EJEMPLO:

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{r} 52 \overline{) 9} \\ 7 \quad 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 52 \overline{) 9} \\ 2 \quad 6 \end{array}$
$52 = 9(5) + 7$ $52 \overset{0}{=} 9 + 7$	$52 = 9(6) - 2$ $52 \overset{0}{=} 9 - 2$
$\therefore 52 \overset{0}{=} 9 + 7 \overset{0}{=} 9 - 2$	



Cuando en un problema nos indiquen, por ejemplo, que al dividir un número de tres cifras entre 11 se obtuvo 8 de residuo, entenderemos que:

$$\overline{abc} = \overset{0}{11} + 8 \quad \vee$$

$$\overline{abc} = \overset{0}{11} - 3$$

- Si A es múltiplo de B , entonces es múltiplo de cada uno de los divisores de B .

EJEMPLO:

$$\text{Si: } A = \overset{0}{6}, \text{ entonces } \begin{cases} A = \overset{0}{1} \\ A = \overset{0}{2} \\ A = \overset{0}{3} \\ A = \overset{0}{6} \end{cases}$$

- Si A es múltiplo de B , entonces es múltiplo de cada uno de los divisores de B .

$$\text{Si: } A = \overset{0}{B} \wedge A = \overset{0}{C} \Rightarrow A = \overline{\text{MCM}(\overset{0}{A}; \overset{0}{B})}$$

EJEMPLO:

$$A = \overset{0}{10} \wedge A = \overset{0}{6} \Rightarrow A = \overline{\text{MCM}(10; 6)}$$

$$A = \overset{0}{30}$$

$$\bullet \text{ Si: } A = \overset{0}{B} \pm R \wedge A = \overset{0}{C} \pm R \Rightarrow A = \overline{\text{MCM}(\overset{0}{B}; \overset{0}{C})} \pm R$$

EJEMPLO:

$$A = \overset{0}{3} - 2 \wedge A = \overset{0}{5} - 2 \Rightarrow A = \overline{\text{MCM}(3; 5)} - 2$$

$$A = \overset{0}{15} - 2$$

3.1.3 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE DIVISIBILIDAD

- a) La adición o sustracción de múltiplos de un mismo número siempre es igual a un múltiplo del mismo número.

$$\overset{0}{n} + \overset{0}{n} = \overset{0}{n}$$

$$\overset{0}{n} - \overset{0}{n} = \overset{0}{n}$$

EJEMPLO:

$$\bullet \begin{array}{ccccccc} 65 & + & 25 & - & 30 & = & 60 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overset{0}{5} & + & \overset{0}{5} & - & \overset{0}{5} & = & \overset{0}{5} \end{array}$$

- b) La multiplicación de un múltiplo de " n " por un número entero, da como producto un múltiplo de " n ".

$$\text{Si: } a \in \mathbb{Z}: \quad a \left(\overset{0}{n} \right) = \overset{0}{n}$$

EJEMPLOS:

$$\bullet \quad 3 \times 50 = 150$$

$$3 \times \overset{0}{5} = \overset{0}{5}$$

$$\bullet (-2) \times 40 = -80$$

$$(-2) \times \overset{0}{5} = \overset{0}{5}$$

- c) Si a un múltiplo de n , se eleva a una potencia entera y positiva, el resultado será un múltiplo de n .

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z}^+ : \left(\overset{0}{n}\right)^a = \overset{0}{n}$$

EJEMPLO:

$$\bullet (8)^2 = 64$$

$$\left(\overset{0}{4}\right)^2 = \overset{0}{4}$$

3.1.4 PRINCIPALES CRITERIOS DE LA DIVISIBILIDAD

Por 2	$\overline{abcde} = \overset{0}{2} \leftrightarrow \bar{e} = 0 \text{ ó par}$
Por 4	$\overline{abcde} = \overset{0}{4} \leftrightarrow \overline{de} = \begin{Bmatrix} 00 \\ \overset{0}{4} \end{Bmatrix}$
Por 8	$\overline{abcde} = \overset{0}{8} \leftrightarrow \overline{cde} = \begin{Bmatrix} 000 \\ \overset{0}{8} \end{Bmatrix}$
Por 5	$\overline{abcde} = \overset{0}{5} \leftrightarrow \bar{e} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \overset{0}{5} \end{Bmatrix}$
Por 25	$\overline{abcde} = \overset{0}{25} \leftrightarrow \overline{de} = \begin{Bmatrix} 00 \\ \overset{0}{25} \end{Bmatrix}$
Por 125	$\overline{abcde} = \overset{0}{125} \leftrightarrow \overline{cde} = \begin{Bmatrix} 000 \\ \overset{0}{125} \end{Bmatrix}$
Por 3	$\overline{abcde} = \overset{0}{3} \leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{0}{3}$

Por 9	$\overline{abcde} = \overset{0}{9} \leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{0}{9}$
Por 11	$\overline{abcde} = \overset{0}{11} \leftrightarrow e - d + c - b + a = \overset{0}{11}$
Por 7	$\overline{abcde fgh} = \overset{0}{7}$ $\begin{array}{r} \underbrace{31}_{+} \underbrace{231}_{-} \underbrace{231}_{+} \\ \hline \end{array}$ $(3a + b) - (2c + 3d + e) + (2f + 3g + h) = \overset{0}{7}$
Por 13	$\overline{abcde fgh} = \overset{0}{13}$ $\begin{array}{r} \underbrace{31}_{-} \underbrace{143}_{+} \underbrace{143}_{-} \underbrace{1}_{+} \\ \hline \end{array}$ $-3a + (b + 4c + 3d) - (e + 4f + 3g) + h = \overset{0}{13}$
Por 33	$\overline{abcde} = \overset{0}{33} \leftrightarrow a + \overline{bc} + \overline{de} = \overset{0}{33}$ Se agrupa de derecha a izquierda
Por 99	$\overline{abcde} = \overset{0}{99} \leftrightarrow a + \overline{bc} + \overline{de} = \overset{0}{99}$ Se agrupa de derecha a izquierda

3.1.5 PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Dados dos números enteros no nulos A y B . Si:

$$A \times B = \overset{0}{n} \wedge A, n \text{ son PESI} \Rightarrow B = \overset{0}{n}$$

PESI (primos entre sí) indica que dos o más números tienen como único divisor común la unidad.

EJEMPLOS:

$$\bullet \quad 24n = \frac{0}{13}$$

Tener en cuenta que 24 y 13 son primos entre sí.

$$\Rightarrow n = \frac{0}{13}$$

$$\bullet \quad 5x + 10 = \frac{0}{7}$$

$$5(x + 2) = \frac{0}{7} \rightarrow x + 2 = \frac{0}{7}$$

$$\therefore x = \{5; 12; 19; 26; \dots\}$$

RECUERDA QUE

La condición necesaria y suficiente para que una ecuación diofántica lineal tenga solución es que:

$$C = \frac{0}{\text{MCD}(A; B)}$$

3.1.6 DIVISIBILIDAD APLICADA AL BINOMIO DE NEWTON

$$\left(\frac{0}{n} + r\right)^k = \frac{0}{n} + r^k, \quad \{n; r; k\} \subset \mathbb{Z}^+$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{0}{n} - r\right)^k &= \frac{0}{n} + r^k \iff k \text{ es PAR} \\ \left(\frac{0}{n} - r\right)^k &= \frac{0}{n} - r^k \iff k \text{ es IMPAR} \end{aligned}, \quad \{n; R; k\} \subset \mathbb{Z}^+$$

Donde:

- $\{A; B; C; x; y\} \subset \mathbb{Z}$
- $AB \neq 0$

EJEMPLO:

$$\bullet \quad 4x + 7y = 225; \{x; y\} \subset \mathbb{Z}$$

Verificamos que esta ecuación tenga solución entera:

$$225 = \frac{0}{\text{MCD}(4; 7)}$$

$$225 = \frac{0}{1}$$

Convenientemente expresamos todos los términos en función de los múltiplos del menor coeficiente, es decir en función de $\frac{0}{4}$:

$$4x + 7y = 225 \quad (*)$$

3.1.7 ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Una ecuación diofántica es cualquier ecuación en varias variables cuyos coeficientes y valores de las incógnitas son números enteros.

Se denomina ecuación diofántica lineal en dos variables $(x; y)$ si la ecuación lineal tiene la forma.

$$Ax + By = C$$

$$\begin{aligned}
 4x + (4 + 3)y &= 4 + 1 \\
 4 + 3y &= 4 + 1 \\
 3y - 1 &= 4 \\
 y &= 4 - 1 = 4 + 3 \\
 y &= 4k + 3
 \end{aligned}$$

Reemplazando x en (*):

$$\begin{aligned}
 4x + 7(4k + 3) &= 225 \\
 4x &= 204 - 28k \\
 x &= 51 - 7k
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{cases} x = 51 - 7k \\ y = 4k + 3 \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

Para determinar todas las soluciones posibles, se dan valores a k .

k	...	-1	0	1	2	...
x	...	58	51	44	37	...
y	...	-1	3	7	11	...

Observaciones:

- Una ecuación diofántica lineal tiene infinitas soluciones.
- Mientras haya restricciones para las variables, se puede tomar una solución particular.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Para que $\overline{2AA2}$ sea múltiplo de 3, la suma de los valores de A es:

- A. 15
- B. 10
- C. 7
- D. 18
- E. 12

RESOLUCIÓN:

Por criterio de divisibilidad de 3:

$$\begin{aligned}
 2 + A + A + 2 &= 3 = 3k \\
 2A + 4 &= 3k
 \end{aligned}$$

Damos valores a k y obtenemos los valores que asume A :

$$\begin{aligned}
 \text{Si: } k = 2 & \quad A = 1 \\
 k = 4 & \quad A = 4
 \end{aligned}$$

$$k = 6 \quad A = 7$$

Entonces, la suma de valores de A , es $1 + 4 + 7 = 12$

RPTA: E

2. En un gimnasio hay dos candados con los siguientes dígitos de apertura sobre ellos $\overline{65a9}$ y $\overline{67b5}$, si el primero es divisible por 9 y el segundo es divisible por 25; encontrar el número de candados disponibles en dicho gimnasio, si es equivalente a " ab ", siendo $a \neq b$.

- A. 21
- B. 16
- C. 12
- D. 18
- E. 14

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, se tiene:

$$\overline{65a9} = 6 + 5 + a + 9 = 20 + a = 9$$

$$\downarrow$$

$$a = 7$$

$\overline{67b5}$ debe terminar en 25 o 75

$$\downarrow$$

$$b = 2$$

Por tanto, $ab = 7(2) = 14$

RPTA: E

3. Juana, profesora de la Cuna Jardín de la UNSA le dice a Rosa, una madre de familia, que tienen $\overline{3ab}$ niños matriculados, y que, si los agrupa de 5 en 5, le sobrarían 4; pero si los agrupa de 9 en 9, faltarían 9 niños para formar grupos exactos. ¿Cuántos niños matriculados, como máximo, hay en la Cuna Jardín de la UNSA?

- A. 359
- B. 319
- C. 389
- D. 364
- E. 384

RESOLUCIÓN:

Se tiene que el número de niños es $\overline{3ab}$, tal que:

$$\overline{3ab} = \begin{cases} 5 + 4 \\ 9 - 5 = 9 + 4 \end{cases}$$

Luego:

$$\overline{3ab} = \frac{0}{45} + 4 = 45k + 4$$

$$\downarrow$$

entero

274	6
319	7
364	8
409	9

Por lo tanto, la cantidad máxima de niños matriculados que tiene la Cuna Jardín de la UNSA es 364.

RPTA: D

4. En una asamblea han participado 500 personas, entre varones y mujeres. Respecto a la cantidad de mujeres, $\frac{4}{7}$ son amas de casa, $\frac{3}{8}$ están casadas y $\frac{4}{5}$ tienen hijos. ¿Cuántos hombres asistieron a dicha asamblea?

- A. 200
- B. 220

- C. 240
D. 280
E. 560

RESOLUCIÓN:

Sea M el número de mujeres:

$$\text{Amas de casa: } \frac{4M}{7} \Rightarrow M = \frac{0}{7}$$

$$\text{Casadas: } \frac{3M}{8} \Rightarrow M = \frac{0}{8}$$

$$\text{Con hijos: } \frac{4M}{5} \Rightarrow M = \frac{0}{5}$$

$$\therefore M = \overline{MCM(7; 8; 5)} = \frac{0}{280}$$

Siendo las mujeres $M = \{280; 560; 840; \dots\}$

Como $M \leq 500$, entonces sólo puede ser 280.

Luego, la cantidad de varones es:

$$500 - 280 = 220$$

RPTA: B

5. Luis plantea la siguiente condición, si $\overline{abba} = \frac{0}{35}$ y le pide a María que halle el resto de dividir $\overline{aba}$ entre 14; si María resolvió correctamente. Determinar el residuo de dicha operación.

- F. 1
G. 2
H. 3
I. 4
J. 5

RESOLUCIÓN:

$$\text{Si } \overline{abba} = \frac{0}{35}$$

Entonces $\overline{abba}$ es múltiplo de 5 y 7

$$a = 5$$

$$\overline{5bb5} = \frac{0}{7}$$

Por criterio de divisibilidad de 7, se tiene:

$$\overline{5 \ b \ b \ 5}$$

$$\begin{array}{r} -1 \ 2 \ 3 \ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$-5 + 2b + 3b + 5 = \frac{0}{7}$$

$$5b = \frac{0}{7}$$

$$b = 0 \vee b = 7$$

$$\overline{abba} = 5005 \vee \overline{abba} = 5775$$

$$\text{Entonces: } 505 = \frac{0}{14} + 1 \wedge 575 = \frac{0}{14} + 1$$

Para cualquier caso se obtiene el mismo residuo que es igual a 1.

RPTA: A

6. En la pollería "Gran Pollo" se observa que los $3/7$ de las mujeres están comiendo ensalada y $1/5$ de los hombres comen pollo a la brasa. Si en total hay 38 personas, ¿cuántas mujeres no están comiendo ensalada?

- K. 28
L. 10
M. 12
N. 16
O. 5

RESOLUCIÓN:

Sea:

M = Cantidad de mujeres

H = Cantidad de hombres

$$Mujeres_{ensalada} = \frac{3M}{7} \quad M = \frac{0}{7} = 7x; x \in \mathbb{Z}^+$$

$$Hombres_{pollo} = \frac{H}{5} \quad H = \frac{0}{5} = 5y; y \in \mathbb{Z}^+$$

$$7x + 5y = 38$$

$$\left(\frac{0}{5} + 2\right)x + \frac{0}{5}y = \frac{0}{5} + 3$$

$$2x = \frac{0}{5} + 3 = \frac{0}{5} - 2$$

Simplificando la expresión:

$$x = \frac{0}{5} - 1$$

$$x = \{4; 9; 14; 19; \dots\}$$

De la ecuación:

$$7x + 5y = 38$$

$$7(4) + 5(2) = 38$$

Solo cumple para cuando $x = 4 \wedge y = 2$; por tanto hay 28 mujeres y 10 varones.

Se deduce que la cantidad de mujeres que no comen ensalada está representada por:

$$Mujeres_{no\ ensalada} = \frac{4M}{7} = \frac{4(28)}{7} = 16$$

Por lo tanto, la cantidad de mujeres que no están comiendo ensalada es 16.

RPTA: D

7. En una granja el total de ovejas y vacas es menor que 500. Si el número de ovejas es múltiplo de 12 y menor que la tercera parte del número de vacas, ¿cuántas ovejas como máximo hay en la granja?

P. 132

Q. 108

R. 120

S. 144

T. 110

RESOLUCIÓN:

Sea:

x = número de ovejas.

y = número de vacas.

$$x + y < 500 \dots\dots (I)$$

$$x = \frac{0}{12} = 12k \dots\dots (k \in \mathbb{Z}^+)$$

$$x < \frac{y}{3}$$

$$3x < y$$

$$4x < y + x \dots\dots (II)$$

De I y II

$$4x < x + y < 500$$

$$4x < 500$$

$$x < 125$$

Reemplazando $x = 12k$

$$12k < 125$$

$$k < 10,41 \dots$$

$$K_{\text{máximo}} = 10$$

$$12(10) = 120$$

Por tanto, la mayor cantidad de ovejas es 120.

RPTA: C

8. Determinar el mayor valor de $\overline{ab}$ que cumpla con la siguiente condición: $2\overline{ab} + 7\overline{ab} + 12\overline{ab} = \frac{0}{133}$

U. 85

V. 48

W. 76

X. 86

Y. 95

RESOLUCIÓN:A partir del dato: $21\overline{ab} = \overline{133}$

Dividimos la expresión entre 7, obtenemos:

$$3\overline{ab} = \overline{19}$$

Observamos que 3 y 133 son PESI, entonces, por el principio de Arquímedes:

$$\overline{ab} = \overline{19}$$

Buscamos el mayor valor de $\overline{ab}$; por tanto: $\overline{ab} = 95$.**RPTA: E**

3.2 NÚMEROS PRIMOS y NÚMEROS COMPUESTOS

Números simples	La unidad: es el único entero positivo que posee un solo divisor.
	Numero primo: también llamado primo absoluto, es aquel número que admite únicamente, dos divisores (el mismo y la unidad). EJEMPLO: 11 solo es divisible por 1 y por 11. Entonces 11 es primo. 3 solo es divisible por 1 y por 3. Entonces 3 es primo.
Números compuestos	Es aquel número que tiene más de dos divisores. EJEMPLO: 15 es divisible por 1, 3, 5, y 15. Entonces 15 es compuesto. 6 es divisible por 1, 2, 3, y 6. Entonces 6 es compuesto.

Sea el número: $N = A^a \times B^b \times C^c \times \dots$

Cantidad de divisores CD :

$$CD(N) = (a + 1)(b + 1)(c + 1) \dots$$

Donde: $A, B, C, \dots$ son números primos.

Dado un numero entero positivo N , se cumple:

$$CD(N) = CD_P + CD_C + 1$$

$CD(N)$ = cantidad total de divisores

CD_P = cantidad de divisores primos

CD_C = cantidad de divisores compuestos

3.2.1 CRIBA DE ERATÓSTENES

La criba de Eratóstenes es un algoritmo que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado.

Partimos de una lista de números que van de 2 hasta un determinado número.

Eliminamos de la lista los múltiplos de 2.

Luego tomamos el primer número después del 2 que no fue eliminado (el 3) y eliminamos de la lista sus múltiplos, y así sucesivamente.

El proceso termina cuando el cuadrado del mayor número confirmado como primo es menor que el número final de la lista.

Los números que permanecen en la lista son los primos.

EJEMPLO:

Vamos a calcular por este algoritmo los números primos menores que 40.

- Escribimos los números, en nuestro caso serán los comprendidos entre 2 y 40.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

- Eliminamos los múltiplos de 2, excepto el 2.

2	3		5		7		9		11		13	
15		17		19		21		23		25		27
	29		31		33		35		37		39	

- El siguiente número es 3, como $3^2 < 40$ eliminamos los múltiplos de 3, excepto 3.

2	3		5		7				11		13	
		17		19				23		25		
	29		31				35	37				

- El siguiente número es 5, como $5^2 < 40$ eliminamos los múltiplos de 5, excepto 5.

2	3		5		7				11		13	
		17		19				23				
	29		31						37			

- El siguiente número es 7, como $7^2 > 40$ el algoritmo termina y los números que nos quedan son **primos**.

2	3		5		7				11		13	
		17		19		21		23				
	29		31						37			

Ahora los números primos menores a 40 son:

2 3 5 7 11 13

17 19 23 29 31 37

Los siguientes números primos serán:

41 43 47 53 59 61

67 71 73 79 83 89

97 101 103 107 109 113

127 131 137 139 149 151

157 163 167 173 179 181

191 193 197 199 211 223

3.2.2 NÚMEROS COMPUESTOS

Los números compuestos son aquellos que poseen más de 2 divisores.

Son aquellos que son divididos por la unidad, ellos mismos y otros números. Cualquier número entero que no sea primo es un número compuesto, excepto la unidad que no es primo ni compuesto.

Por ejemplo: 12 es un número compuesto (por lo tanto, no es primo) porque puede ser expresado por el producto de factores primos: 2 y 3.

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

3.2.3 DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA

$$N = \underbrace{p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \times p_4^{a_4} \dots \times p_n^{a_n}}_{D.C.}$$

Donde:

☞ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, son números primos diferentes entre sí.

☞ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, son enteros positivos.

EJEMPLOS:

☞ $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

☞ $1024 = 2^{10}$

☞ $1001 = 7 \times 11 \times 13$

3.2.4 NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ

Cuando el único divisor común que comparten es la unidad.

EJEMPLO:

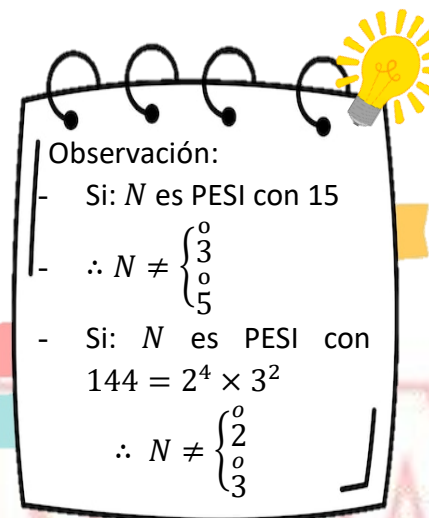
12 y 35 son números PESI, porque no poseen algún divisor común que sea primo.

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$35 = 5 \times 7$$

RECUERDA QUE

Para que dos o más números sean primos entre sí (PESI), no deben poseer algún divisor común que sea primo y esto lo verificamos en su D.C.

**PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS**

1. Determine el valor de “ n ” si el número $P = 4^n \times 3^n \times 5$; tiene 30 divisores.

- A. 2
- B. 7
- C. 8
- D. 9
- E. 19

RESOLUCIÓN:

Sea: $P = 4^n \cdot 3^n \cdot 5 = 2^{2n} \cdot 3^n \cdot 5$

Por dato:

$$CD(p) = 30$$

$$(2n + 1)(n + 1)(1 + 1) = 30$$

$$(2n + 1)(n + 1) = 15 = 5 \cdot 3$$

$$(2n + 1)(n + 1) = (2(2) + 1)(2 + 1)$$

$$n = 2$$

RPTA: A

2. Sabiendo que N es un número capicúa y se expresa como:

$$\overline{ab1} = N$$

¿Cuántos números primos se expresan como N ?

- A. 2
- B. 3
- C. 5
- D. 7
- E. 9

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos que N es número capicúa:

$$\overline{ab1} = \overline{1b1}$$

Entonces:

$$N = \{101; 111; 121; 131; 141; 151; 161; 171; 181; 191\}$$

Para que N sea primo:

$$N \neq \overset{0}{2}; \overset{0}{5}; \overset{0}{7}; \overset{0}{9}; \overset{0}{11} \dots$$

Números primos:

$$N = \{101; 131; 151; 181; 191\}$$

Tenemos 5 números primos.

RPTA: C

3. Hallar el valor de a^b en $N = 21^a \times 51^b$, si se sabe que N tiene 105 divisores.

- A. 16
- B. 17
- C. 18
- D. 19
- E. 15

RESOLUCIÓN:

Descomponemos:

$$N = 21^a \cdot 51^b$$

$$N = 3^a \cdot 7^a \cdot 3^b \cdot 17^b$$

$$N = 3^{a+b} \cdot 7^a \cdot 17^b$$

La cantidad de divisores de dicho número es 105

$$(a + b + 1)(a + 1)(b + 1) = 7 \cdot 3 \cdot 5$$

Tanteamos los valores, ya que $\{a; b\} \subset \mathbb{Z}^+$

$$a = 2; b = 4$$

Nos piden a^b , reemplazamos:

$$a^b = 2^4 = 16$$

RPTA: A

4. Sabiendo que el número $A = 12^{n+2} - 12^n$ tiene 364 divisores, determinar la cantidad de divisores compuestos que tiene $2n^2 + 3n + 1$.

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

RESOLUCIÓN:

$$A = 12^{n+2} - 12^n$$

$$A = 12^n(12^2 - 1)$$

$$A = 2^{2n} \cdot 3^n \cdot 13 \cdot 11$$

Por dato:

$$CD(A) = (2n + 1)(n + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 364$$

$$(2n + 1)(n + 1) = 91$$

La expresión que obtuvimos es la misma cantidad, cuya cantidad de divisores compuestos debemos calcular:

$$\text{Sea: } B = 2n^2 + 3n + 1 = 91$$

$$B = 7 \cdot 13$$

$$CD(B) = (1 + 1)(1 + 1) = 4$$

$$D_B = \{1; 7; 13; 91\}$$

Entonces, la expresión $2n^2 + 3n + 1$ tiene 1 divisor compuesto.

RPTA: A

5. Un abuelo dice: “No soy tan joven pero aún no cumpla 100 años; además, si el año pasado mi edad era un número múltiplo de 2, hace 6 años era múltiplo de 7, y al próximo año será un múltiplo de 10”.

Determinar la edad del abuelo e indicar como respuesta la suma de cifras de dicho número.

A. 12

B. 18

C. 14

D. 15

E. 16

RESOLUCIÓN:

Sea N la edad del abuelo; $60 < N < 90$ además:

$$N - 1 = \overset{0}{2} \Rightarrow N = \overset{0}{2} + 1 = \overset{0}{2} - 1$$

$$N - 6 = \overset{0}{7} \Rightarrow N = \overset{0}{7} + 6 = \overset{0}{7} - 1$$

$$N + 1 = \overset{0}{10} \Rightarrow N = \overset{0}{10} - 1 = \overset{0}{10} - 1$$

Entonces:

$$N = MCM\left(\overset{0}{2}; \overset{0}{7}; \overset{0}{10}\right) - 1 = \overset{0}{70} - 1$$

$$\text{Siendo } N = 70k - 1 = 69$$

$$\text{Nos piden: } 6 + 9 = 15$$

RPTA: D

6. La edad de Jimena está representada por el máximo valor que puede tomar “ $m + n$ ”. Si se sabe que la descomposición canónica de un número $A = m(m + 2)(m + 4)(\overline{mn})^2$, calcular la edad de Jimena.

A. 12

B. 24

C. 16

D. 18

E. 10

RESOLUCIÓN:

Si A se encuentra descompuesto canónicamente, entonces:

$m(m + 2)(m + 4)$ son 3 números impares consecutivos y primos a la vez, es decir, 3; 5 y 7, respectivamente.

$\overline{mn} = \overline{3n}$ es un número primo

↓
1
7

$$m + n = \begin{cases} 3 + 1 = 4 & (\text{Mínimo}) \\ 3 + 7 = 10 & (\text{Máximo}) \end{cases}$$

Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar $m + n$ es 10.

RPTA: E

7. Calcular la suma de cifras del numeral de la forma $\overline{abac(2d)}$, si se sabe que tiene 14 divisores propios y además se cumple que $2(d + a) = b + c$.

A. 28

B. 24

C. 30

D. 36

E. 32

RESOLUCIÓN:

Si: $N = \overline{abac(2d)}$, entonces

$$CD(N) = CD(propios) + 1 = 15$$

↓
14

Por la condición $2(d + a) = b + c$,

$$2(d + a) - (b + c) = 0$$

Por otro lado: $N = \overline{a \ b \ a \ c \ (2d)} = \overline{11}$, ya que

+ - + - +
←

$$a - b + a - c + 2d = 2(d + a) - (b + c) = 0 = \overline{11}$$

Como la cifra de las unidades de N está representada por $\overline{2d}$, inferimos

$$N = \overline{2}$$

Luego:

$$N = \begin{cases} 2^2 \times 11^4 = 58\,564 & (\text{Sí cumple}) \\ 2^4 \times 11^2 = 1\,936 & (\text{No cumple}) \end{cases}$$

Por lo tanto, la suma de las cifras es: $5 + 8 + 5 + 6 + 4 = 28$

RPTA: A

8. Si al cuadrado de un número, cuya suma y diferencia de sus dos dígitos representan a números primos mayores que 13, se le resta; el cuadrado del número formado por los dos dígitos en orden invertido, ¿cuántos divisores tiene el resultado?

- A. 32
- B. 18
- C. 30
- D. 48
- E. 24

RESOLUCIÓN:

Sea $\overline{ab}$ el numeral.

Por dato: " $a + b$ " $\wedge$ " $a - b$ " representan a números primos

Número del que debemos calcular la cantidad de divisores: $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$

$$(\overline{ab} + \overline{ba})(\overline{ab} - \overline{ba})$$

$$11(a + b) \cdot 9(a - b)$$

$3^2 \cdot 11 \cdot (a + b)(a - b)$ (Ya está descompuesto canónicamente)

$$CD = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$$

RPTA: E

3.3 NÚMEROS RACIONALES

3.3.1 FRACCIONES: DEFINICIÓN

Son todos aquellos números que se pueden escribir en forma de división de números enteros, exceptuando la división por cero, y que pueden ser exactos o inexactos, se incluyen los naturales, enteros y las fracciones, y se les denota por $\mathbb{Q}$.

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} / m \wedge n \text{ son números enteros con } n \neq 0 \right\}$$

La fracción se puede considerar como operador:

Cuando por ejemplo se calcula los $\frac{2}{3}$ de 60

$$\frac{2}{3} \times 60 = 40$$

La fracción como parte-todo:

$$\frac{a}{b} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Numerador} \\ \text{Denominador} \end{array} = \frac{\text{Partes tomadas}}{\text{Todo}}$$

EJEMPLO:

¿Qué parte de $\frac{1}{6}$ es $\frac{5}{3}$?

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{6}} = 10$$

$$\therefore \frac{5}{3} \text{ es } 10 \text{ veces } \frac{1}{6}$$

3.3.2 CLASIFICACIÓN DE FRACCIONES

3.3.2.1 POR LA COMPARACIÓN DE SUS TÉRMINOS

☞ Propia: Cuando es menor que la unidad

$$\frac{a}{b}; a < b \text{ donde } \{a; b\} \subset \mathbb{Z}$$

EJEMPLOS:

$$\frac{3}{5}; \frac{1}{2}; \frac{12}{35}; \frac{67}{100}$$

☞ Impropia: Cuando es igual a 1 o mayor que la unidad.

$$\frac{a}{b}; a > b \text{ donde } \{a; b\} \subset \mathbb{Z}$$

EJEMPLOS:

$$\frac{5}{2}; \frac{7}{5}; \frac{12}{11}; \frac{67}{50}$$

3.3.2.2 POR SU DENOMINADOR

☞ Ordinaria: Es aquella cuyo denominador es diferente de una potencia de 10.

☞ Decimal: Es aquella cuyo denominador es una potencia de 10.

3.3.2.3 POR COMPARACIÓN DE SUS DENOMINADORES

☞ Homogéneas: Son aquellas cuyos denominadores son iguales

☞ Heterogéneas: Son aquellas con denominadores diferentes.

RECUERDA QUE

Una fracción mixta está compuesta de una parte entera y otra fraccionaria.

Por ejemplo:

$$5\frac{4}{7}; 2\frac{1}{4}; 6\frac{2}{5}$$

Ejemplos de conversión:

$$\frac{16}{3} = \frac{15+1}{3} = \frac{15}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

$$6\frac{2}{5} = \frac{5 \cdot 6 + 2}{5} = \frac{32}{5}$$

3.3.2.4 FRACCIONES REDUCTIBLES

- Simplificar una fracción es transformarla en una fracción equivalente más simple.
- Para simplificar una fracción dividimos numerador y denominador por un mismo número.
- Empezaremos a simplificar probando por los primeros números primos: 2, 3, 5, 7, ... Es decir, probamos a dividir numerador y

denominador entre 2 mientras se pueda, después pasamos al 3 y así sucesivamente.

- Se repite el proceso hasta que no haya más divisores comunes.
- Si los términos de la fracción terminan en ceros, empezaremos quitando los ceros comunes finales del numerador y denominador.

Si el número por el que dividimos es el máximo común denominador del numerador y denominador llegamos a una fracción irreducible.

3.3.2.5 FRACCIÓN IRREDUCTIBLE

Es una fracción que no se puede simplificar (reducir), es decir, que el numerador y el denominador son primos entre sí.

EJEMPLO:

$$\frac{3}{4}; \frac{5}{11}; \frac{7}{4}; \frac{5}{3}$$

3.3.3 OPERACIONES CON FRACCIONES

- **Adición y sustracción de fracciones homogéneas**

EJEMPLO:

Efectúa la operación

$$\frac{13}{7} + \frac{11}{7} + \frac{2}{7} - \frac{20}{7}$$

Se suman o restan los numeradores, el resultado tiene como denominador 7 y la fracción resultante se simplifica, si fuera necesario.

$$\frac{13}{7} + \frac{11}{7} + \frac{2}{7} - \frac{20}{7} = \frac{13 + 11 + 2 - 20}{7} = \frac{6}{7}$$

Por lo tanto, el resultado de la operación es $\frac{6}{7}$.

• **Adición y sustracción de fracciones heterogéneas.**

Se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, también conocido común denominador, éste se divide entre cada uno de los denominadores de las fracciones y los resultados se multiplican por su correspondiente numerador. Los números que resultan se suman o se restan para obtener el resultado final.

EJEMPLO:

$$\text{Efectúa } \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{3}{15}$$

El común denominador de 4, 5 y 15 es 60, se efectúa las operaciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{3}{15} = \frac{45 + 24 - 12}{60} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20}$$

Por lo tanto, el resultado de la operación es $\frac{19}{20}$.

- **Multiplicación de fracciones.** Se multiplican los numeradores y los denominadores entre sí. En caso de que existan fracciones mixtas, se deben convertir a fracciones impropias y posteriormente realizar la multiplicación.

EJEMPLO:

$$\text{Efectúa } \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \left(1\frac{1}{3}\right) (2)$$

Se convierten las fracciones mixtas a impropias, se observa que existen factores iguales en el denominador y denominador, por lo tanto, es recomendable simplificar la expresión para obtener el resultado.

$$\left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \left(1\frac{1}{3}\right) (2) = \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{2}{1}\right) = \frac{1}{3}$$

• **División de fracciones.**

- Se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el producto es el numerador de fracción resultante.
- Se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, el producto es el denominador de la fracción resultante.

Para realizar esta operación

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

EJEMPLO:

Efectúa $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$

Efectuamos la operación y resulta lo siguiente

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2(5)}{3(4)} = \frac{5}{6}$$

Por lo tanto, el resultado de la operación es $\frac{5}{6}$

3.3.4 FRACCIÓN GENERATRIZ

Es la fracción que da origen a un número decimal. Para obtener la fracción generatriz de un decimal, debemos revisar las siguientes reglas:

FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN DECIMAL EXACTO

La fracción tiene como numerador el número dado sin la coma, y por denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga.

Ejemplo: $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN DECIMAL PERIODICO PURO

La fracción tiene por numerador a todas las cifras (sean componentes o no del período y sin comas) menos las cifras que forman el período. El denominador tiene tantos nueves como cifras decimales tiene el periodo.

EJEMPLOS:

$$3,\overline{25} = \frac{325 - 3}{99} = \frac{322}{99}$$

$$0,\overline{27} = \frac{27 - 0}{99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN DECIMAL PERIODICO MIXTO

El numerador de la fracción está formado por la diferencia que resulta de escribir todas las cifras que contenga el número decimal menos las cifras que componen la parte NO periódica. El denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el periodo seguido de tantos ceros como cifras hay entre las comas y la parte periódica.

EJEMPLOS:

$$3,7\overline{25} = \frac{3725 - 37}{990} = \frac{3688}{990} = \frac{1844}{495}$$

$$0,5\hat{2} = \frac{52 - 5}{90} = \frac{47}{90}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcule $m + n + p + q$, dado que:

$$\frac{17}{mn} + \frac{pq}{19} = m + q$$

- A. 8
- B. 12
- C. 13
- D. 14
- E. 15

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{17}{19} + \frac{pq}{19} &= 1 + q \\ 17 + (10p + q) &= 19 + 19q \\ 10p &= 2 + 18q \\ 5p &= 1 + 9q \end{aligned}$$

Solo se cumple para: $p = 2$; $q = 1$

$$5(2) = 1 + 9(1)$$

$$\therefore m + n + p + q = 1 + 9 + 2 + 1 = 13$$

RPTA: C

2. Omar, después de haber perdido los $\frac{5}{12}$ del dinero que tenía, $\frac{1}{8}$ del resto y $\frac{7}{15}$ del nuevo resto, gana \$ 41 000 y de esta manera, la pérdida se reduce a la mitad de la cantidad inicial. ¿Cuál era su dinero inicial?

- A. \$ 100 000
- B. \$ 175 000

- C. \$ 210 000
- D. \$ 180 000
- E. \$ 215 000

RESOLUCIÓN:

Sea T la cantidad inicial, considerando lo que siempre queda:

$$\begin{aligned} \frac{8}{15} \left[\frac{7}{8} \left(\frac{7}{12} \times D \right) \right] + 41\,000 &= \frac{D}{2} \\ \frac{49}{180} (D) + 41\,000 &= \frac{D}{2} \Rightarrow D = 180\,000 \\ \therefore \text{Monto inicial: } \$ 180\,000 \end{aligned}$$

RPTA: D

3. Kristel prepara picarones para vender y dispone de una balanza muy precisa. Ella comenzó a trabajar con $2\frac{1}{2}$ kilogramos de harina y después de un tiempo pesa la harina que le queda. La balanza indica 1,757575... kg, ¿cuántos kg de harina ha consumido?

- A. 0,74747474...
- B. 0,24242424...
- C. 0,74222222...
- D. 0,74242424...
- E. 0,74424242...

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, la cantidad de harina que ha consumido es:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} - \frac{175 - 1}{99} &= \frac{5}{2} - \frac{174}{99} \\ \frac{495 - 348}{198} &= \frac{147}{198} = \frac{49}{66} = 0,74242424 \dots \end{aligned}$$

RPTA: D

$$k = 5$$

4. En un salón, los $\frac{7}{12}$ de los estudiantes son varones. Si la diferencia entre mujeres y varones es P, halle cuántos estudiantes hay en el salón

$$P = 0, \widehat{3} + (1, \widehat{3} + \dots + 1, \widehat{7} + 1, \widehat{8})$$

- A. 80
- B. 12
- C. 72
- D. 60
- E. 48

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, tenemos:

$$P = \frac{1}{3} + \left(\frac{12}{9} + \frac{13}{9} + \dots + \frac{17}{9} \right)$$

$$P = \frac{1}{3} + \left(\frac{12 + 13 + \dots + 17}{9} \right)$$

$$P = \frac{1}{3} + \frac{87}{9} = 10$$

Ahora el total de estudiantes es $12k$

$$\text{hombres: } \frac{7}{12} \cdot 12k = 7k$$

$$\text{mujeres: } 5k$$

Por dato:

$$7k - 5k = 10$$

Por lo tanto, el total de estudiantes está representada por $12k = 12(5) = 60$

RPTA: D

5. La suma de los inversos multiplicativos de dos números es $0,3333\dots$ y la diferencia de los cuadrados de los inversos multiplicativos es $1/18$. Halle la suma de los cuadrados de los inversos multiplicativos.

- A. $1/9$
- B. $5/72$
- C. $3/8$
- D. $1/24$
- E. $1/16$

RESOLUCIÓN:

Sean los números a y b :

Por dato:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3} \dots i$$

También

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{18}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{18}$$

Reemplazando (i)

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{6} \dots (ii)$$

Resolviendo las ecuaciones (i) y (ii) se obtiene

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{12}$$

Nos piden:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{5}{72}$$

RPTA: B

6. La señora Rosa, va al mercado y gasta $\frac{5}{8}$ de su dinero, pero poniéndose a pensar dice: "si en vez de gastar los $\frac{5}{8}$ hubiera gastado los $\frac{2}{5}$ de mi dinero ahora tendría S/ 72 más de lo que tengo". A partir de la información, determinar cuánto dinero no gastó la sra. Rosa.

- A. S/ 120
- B. S/ 194
- C. S/ 320
- D. S/ 192
- E. S/ 140

RESOLUCIÓN:

Planteamos lo acontecido.

Total, de dinero "x"

$$\text{Gastó: } \frac{5x}{8}; \quad \text{No gastó: } x - \frac{5x}{8} = \frac{3x}{8}$$

Segunda proposición del enunciado.

$$\text{Gastaría: } \frac{2x}{5}; \quad \text{No gastaría: } x - \frac{2x}{5} = \frac{3x}{5}$$

Hallamos el total de dinero.

$$\frac{3x}{5} - \frac{3x}{8} = 72$$

$$x = S/ 320$$

Nos pide lo que no gasto la señora Rosa.

$$\text{No gasto: } \frac{3x}{8} = \frac{3(320)}{8} = S/ 120$$

Por tanto, la sra. Rosa no gastó S/ 120 en su compra.

RPTA: A

7. En el baile de promoción de una Institución Educativa hay "a" señoritas más que jóvenes y cuando llegan "b" parejas al baile, resulta que el número de los jóvenes constituye los $\frac{3}{10}$ del total de asistentes. ¿Cuántos jóvenes había inicialmente?

- A. $\frac{2a-3b}{3}$
- B. $\frac{4a-3b}{2}$
- C. $\frac{3a-4b}{3}$
- D. $\frac{3a-4b}{4}$
- E. $\frac{5a-3b}{4}$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, tenemos:

+b parejas



	Inicio	Después
Jóvenes	x	$x + b$
Señoritas	$x + a$	$x + a + b$

Luego:

$$x + b = \frac{3}{10}(2x + 2b + a)$$

$$10x + 10b = 6x + 6b + 3a$$

$$4x = -4b + 3a$$

$$x = \frac{3a - 4b}{4}$$

RPTA: D

8. Ricky en uno de sus libros de matemática encontró la fracción $\frac{18}{45}$ y su hermano que se encuentra en proceso de preparación para dar el examen de ingreso a la universidad le pregunta. ¿Cuántas fracciones equivalentes tiene como denominador a un número de tres cifras que no es par?

- A. 80
- B. 90
- C. 75
- D. 56
- E. 75

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, tenemos:

$$f = \frac{18}{45} \rightarrow \frac{2k}{5k}$$

Nos centramos en el denominador $5k$, que debe ser un número de 3 cifras

$$100 \leq 5k < 1000$$

$$20 \leq k < 200$$

$k = 20, 21, 22, \dots, 199$ (180 denominadores)

separando los pares se tiene: 90 números

RPTA: B

3.4 NÚMEROS IRRACIONALES

Un número irracional es aquel que tiene infinitas cifras decimales no periódicas; además no puede expresarse como una fracción.

Los números irracionales pueden ser:

- **Números irracionales algebraicos.** Son soluciones inexactas de ecuaciones algebraicas.

EJEMPLO:

$y^2 = 6$, tiene dos soluciones irracionales

$$y_1 = \sqrt{6} \wedge y_2 = -\sqrt{6}.$$

- **Números irracionales trascendentes.** No son soluciones de una ecuación algebraica.

EJEMPLO:

$$\pi = 3,14159 \dots; e = 2,7182 \dots; 5^{\sqrt{5}} = 36,5548 \dots; etc$$

Se debe tener en cuenta que:

- ☞ Los números irracionales no pueden ser representados por fracción alguna.
- ☞ Algunos de estos números irracionales son el resultado de efectuar ciertas operaciones de radicación, por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1,4142135\dots$$

$$\sqrt{3} = 1,73231\dots$$

$$\sqrt{5} = 2,2360679\dots$$

- ☞ Otros números irracionales son llamados **trascendentes** como

$$\pi; e; \varphi$$

$$\pi = 3,14159265\dots$$

$$e = 2,71828128\dots$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0,61803398\dots$$

- ☞ El conjunto $\mathbb{Q}$ y el conjunto $\mathbb{I}$ son disjuntos entre sí

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

- ☞ Al conjunto $\mathbb{I}$ también se le simboliza por $\mathbb{Q}'$

Trabajar con números irracionales implica que podamos trabajar con radicales

- ☞ **Radicales Semejantes:** Son aquellos que presentan la misma parte radical.

EJEMPLO: $3\sqrt{2}; 4\sqrt{2}; -3\sqrt{2}; -\sqrt{2}$, son semejantes

- ☞ **Extracción de un Factor de un Radical:** Consiste en extraer un factor del radicando que aparece elevado al índice del radical.

EJEMPLO 1: $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

EJEMPLO 2: $\sqrt{675} = \sqrt{5^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 15\sqrt{3}$

👉 **Introducción de un Factor:** Es la operación contraria a la extracción y se realiza elevando el factor al índice del radical:

EJEMPLO: $2\sqrt{6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{24}$

3.4.1 OPERACIONES CON NÚMEROS IRRACIONALES

3.4.1.1 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS IRRACIONALES

Podemos sumar o restar números irracionales solamente cuando tengamos radicales semejantes.

EJEMPLO:

$$2\sqrt{27} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{12} - \sqrt{48} = 6\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{27} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{12} - \sqrt{48} = \sqrt{3}$$

3.4.1.2 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS IRRACIONALES

Para el caso de la multiplicación solo se debe verificar que los índices sean iguales. Si fuese así se multiplican los coeficientes y luego las partes internas de los radicales.

EJEMPLO: $(2\sqrt{8})(-3\sqrt{3}) = 2(-3)\sqrt{8 \cdot 3} = -6\sqrt{24}$

RECUERDA QUE

Un radical $\sqrt[n]{b^m}$ se puede escribir así: $\sqrt[nk]{b^{mk}}$
Es decir, se puede multiplicar por un número al índice y exponente sin alterar su valor.

Radicales simples:

▪ $\sqrt[3]{5x+3}; \sqrt{x-1}$

Radicales dobles:

$$\sqrt[n]{A \pm \sqrt[m]{B}}$$

▪ $\sqrt{5+\sqrt{2}}; \sqrt[3]{3-2\sqrt{3}}$

3.4.2 TRANSFORMACIÓN DE UN RADICAL DOBLE EN SIMPLE

3.4.2.1 PARA UN RADICAL DE LA FORMA $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Solo si: $\sqrt{A^2 - B} = C$

Donde C es raíz exacta, si esto es cierto, entonces:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

EJEMPLO: Expresa $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ en radicales simples

Donde $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+\sqrt{72}}$

$$A = 11 \wedge B = 72 \rightarrow C = \sqrt{11^2 - 72} = 7$$

Luego, $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{11+7}{2}} + \sqrt{\frac{11-7}{2}} = 3 + \sqrt{2}$

$$\therefore \sqrt{11+6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$$

REGLA PRÁCTICA:

Conseguir un trinomio cuadrado perfecto en el radicando. Así:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{A \pm \sqrt{4b}} = \sqrt{A \pm 2\sqrt{b}}$$

$\underbrace{\quad}_{x+y} \quad \underbrace{\quad}_{x \cdot y}$

$$\rightarrow A \pm 2\sqrt{b} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$$

Y esto se reduce a:

$$\sqrt{A \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}; x > y$$

Luego, si $x > y$ se tiene:

$$\sqrt{x + y \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

EJEMPLO:

Transformar $\sqrt{10 + \sqrt{84}}$ a radicales simples

$$\text{Transformamos: } \sqrt{10 + \sqrt{84}} = \sqrt{\underbrace{10}_{7+3} + 2\sqrt{\underbrace{21}_{7 \cdot 3}}}$$

$$\sqrt{10 + \sqrt{84}} = \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

3.4.2.2 PARA UN RADICAL DE LA FORMA $\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}}$

$$\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}} = \sqrt{A + 2\sqrt{\underbrace{\alpha}_{xy}} + 2\sqrt{\underbrace{p}_{xz}} + 2\sqrt{\underbrace{\theta}_{yz}}}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2} \\ &= \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \end{aligned}$$

Donde $\{A; \alpha; \beta; \theta; x; y; z\} \subset \mathbb{R}^+$

EJEMPLO: Transformar a radicales simples la expresión M

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{24 + \sqrt{240} + \sqrt{336} + \sqrt{140}} \\ M &= \sqrt{24 + 2\sqrt{5 \cdot 12} + 2\sqrt{7 \cdot 12} + 2\sqrt{7 \cdot 5}} \\ &\quad \underbrace{5 + 12 + 7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{5} + \sqrt{12} + \sqrt{7} \\ \therefore M &= \sqrt{5} + 2\sqrt{3} + \sqrt{7} \end{aligned}$$

3.4.3 RACIONALIZACIÓN DE RADICALES

Racionalizar una fracción consiste en transformarla en otra equivalente sin radicales en el denominador.

Caso 1: Cuando el denominador es de la forma $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$), se multiplica tanto el numerador como el denominador por el factor racionalizador $\sqrt[n]{b^{n-m}}$.

EJEMPLO: Racionalizar $\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^{4-1}}}{\sqrt[4]{5^{4-1}}} = \frac{2\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^1 \cdot 5^3}} = \frac{2\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{2\sqrt[4]{5^3}}{5}$$

Caso 2: Cuando el denominador es de la forma $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$, se multiplica el numerador y el denominador por la conjugada del denominador.

EJEMPLO: Racionalizar $\frac{6}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

$$\frac{6}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{6(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{7 - 5} = \frac{6(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{2} = 3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Javier tiene que determinar el valor de a en la siguiente igualdad:

$$\sqrt{0,00\hat{a} + 2(0,0\hat{a}) + 0,\hat{a}} = 0,7\hat{3}$$

Si logró resolver correctamente la ecuación, ¿cuál fue su respuesta?

- A. 24
- B. 4
- C. 36
- D. 12
- E. 5

RESOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \sqrt{0,00\hat{a} + 2(0,0\hat{a}) + 0,\hat{a}} &= 0,7\hat{3} \\ \sqrt{\frac{a}{900} + 2 \cdot \frac{a}{90} + \frac{a}{9}} &= \frac{73 - 7}{90} \\ \sqrt{\frac{a}{900} + 2 \cdot \frac{10a}{900} + \frac{100a}{900}} &= \frac{66}{90} \\ \sqrt{\frac{a}{900} + \frac{20a}{900} + \frac{100a}{900}} &= \frac{66}{90} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{121a}{900}} &= \frac{66}{90} \\ \frac{11\sqrt{a}}{30} &= \frac{66}{90} \\ \sqrt{a} &= \frac{6}{3} \\ \sqrt{a} &= 2 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

Por tanto, el valor que obtuvo Javier fue 4.

RPTA: B

2. La edad de Wilber se obtiene al sumar las cantidades subradicales al transformar en radicales simples la siguiente expresión:

$$\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}}$$

Calcular la edad de Wilber.

- A. 12
- B. 13
- C. 15
- D. 5
- E. 7

RESOLUCIÓN:

Por dato:

$$\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{49 + 20\sqrt{6}}}$$

Transformamos a radicales simples:

$$\sqrt{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{49 + 2\sqrt{600}} = \sqrt{25} + \sqrt{24}$$

$$\text{Luego; } \sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ \sqrt{25 + 24} & & \sqrt{25 \cdot 24} \\ \sqrt{2 + 3} & & \sqrt{2 \cdot 3} \end{array}$$

$$\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Por tanto, Wilber tiene: $2 + 3 = 5$ años.

RPTA: D

3. Calcular n si se cumple lo siguiente:

$$\sqrt{6 + 2n\sqrt{10 + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}}} = \sqrt{7} + 1$$

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

RESOLUCIÓN:

Convertimos a radicales simples: $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} - 1$

$$\sqrt{6 + 2n\sqrt{10 + 2(\sqrt{7} - 1)}} = \sqrt{7} + 1$$

$$\sqrt{6 + 2n\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}} = \sqrt{7} + 1$$

$$\sqrt{6 + 2n\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2}} = \sqrt{7} + 1$$

$$\sqrt{6 + 2n(\sqrt{7} + 1)} = \sqrt{7} + 1$$

Para que se cumpla la igualdad, necesariamente $n = 1$.

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 1$$

$$\therefore n = 1$$

RPTA: B

4. Antes de determinar la dosis de una medicina para un paciente, algunos doctores a veces calculan su área de superficie corporal o (BSA por sus siglas en inglés). Una manera de determinar el BSA de un paciente es usando la siguiente fórmula:

$$BSA = \sqrt{\frac{\omega h}{3600}}$$

Donde ω representa el peso en libras, h altura en centímetros y el BSA es medido en metros cuadrados. Si Daniel pesa 200 libras y tiene un BSA de $\sqrt{10} \text{ m}^2$, ¿qué altura tiene Daniel en cm?

- A. 163 cm
- B. 187 cm
- C. 164 cm
- D. 180 cm
- E. 174 cm

RESOLUCIÓN:

Por dato:

$$BSA = \sqrt{\frac{\omega h}{3600}} \rightarrow \sqrt{10} = \sqrt{\frac{200h}{3600}}$$

Elevamos al cuadrado la expresión

$$\sqrt{10}^2 = \sqrt{\frac{200h}{3600}}$$

$$10 = \frac{200h}{3600}$$

De donde se obtiene que $h = 180$

Por tanto, Daniel tiene una altura de 180 cm.

5. Luego de racionalizar la expresión:

$$\frac{4}{a + b - \sqrt{2ab}}$$

Indicar su denominador.

- A. $a - b$
- B. $a - b$
- C. $a^2 - b^2$
- D. ab
- E. $a^2 + b^2$

RESOLUCIÓN:

Multiplicamos y dividimos por su factor racionalizante:

$$\frac{4}{a + b - \sqrt{2ab}} \cdot \frac{a + b + \sqrt{2ab}}{a + b + \sqrt{2ab}} = \frac{4(a + b + \sqrt{2ab})}{(a + b)^2 - (\sqrt{2ab})^2}$$

$$= \frac{4(a + b + \sqrt{2ab})}{a^2 + b^2 + 2ab - 2ab}$$

$$= \frac{4(a + b + \sqrt{2ab})}{a^2 + b^2}$$

Por lo tanto, su denominador es $a^2 + b^2$.

RPTA: D

6. Transformar a radicales simples la expresión M .

$$M = \sqrt{24 + \sqrt{240} + \sqrt{336} + \sqrt{140}}$$

- A. $\sqrt{5} + \sqrt{12} + \sqrt{7}$
- B. $\sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{13}$
- C. $\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$
- D. $\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{7}$
- E. $\sqrt{3} + \sqrt{10} + \sqrt{13}$

RESOLUCIÓN:

Transformamos el radicando:

$$M = \sqrt{24 + 2\sqrt{60} + 2\sqrt{84} + 2\sqrt{35}}$$

$$2\sqrt{60} = 2\sqrt{5 \cdot 12}$$

$$2\sqrt{84} = 2\sqrt{7 \cdot 12}$$

$$2\sqrt{35} = 2\sqrt{7 \cdot 5}$$

$$\text{Y también } 24 = 5 + 12 + 7$$

De la expresión " M " transformamos el radicando en un trinomio cuadrado perfecto:

$$M = \sqrt{24 + \sqrt{240} + \sqrt{336} + \sqrt{140}} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{12} + \sqrt{7})^2}$$

$$\therefore M = \sqrt{5} + \sqrt{12} + \sqrt{7}$$

RPTA: A

7. Indicar uno de los radicales simples luego de transformar la siguiente expresión:

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{2 - x^2}}, \text{ con } 1 < x < \sqrt{2} \wedge x \in \mathbb{Q}$$

RPTA: E

- A. $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$
 B. $\sqrt{\frac{2+x^2}{2}}$
 C. $\sqrt{\frac{x}{2}}$
 D. $\sqrt{\frac{1}{2-x^2}}$
 E. $\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

RESOLUCIÓN:

Si $A = \frac{1}{x}$; $B = 2 - x^2$, entonces

$$C = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - (2 - x^2)} = \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2}}$$

El numerador de la cantidad subradical es un T.C.P.

$$C = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

Luego, en la expresión inicial:

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{2 - x^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{x} + x - \frac{1}{x}}{2}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{x} - \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{2 - x^2}} = \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{2 - x^2}{2x}}$$

Por lo tanto, uno de los radicales simples es $\sqrt{\frac{x}{2}}$.

RPTA: C

8. El perímetro de un pentágono regular es x metros. Si el lado de dicho pentágono mide $(\sqrt{x+5} - 1)$ metros, determine el área de un triángulo equilátero de lado $\sqrt{x}$ metros.

- A. $\frac{4\sqrt{6}}{3} m^2$
 B. $5\sqrt{3} m^2$
 C. $\frac{4\sqrt{3}}{7} m^2$
 D. $\frac{8\sqrt{3}}{5} m^2$
 E. $\sqrt{3} m^2$

RESOLUCIÓN:

Por ser un pentágono regular, los lados tienen la misma medida, entonces:

$$5(\sqrt{x+5} - 1) = x$$

Es una ecuación irracional

$$5\sqrt{x+5} - 5 = x \rightarrow 5\sqrt{x+5} = x + 5$$

Elevamos al cuadrado:

$$25(x+5) = x^2 + 10x + 25$$

$$x^2 - 15x - 100 = 0$$

$$(x - 20)(x + 5) = 0$$

$$x = 20 \vee x = -5$$

Como x es longitud, entonces debe ser positivo, es por ello que se va a considerar el valor de $x = 20$

Piden el área de un triángulo equilátero de lado $\sqrt{20}$ metros, tenemos:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{lado})^2$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{20})^2$$

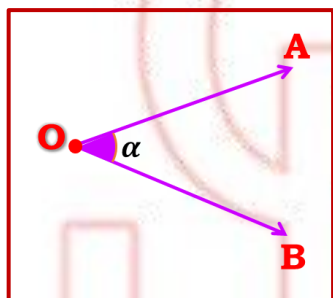
$$A = 5\sqrt{3} m^2$$

RPTA: B

3.5 ÁNGULOS

3.5.1 DEFINICIÓN DE ÁNGULOS

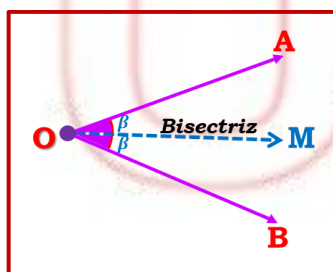
Es una figura geométrica formada por dos rayos que tienen el mismo origen. Los dos rayos son los lados del ángulo y el origen común es el vértice. La medida del ángulo dependerá únicamente de la abertura o separación de sus rayos (lados) y no de la longitud de estos.



ELEMENTOS:

- Vértice: O
- Lados: $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$
- Notación: $\angle AOB$
- Medida del ángulo:

$$m\angle AOB = \alpha$$



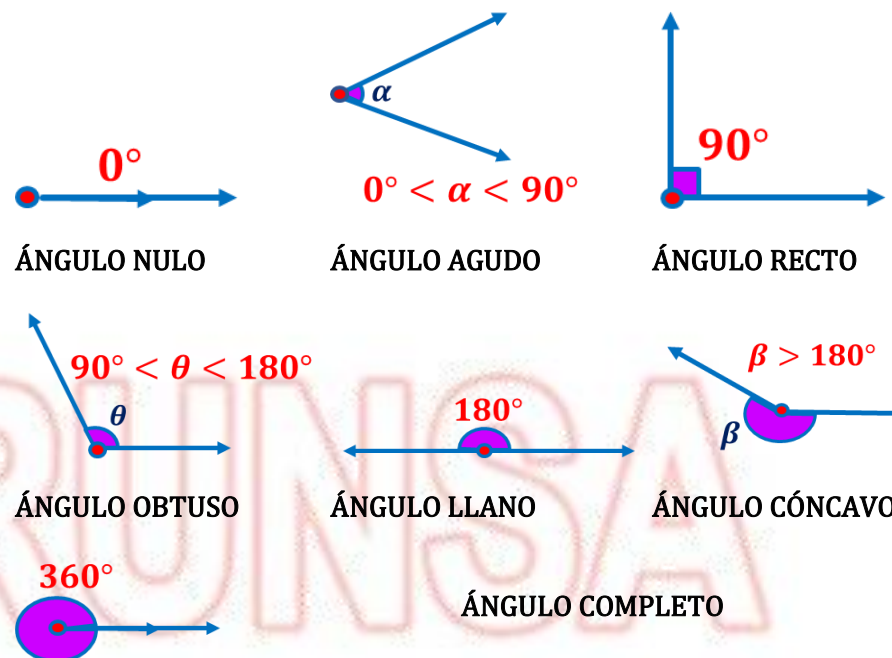
BISECTRIZ DE UN ÁNGULO:

Rayo que biseca al ángulo en dos ángulos congruentes.

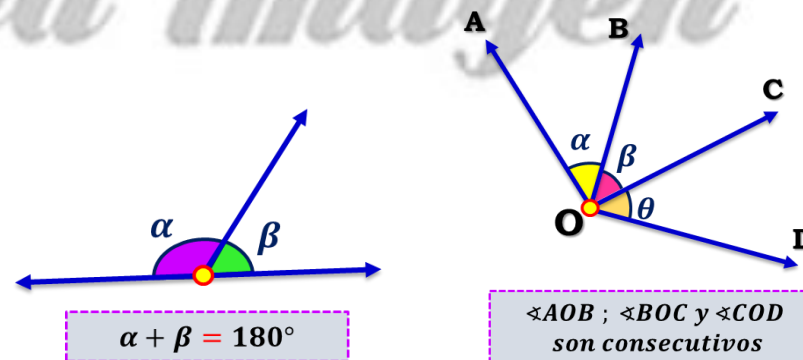
$$m\angle AOM = m\angle MOB$$

3.5.2 CLASIFICACIÓN

SEGÚN SU MEDIDA



SEGÚN LA POSICIÓN DE SUS LADOS

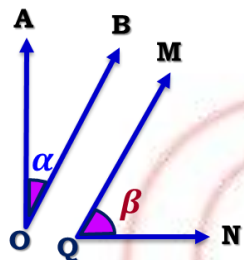


**ÁNGULOS ADYACENTES
SUPLEMENTARIOS**
ÁNGULOS CONSECUTIVOS

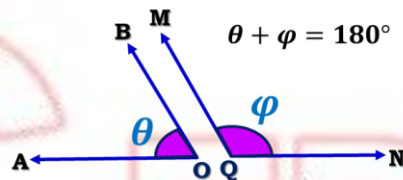
$$C_{\alpha} = 90^{\circ} - \alpha$$

$$S_{\alpha} = 180^{\circ} - \alpha$$

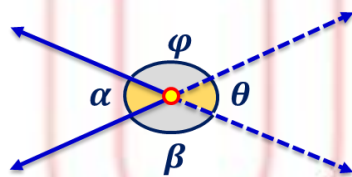
(PAR LINEAL)



$$C_{\alpha} = 90^{\circ} - \alpha$$



$$S_{\alpha} = 180^{\circ} - \alpha$$

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS
ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS


$$\alpha = \theta ; \varphi = \beta$$

**ÁNGULOS OPUESTOS POR EL
VÉRTICE**
3.5.3 COMPLEMENTO Y SUPLEMENTO DE UN ÁNGULO.
Complemento de un ángulo (C):

Es lo que le falta a un ángulo para ser igual a 90° .

Suplemento de un ángulo (S):

Es lo que le falta a un ángulo para ser igual a 180° .

RECUERDA:

Con ángulos complementarios

$$\underbrace{C.C.C \dots C(\beta)}_{\text{"n" veces}} = \begin{cases} \beta \leftrightarrow \text{Si "n" par} \\ C(\beta) \leftrightarrow \text{Si "n" impar} \end{cases}$$

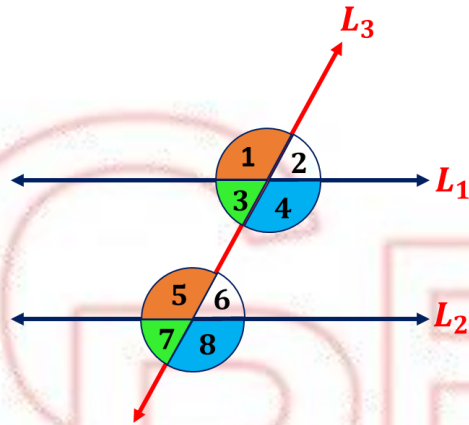
RECUERDA:

Con ángulos suplementarios

$$\underbrace{S.S.S \dots S(\alpha)}_{\text{"n" veces}} = \begin{cases} \alpha \leftrightarrow \text{Si "n" par} \\ S(\alpha) \leftrightarrow \text{Si "n" impar} \end{cases}$$

3.5.4 ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS AL SER CORTADAS POR UNA SECANTE O TRANSVERSAL

Si: $\vec{L}_1 // \vec{L}_2$



Ángulos internos	Están dentro de las rectas: $\angle 3$; $\angle 4$; $\angle 5$; $\angle 6$
Ángulos externos	Están fuera de las rectas: $\angle 1$; $\angle 2$; $\angle 7$; $\angle 8$
Ángulos alternos internos Son dos ángulos internos no adyacentes situados a distintos lados de la transversal $\angle 3$ y $\angle 6$; $\angle 4$ y $\angle 5$	PROPIEDAD: Los ángulos alternos internos son iguales.
Ángulos alternos externos Son dos ángulos externos no adyacentes situados a distintos lados de la transversal $\angle 1$ y $\angle 8$; $\angle 2$ y $\angle 7$	PROPIEDAD: Los ángulos alternos externos son iguales.

Ángulos conjugados internos

Son dos ángulos internos situados a un mismo lado de la transversal
 $\angle 3$ y $\angle 5$; $\angle 4$ y $\angle 6$

PROPIEDAD:

Los ángulos conjugados internos son suplementarios.

Ángulos conjugados externos

Son dos ángulos externos situados a un mismo lado de la transversal
 $\angle 1$ y $\angle 7$; $\angle 2$ y $\angle 8$

PROPIEDAD:

Los ángulos conjugados externos son suplementarios.

Ángulos correspondientes

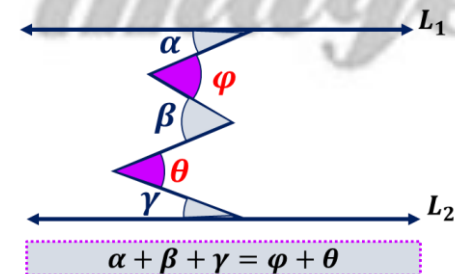
Son dos ángulos no adyacentes, uno interno y otro externo, situados a un mismo lado de la transversal
 $\angle 1$ y $\angle 5$; $\angle 3$ y $\angle 7$; $\angle 2$ y $\angle 6$; $\angle 4$ y $\angle 8$

PROPIEDAD:

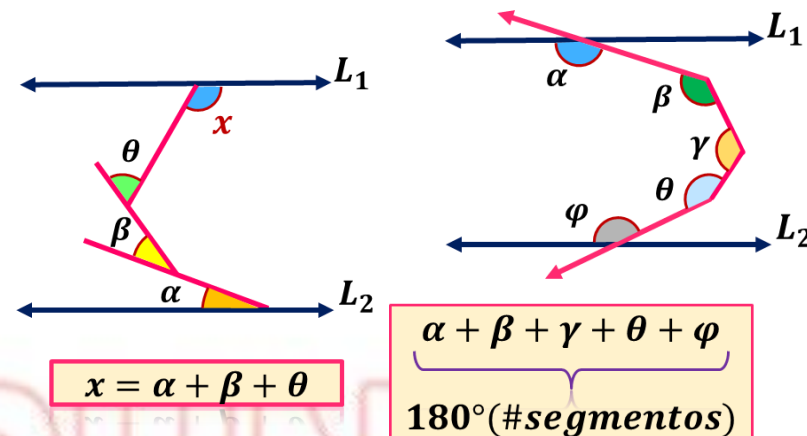
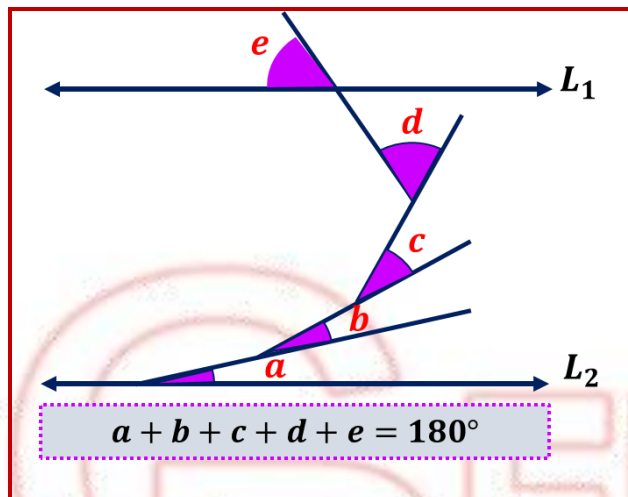
Los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales.

3.5.5 PROPIEDADES:

A) Si: $L_1 // L_2$

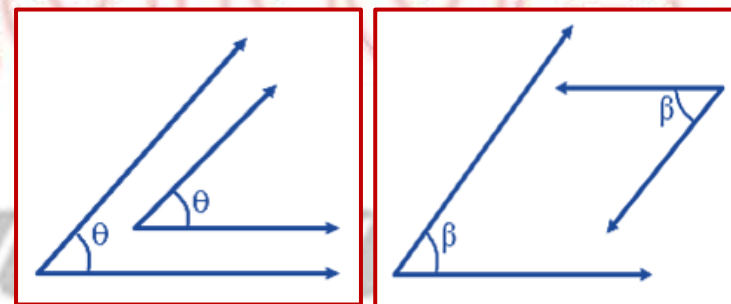
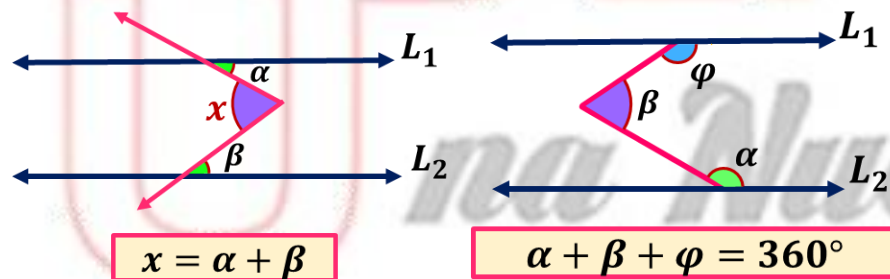


B) Si: $L_1 // L_2$

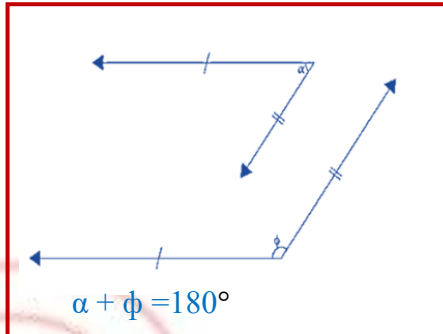
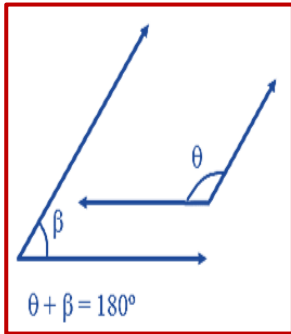


ÁNGULOS DE LADOS PARALELOS:
CONGRUENTES

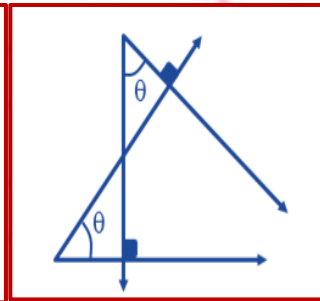
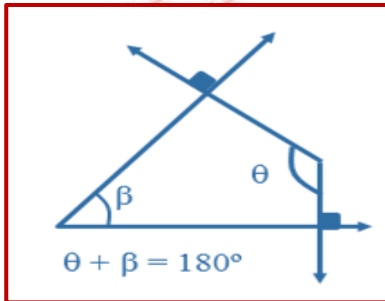
PROPIEDADES ADICIONALES ($L_1 // L_2$)



SUPLEMENTARIOS



ÁNGULOS DE LADOS PERPENDICULARES:



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcule el valor de un ángulo sabiendo que los $\frac{3}{4}$ del suplemento de su complemento es igual a un ángulo recto.

- A. 53°
- A. 25°
- B. 38°
- C. 45°
- D. 30°

RESOLUCIÓN:

Sea el ángulo = β

Según el enunciado se tiene:

$$\frac{3}{4}SC_\beta = 90^\circ$$

Luego:

$$\frac{3}{4}[180^\circ - (90^\circ - \beta)] = 90^\circ$$

$$[180^\circ - 90^\circ + \beta] = 90^\circ \left(\frac{4}{3}\right)$$

$$90^\circ + \beta = 120^\circ$$

$$\therefore \beta = 30^\circ$$

RPTA: E

2. Calcular un ángulo si el complemento de la cuarta parte del suplemento del complemento del ángulo es igual al complemento del doble del ángulo más 16° .

- A. 22°
- B. 30°
- C. 24°
- D. 52°
- E. 15°

RESOLUCIÓN:

Sea θ el ángulo.

Según el enunciado:

$$90^\circ - \frac{1}{4}SC_\theta = C_{2\theta} + 16$$

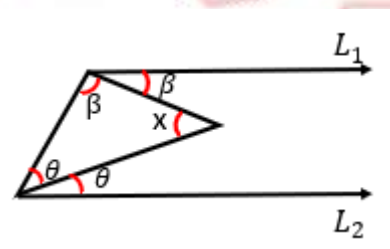
$$90^\circ - \frac{[180^\circ - (90^\circ - \theta)]}{4} = (90^\circ - 2\theta) + 16^\circ$$

$$-\frac{[180^\circ - (90^\circ - \theta)]}{4} = (90^\circ - 2\theta) + 16^\circ - 90^\circ$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{[180^\circ - (90^\circ - \theta)]}{4} &= -2\theta + 16^\circ \\
 180^\circ - 90^\circ + \theta &= 8\theta - 64^\circ \\
 90^\circ + 64^\circ &= 8\theta - \theta \\
 154^\circ &= 7\theta \\
 \therefore \theta &= 22^\circ
 \end{aligned}$$

RPTA: A

3. Del gráfico mostrado, calcular "x" si $\vec{L}_1 \parallel \vec{L}_2$.



- A. 70°
 B. 82°
 C. 90°
 D. 50°
 E. 45°

RESOLUCIÓN:

Por propiedad: $x = \beta + \theta$

Por ángulos conjugados internos:

$$2\beta + 2\theta = 180^\circ$$

Luego:

$$\beta + \theta = 90^\circ$$

Por lo tanto:

$$x = 90^\circ$$

RPTA: C

4. Si C es complemento:

$$CC_{2\alpha} + CCCC_{4\alpha} + CCCCCC_{6\alpha} + \dots + CCC \dots C_{2n\alpha} = 42\alpha$$

Calcular "n"

- A. 5
 B. 2
 C. 6
 D. 4
 E. 7

RESOLUCIÓN:

Se tiene:

$$CC_{2\alpha} + CCCC_{4\alpha} + CCCCCC_{6\alpha} + \dots + CCC \dots C_{2n\alpha} = 42\alpha$$

Por propiedad.

$$2\alpha + 4\alpha + 6\alpha + \dots + 2n\alpha = 42\alpha$$

$$2\alpha(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 42\alpha$$

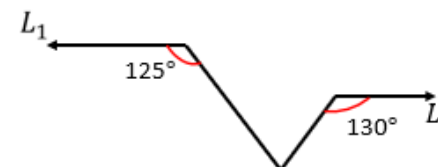
$$\frac{n(n+1)}{2} = 21$$

$$n(n+1) = 42$$

$$n(n+1) = 6(6+1)$$

$$\therefore n = 6$$

RPTA: C

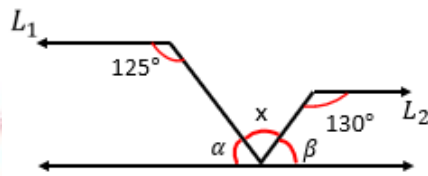
5. Si $\vec{L}_1 \parallel \vec{L}_2$, calcular "x"

- A. 70°
 B. 65°
 C. 80°
 D. 75°

E. 50°

RESOLUCIÓN:

Trazamos en el gráfico $\vec{L}_3 \parallel \vec{L}_1$



Por ángulos conjugados internos:

$$125^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 55^\circ$$

$$130^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 50^\circ$$

Por ángulos suplementarios:

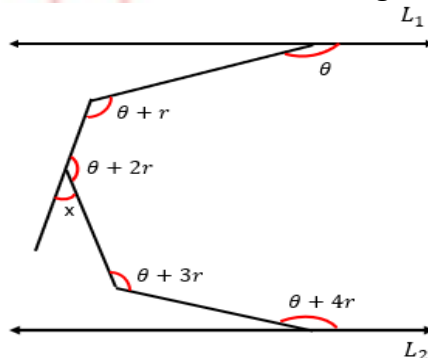
$$\alpha + x + \beta = 180^\circ$$

$$55^\circ + x^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 75^\circ$$

RPTA: D

6. Del siguiente gráfico hallar la medida del ángulo "x".



A. 30°

B. 25°

C. 36°

D. 45°

E. 52°

RESOLUCIÓN:

Por propiedad:

$$\theta + \theta + r + \theta + 2r + \theta + 3r + \theta + 4r = 180^\circ(4)$$

$$5\theta + 10r = 720^\circ$$

$$\theta + 2r = 144^\circ$$

Por ángulos suplementarios:

$$x + \theta + 2r = 180^\circ$$

Luego:

$$x + 144^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 144^\circ$$

Por lo tanto:

$$x = 36^\circ$$

RPTA: C

7. Se tiene los ángulos consecutivos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$; tal que:

$$m\angle POQ + m\angle ROS = 140^\circ$$

Siendo los rayos $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$, $\vec{OR}$ y $\vec{OS}$ las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$, $\angle COD$, $\angle AOC$ y $\angle BOD$ respectivamente. Hallar la $m\angle AOD$.

A. 100°

B. 110°

C. 120°

D. 130°

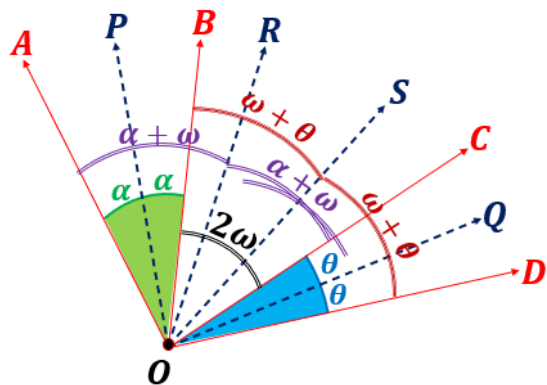
E. 140°

RESOLUCIÓN:

Por dato se tiene:

$$m\angle POQ + m\angle ROS = 140^\circ$$

Del gráfico se tiene:



$$m\angle POQ = \alpha + 2\omega + \theta$$

$$m\angle ROS = m\angle BOS - m\angle BOR = \omega + \theta - (\alpha + \omega - 2\alpha)$$

Reemplazando:

$$\alpha + 2\omega + \theta + \omega + \theta - (\alpha + \omega - 2\alpha) = 140^\circ$$

$$2\alpha + 2\omega + 2\theta = 140^\circ$$

Pero se sabe que:

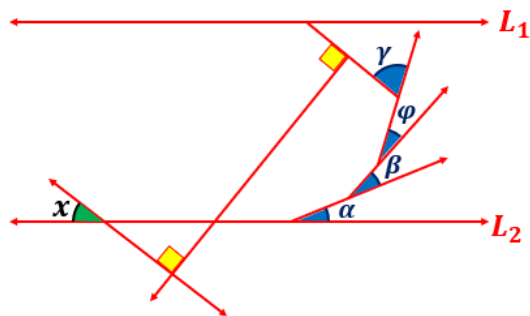
$$m\angle AOD = 2\alpha + 2\omega + 2\theta$$

Entonces:

$$m\angle AOD = 140^\circ$$

RPTA: E

8. En la figura, $L_1 \parallel L_2$, si $\alpha + \beta + \phi + \gamma = 140^\circ$, calcular "x".



A. 24°

B. 40°

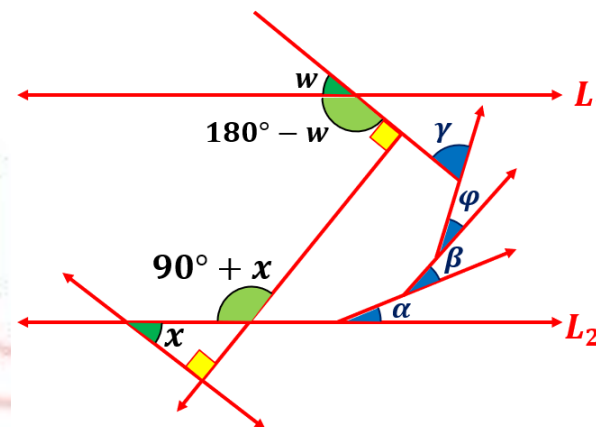
C. 34°

D. 140°

E. 100°

RESOLUCIÓN:

De la gráfica completando tenemos:



$$w + \alpha + \beta + \phi + \gamma = 180^\circ$$

Por dato:

$$\alpha + \beta + \phi + \gamma = 140^\circ$$

Reemplazando se tiene:

$$w + 140^\circ = 180^\circ$$

$$w = 40^\circ$$

Por propiedad:

$$180^\circ - w + 90^\circ + 90^\circ + x = 360^\circ$$

$$180^\circ - 40^\circ + 90^\circ + 90^\circ + x = 360^\circ$$

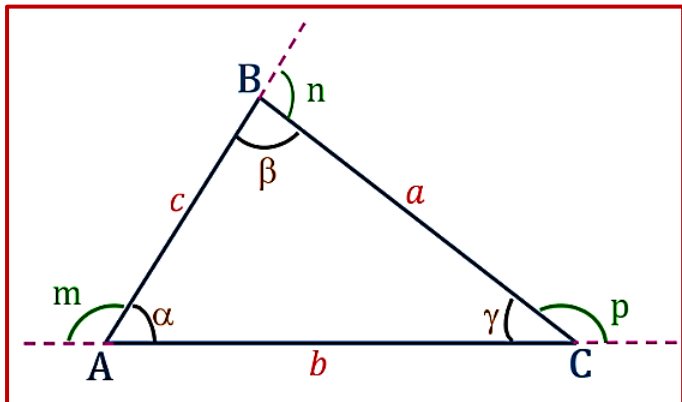
$$x = 40^\circ$$

RPTA: B

3.6 TRIÁNGULOS

3.6.1 DEFINICIÓN DE TRIÁNGULOS

Es la figura geométrica plana delimitada por tres segmentos no alineados.

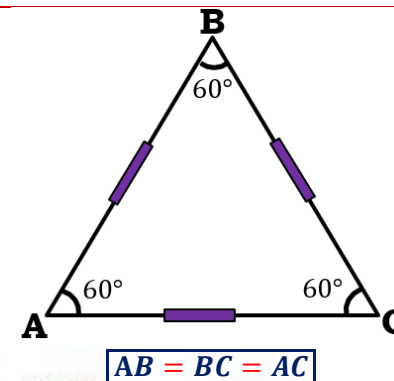
**ELEMENTOS**

- Vértices: A, B, C
- Lados: $\overline{AB}; \overline{BC}; \overline{AC}$
- Ángulos internos: α, β, γ
- Ángulos externos: m, n, p

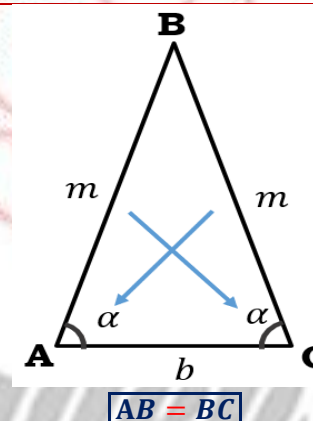
3.6.2 CLASIFICACIÓN

A) POR LA RELACIÓN ENTRE SUS LADOS.**TRIÁNGULO EQUILÁTERO**

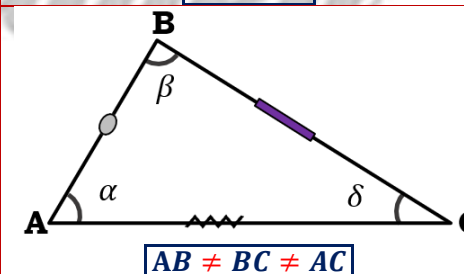
Sus tres lados son congruentes.

**TRIÁNGULO ISÓSCELES**

Dos lados son congruentes, el lado desigual se llama base, y los ángulos en la base son congruentes.

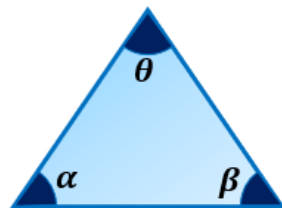
**TRIÁNGULO ESCALENO**

Los tres lados y los tres ángulos interiores no son congruentes.

**B) POR LAS MEDIDAS DE SUS ÁNGULOS.**

TRIÁNGULO ACUTÁNGULO

Los tres ángulos interiores son agudos.



$$\begin{aligned}\alpha &< 90^\circ \\ \beta &< 90^\circ \\ \theta &< 90^\circ\end{aligned}$$

TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO

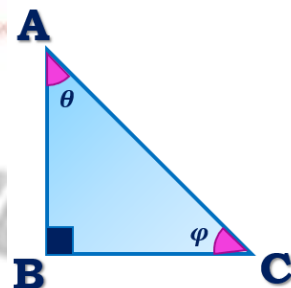
Un ángulo interior es obtuso (mayor de 90° , pero menor que 180°).



$$90^\circ < \varphi < 180^\circ$$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Un ángulo interior es recto (mide 90°)



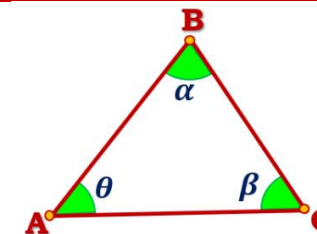
AB y BC : catetos
 AC : hipotenusa
 $\theta + \varphi = 90^\circ$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$AC > AB; AC > BC$$

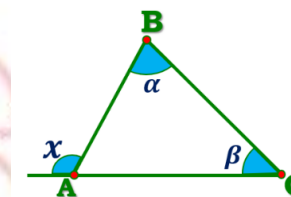
3.6.3 TEOREMAS FUNDAMENTALES.

- a) La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° .



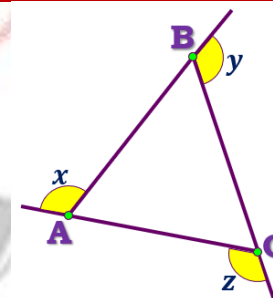
$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

- b) La medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes.



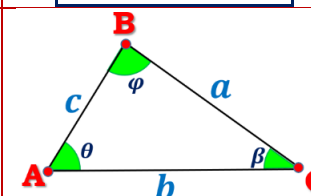
$$x = \alpha + \beta$$

- c) La suma de las medidas de los ángulos exteriores es igual a 360° .



$$x + y + z = 360^\circ$$

- d) En un triángulo, la longitud de uno de sus lados está comprendida entre la suma y la diferencia de los otros dos lados.

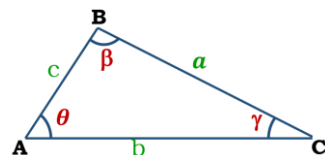


PROPIEDAD DE EXISTENCIA

Si: $a > b > c$

e) En todo triángulo se cumple que a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.

$$\begin{aligned} b - c &< a < b + c \\ a - c &< b < a + c \\ a - b &< c < a + b \end{aligned}$$



Si:

$$AC > BC > AB$$

Entonces:

$$b > a > c$$

f) Según la relación de sus lados se cumple que:

Si: $a > b > c \rightarrow$

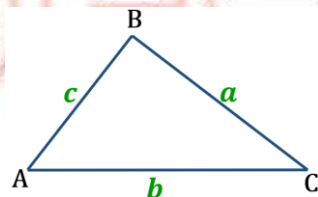
$$\angle BAC > \angle ABC > \angle BCA$$

Entonces:

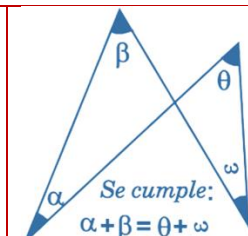
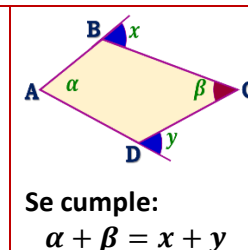
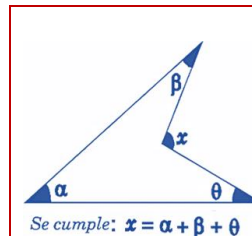
Si: $a^2 > b^2 + c^2$: Es $\triangle$ Obtusángulo

Si: $a^2 < b^2 + c^2$: Es $\triangle$ Acutángulo

Si: $a^2 = b^2 + c^2$: Es $\triangle$ Rectángulo



3.6.4 PROPIEDADES ADICIONALES:



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. En un triángulo ABC :

$$AB = 2x - 1; \quad BC = 3x + 1; \quad AC = 8 - x,$$

Hallar la longitud del mayor lado ($x \in \mathbb{Z}$).

A. 5 u

A. 6 u

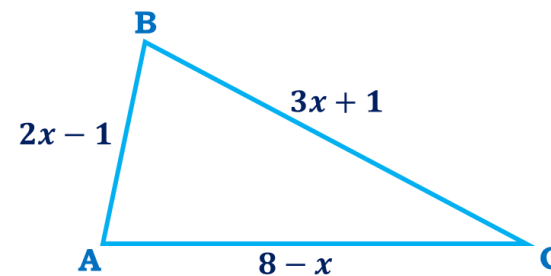
B. 7 u

C. 8 u

D. 9 u

RESOLUCIÓN:

Graficando de acuerdo a los datos:



Por el teorema de la existencia del triángulo:

$$(3x + 1) - (2x - 1) < 8 - x < (3x + 1) + (2x - 1)$$

$$x + 2 < 8 - x < 5x$$

$$x + 2 < 8 - x \quad \wedge \quad 8 - x < 5x$$

$$2x < 6 \quad \wedge \quad -6x < -8$$

$$x < 3 \quad \wedge \quad 3x > 4$$

$$x < 3 \quad \wedge \quad x > \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} < x < 3$$

Como "x" es entero:

$$\therefore x = 2$$

Luego, los lados miden:

$$AB = 2x - 1 = 2(2) - 1 = 3$$

$$BC = 3x + 1 = 3(2) + 1 = 7$$

$$AC = 8 - x = 8 - 2 = 6$$

Finalmente, la longitud del lado mayor es:

$$BC = 7 u.$$

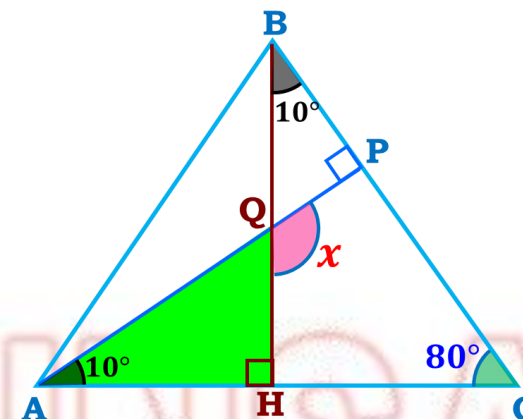
RPTA: C

2. En una estructura metálica en forma de triángulo ABC , dos arañas tejen sus telarañas $\overline{AP}$ y $\overline{BH}$, perpendiculares a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Si la $m\angle C = 80^\circ$, hallar el mayor ángulo que forman las telarañas al intersectarse.

- A. 80°
- B. 75°
- C. 110°
- D. 100°
- E. 95°

RESOLUCIÓN:

Graficando apropiadamente y completando datos:



$\triangle APC$, por ángulos agudos complementarios:

$$m\angle PAC = 10^\circ$$

$\triangle BHC$, por ángulos agudos complementarios:

$$m\angle HBC = 10^\circ$$

Luego:

$\triangle AHQ$, por ángulos agudos complementarios:

$$m\angle AQH = 80^\circ$$

Finalmente en "Q":

$$80^\circ + x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 100^\circ$$

RPTA: D

3. Las raíces de la siguiente ecuación:

$$x^3 - 4x^2 - 2x^2m + m^2x + 8mx - 4m^2 = 0,$$

son las longitudes de los lados de un triángulo. Hallar el menor valor entero de "m".

- A. 1
- B. 2
- C. 3

- D. 4
E. 5

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$x^3 - 4x^2 - 2x^2m + m^2x + 8mx - 4m^2 = 0$$

Ordenando:

$$x^3 - 4x^2 + m^2x - 4m^2 - 2x^2m + 8mx = 0$$

Factorizando:

$$x^2(x - 4) + m^2(x - 4) - 2mx(x - 4) = 0$$

$$(x - 4)(x^2 + m^2 - 2mx) = 0$$

$$(x - 4)(x^2 - 2mx + m^2) = 0$$

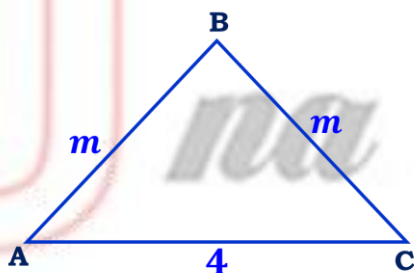
$$(x - 4) \underbrace{(x^2 - 2mx + m^2)}_{T.C.P.} = 0$$

$$(x - 4)(x - m)^2 = 0$$

$$(x - 4)(x - m)(x - m) = 0$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = m; \quad x_3 = m$$

Graficamos el triángulo:



Por teorema de la existencia del triángulo:

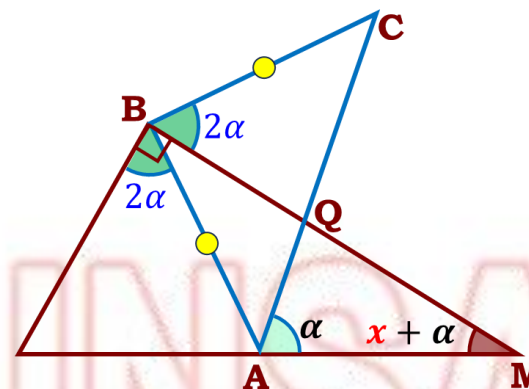
$$m - m < 4 < m + m$$

$$0 < 4 < 2m$$

$$2m > 4$$

$$m > 2$$

4. Por lo tanto, el menor valor entero de "m" es 3. En el siguiente gráfico, hallar el valor de "x"



- A. 30°
B. 45°
C. 42°
D. 36°
E. 48°

RESOLUCIÓN:

Haciendo: $m\angle ABQ = \theta$

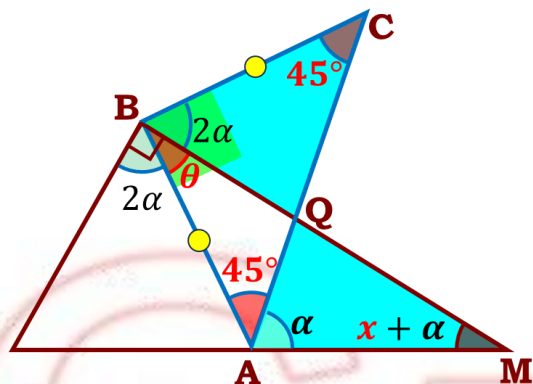
Se observa: $2\alpha + \theta = 90^\circ$

$\rightarrow m\angle CBA = 90^\circ$

$\therefore \triangle ABC$ es un triángulo rectángulo isósceles.

$$m\angle BCA = m\angle BAC = 45^\circ$$

RPTA: C



En $\triangle CBM$: Propiedad de la mariposa.

$$m\angle MBC + m\angle ACB = m\angle QAM + m\angle AMQ$$

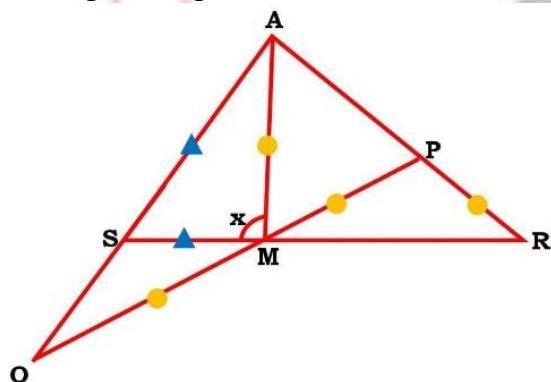
$$2\alpha + 45^\circ = \alpha + x + \alpha$$

$$2\alpha + 45^\circ = 2\alpha + x$$

$$\therefore x = 45$$

RPTA: B

5. Hallar "x" en el siguiente gráfico:



A. 30°

B. 28°

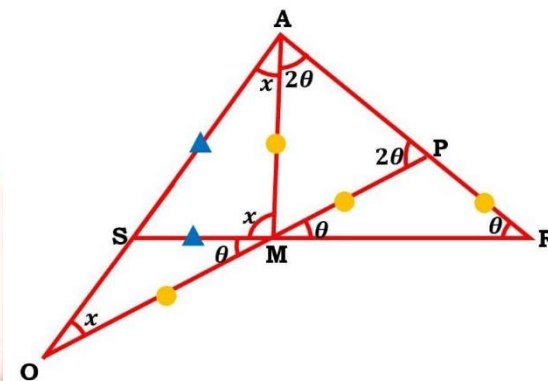
C. 40°

D. 36°

E. 54°

RESOLUCIÓN:

En el gráfico:



$\triangle MPR$ isósceles:

$$m\angle ARM = m\angle PMR = \theta$$

Por teorema del ángulo exterior:

$$m\angle APM = 2\theta$$

$\triangle AMP$: Isósceles $\rightarrow m\angle MAP = 2\theta$

$\triangle AMR$: Teorema del ángulo exterior:

$$x = 3\theta$$

$$\theta = \frac{x}{3} \dots (I)$$

$\triangle MAS$: Isósceles $\rightarrow m\angle MAS = x$

$\triangle AMO$: Isósceles $\rightarrow m\angle MOA = x$

$\triangle AMO$: Sumatoria de ángulos internos.

$$x + x + x + \theta = 180^\circ$$

$$3x + \theta = 180^\circ$$

Reemplazando (I):

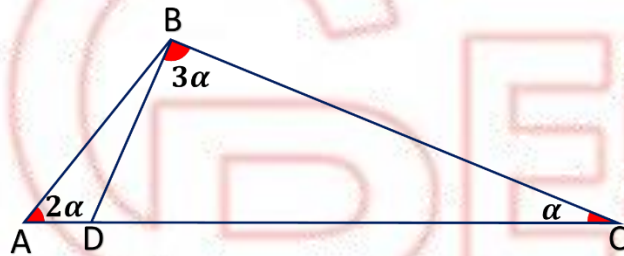
$$3x + \frac{x}{3} = 180^\circ$$

$$\frac{10x}{3} = 180^\circ$$

$$\therefore x = 54^\circ$$

RPTA: E

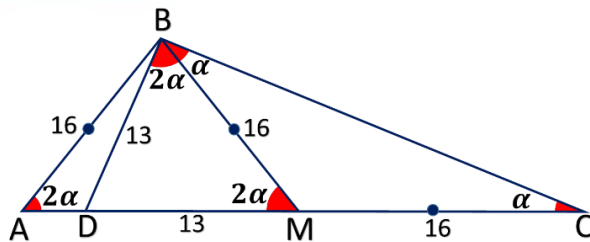
6. Un terreno tiene la forma de la figura mostrada, donde $AB = 16 \text{ m}$ y $BD = 13 \text{ m}$, si se va cercar $\overline{DC}$. Calcular la longitud de $\overline{DC}$.



- A. 24 m
- B. 29 m
- C. 27m
- D. 25m
- E. 30 m

RESOLUCIÓN:

En la gráfica:



Trazamos $\overline{BM}$ tal que $BM = AB$

$\triangle ABM$: Isósceles.

$$AB = BM = 16$$

$\triangle BMC$: Isósceles.

$$MC = 16$$

$\triangle BDM$: Isósceles.

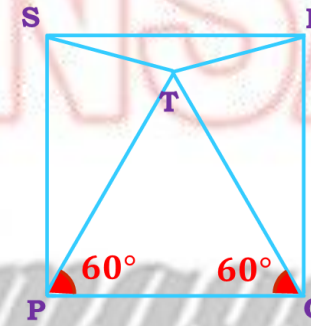
$$BD = DM = 13$$

Luego:

$$CD = 16 + 13 = 29 \text{ m}$$

RPTA: B

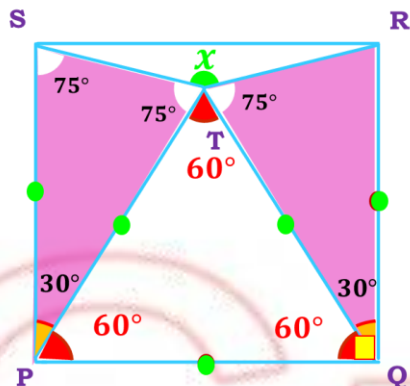
7. En la figura PQRS es un cuadrado y PQT es un triángulo equilátero, entonces la medida del ángulo STR es:



- A. 110°
- B. 130°
- C. 120°
- D. 150°
- E. 95°

RESOLUCIÓN:

Completamos la imagen de acuerdo a los datos



Analizamos la figura

Del ΔSPT : isósceles

$$m\angle PST = m\angle PTS = 75^\circ$$

Del ΔQRT : isósceles

$$m\angle QRT = m\angle QTR = 75^\circ$$

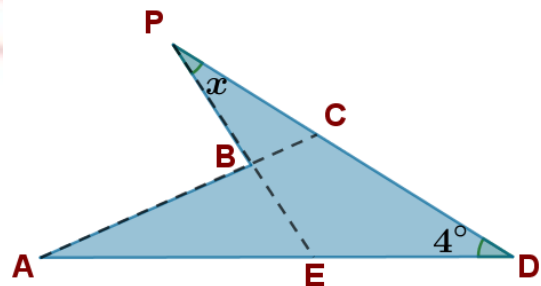
En el vértice T:

$$x + 75^\circ + 60^\circ + 75^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore x = 150^\circ$$

RPTA: D

8. Carlos está elaborando el nuevo logo de su empresa, se ha decidido por el siguiente diseño:



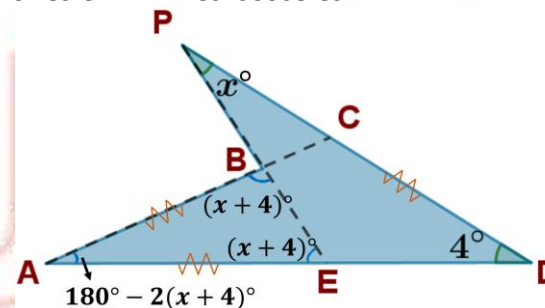
Si $AB = AE = CD$, calcula el valor entero de " x "

- A. 82°
- B. 83°
- C. 84°
- D. 85°
- E. 86°

RESOLUCIÓN:

Del ΔEPD , $m\angle AEP = x + 4^\circ$

De las condiciones el ΔABE es isósceles.



$$m\angle AEB = m\angle ABE = x + 4^\circ$$

$$m\angle BAE = 180^\circ - 2(x + 4^\circ) \dots (I)$$

También

$$x + 4^\circ < 90^\circ$$

$$x < 86^\circ \dots (II)$$

En el ΔACD , a mayor lado se opone mayor ángulo

$$180^\circ - 2(x + 4^\circ) < 4^\circ$$

$$84^\circ < x$$

$$x > 84^\circ \dots (III)$$

De (II) y (III)

$$84^\circ < x < 86^\circ$$

Como " x " es entero

$$\therefore x = 85^\circ$$

RPTA: D

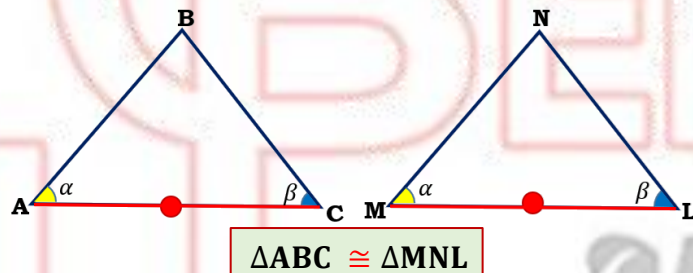
3.7 CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

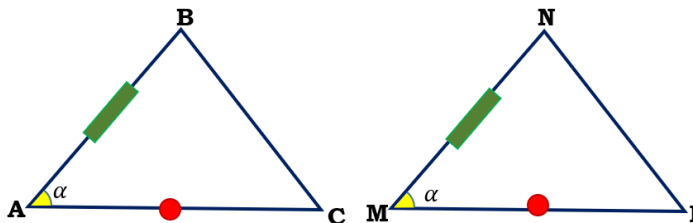
Dos triángulos son congruentes si sus lados y sus ángulos son respectivamente congruentes.
Esto implica que dos triángulos son congruentes si tienen igual forma e igual tamaño.

1.1.1 CASOS DE CONGRUENCIA**1ER CASO (ALA)****Ángulo – Lado – Ángulo**

Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes un lado y los ángulos adyacentes a él.

**2DO CASO (LAL)****Lado – Ángulo – Lado**

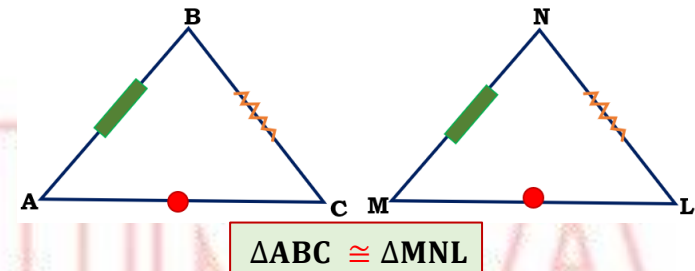
Dos triángulos son congruentes, si tienen congruentes dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.



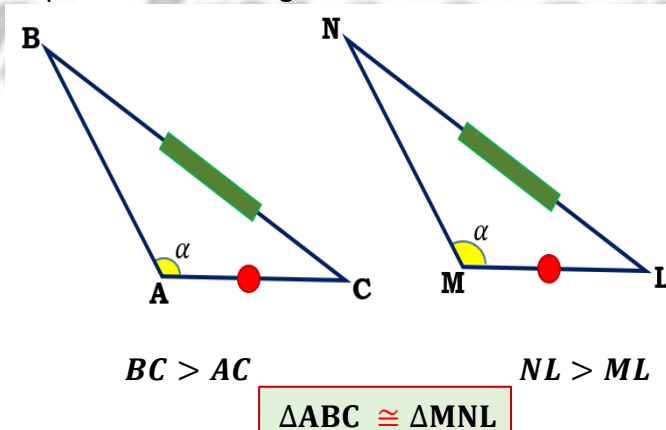
$$\Delta ABC \cong \Delta MNL$$

3ER CASO (LLL)**Lado – Lado – Lado**

Dos triángulos son congruentes si tienen los tres pares de lados respectivamente congruentes.

**4TO CASO (ALLM)****Ángulo – Lado – Lado Mayor**

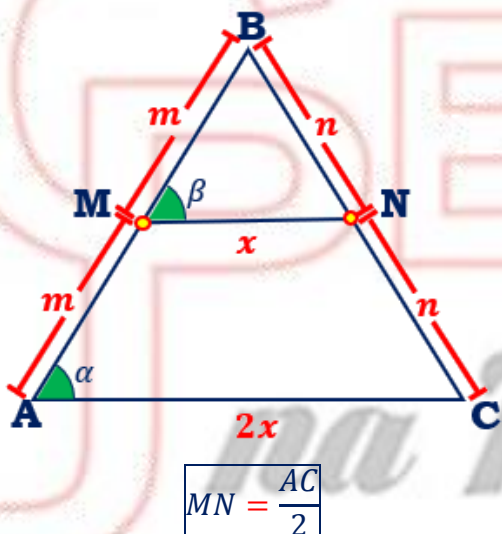
Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de los lados congruentes.



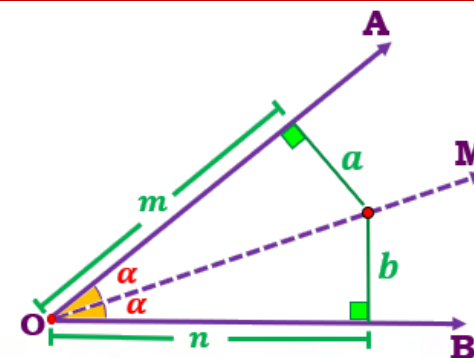
3.7.1 APLICACIONES DE CONGRUENCIA

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA**TEOREMA DE BASE MEDIA**

La base media es el segmento que une los puntos medios de dos lados y es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de la base.

**TEOREMA DE LA BISECTRIZ**

Todo punto que pertenece a la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dicho ángulo.

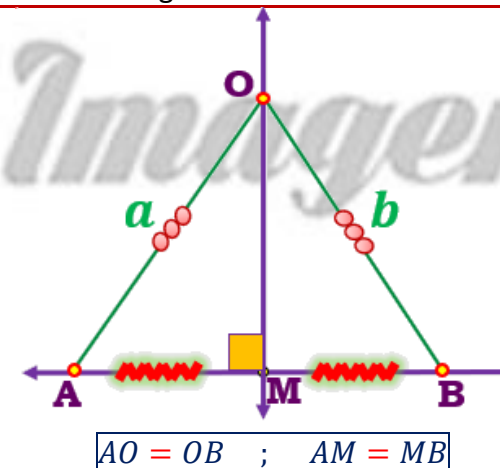


$$m = n$$

$$a = b$$

TEOREMA DE LA MEDIATRIZ

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.



En el triángulo AOB:

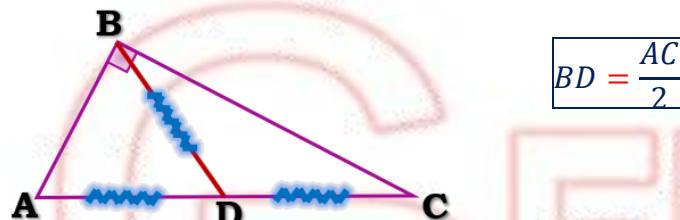
$\overline{OM}$: bisectriz

$\overline{OM}$: mediana

$\overline{OM}$: mediatriz

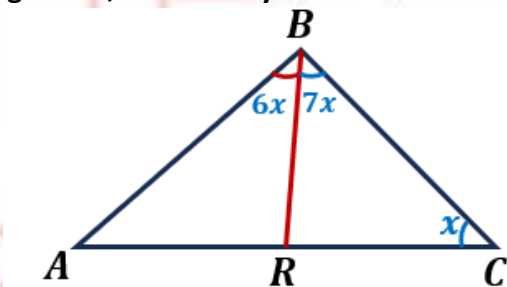
MEDIANA RELATIVA A LA HIPOTENUSA

En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

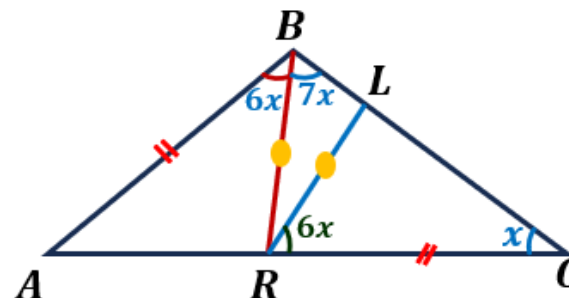
1. En la figura siguiente, $AB = RC$ y determinar el valor de " x ".



- A. 8°
- B. 10°
- C. 12°
- D. 14°
- E. 15°

RESOLUCIÓN:

Completamos información en el gráfico:



Trazamos $\overline{RL}$, tal que $BR = LR$ y $m\angle LRC = 6x$
 $\triangle ABR \cong \triangle CRL$ (LAL)

Deducimos que:

$$m\angle BAR = m\angle LCR = x$$

En el $\triangle ABC$: Sumatoria de ángulos internos.

$$x + 13x + x = 180^\circ$$

$$15x = 180$$

$$\therefore x = 12^\circ$$

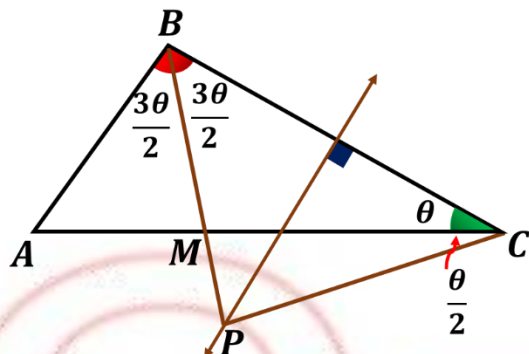
RPTA: C

2. En un triángulo acutángulo ABC , se cumple que $m\angle ABC = 3m\angle ACB$. Si la mediatriz de $\overline{BC}$ interseca a la prolongación de la bisectriz interior $\overline{BM}$ en el punto " P ", entonces el mayor valor entero de la medida (en grados sexagesimales) del ángulo PCA es:

- A. 11°
- B. 12°
- C. 13°
- D. 14°
- E. 15°

RESOLUCIÓN:

RPTA: D



Sabemos que: $m\angle ABC = 3m\angle ACB$

$$m\angle ACB = \theta$$

$$\rightarrow m\angle ABC = 3\theta$$

Como $\overline{BM}$ es bisectriz:

$$\rightarrow m\angle ABM = m\angle MBC = \frac{3\theta}{2}$$

Por el teorema de la mediatriz:

$$PB = PC$$

$$\rightarrow m\angle PCB = m\angle PBC = \frac{3\theta}{2}$$

$$\rightarrow m\angle PCA = \frac{3\theta}{2} - \theta = \frac{\theta}{2}$$

Por dato $\triangle ABC$ es acutángulo:

$$m\angle ABC < 90^\circ$$

$$3\theta < 90^\circ$$

$$\theta < 30^\circ$$

Dividimos entre 2:

$$\frac{\theta}{2} < 15^\circ$$

$$\rightarrow m\angle PCA < 15^\circ$$

Nos piden el mayor valor entero de $\angle PCA$:

Por lo tanto, el máximo entero es:

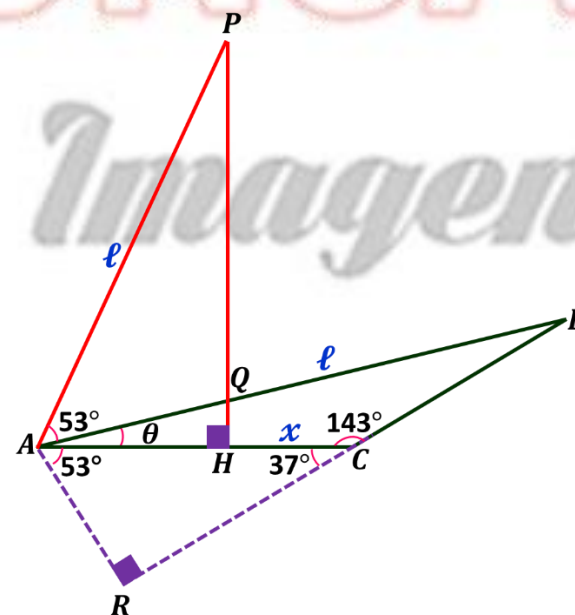
$$\frac{\theta}{2} = 14^\circ$$

3. En un triángulo ABC , en $\overline{AC}$ se ubica un punto "H", por dicho punto se traza la perpendicular $\overline{PH}$ a $\overline{AC}$, la cual interseca a $\overline{AB}$ en "Q". Si $m\angle PAB = 53^\circ$, $m\angle ACB = 143^\circ$, $AP = AB$ y $AH = 12$. Calcular HC (en metros).

- A. 4 m
- B. 6 m
- C. 8 m
- D. 10 m
- E. 12 m

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Prolongamos $\overline{BC}$ hasta el punto "R" y desde A trazamos una perpendicular a "R". Formándose un triángulo notable ARC de 37° y 53° .

$$\triangle AHP \cong \triangle ARB$$

(LAA)

Entonces:

$$AH = AR = 12$$

En $\triangle ARC$ notable de 37° y 53° :

$$AC = 20$$

Finalmente, observamos:

$$12 + x = 20$$

$$\therefore x = 8m$$

RPTA: C

4. En un triángulo ABC:

$$m\angle BAC = 2(m\angle ACB) = 30^\circ,$$

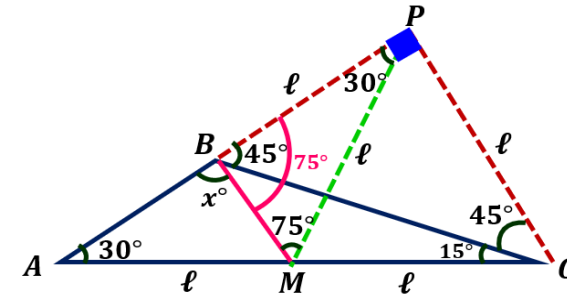
si se traza la mediana $\overline{BM}$, calcular $m\angle ABM$.

- A. 75°
- B. 80°
- C. 90°
- D. 100°
- E. 105°

RESOLUCIÓN:

Nos piden: $m\angle ABM = x$

Elaboramos el gráfico:



Prolongamos $\overline{AB}$ hasta el punto "P".

Luego, desde C una perpendicular a $\overline{AP}$.

$\triangle BPC$, es triángulo rectángulo de $45^\circ - 45^\circ$.

$\triangle APC$, es triángulo rectángulo y trazamos la mediana $\overline{PM}$.

Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$$PM = AM = MC = l$$

Los triángulos $\triangle APM$ y $\triangle BPM$ son isósceles.

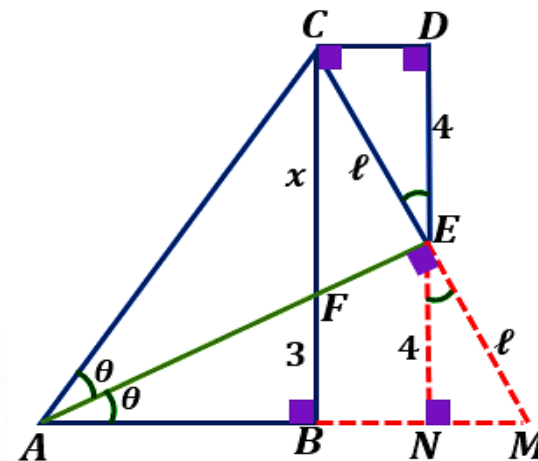
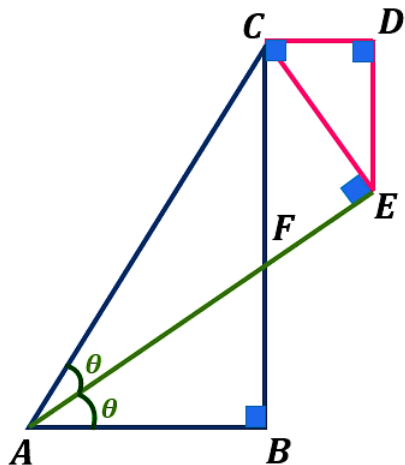
Por ángulo exterior en el $\triangle BPM$:

$$x = 30^\circ + 75^\circ$$

$$\therefore x = 105^\circ$$

RPTA: E

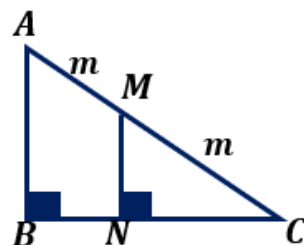
5. En la figura, $BF = 3u$ y $ED = 4u$. Calcular el valor del segmento $\overline{CF}$ (en u).



- A. $4,5 u$
 B. $5 u$
 C. $5,5 u$
 D. $6 u$
 E. $6,5 u$

RESOLUCIÓN:

En el $\triangle ABC$, por propiedad $\overline{MN}$ es base media:



$$MN = \frac{AB}{2}$$

Nos piden: $CF = x$

Construimos el gráfico:

Sabemos:

$$BF = 3 u \text{ y } ED = 4 u$$

Se prolonga $\overline{CE}$, entonces $\triangle ACM$ es isósceles:

$$\rightarrow CE = EM = \ell$$

Luego, se prolonga $\overline{DE}$ hasta intersectar a $\overline{BM}$ en N.

$$\rightarrow \triangle CDE \cong \triangle MNE \text{ (LAL)}$$

$$DE = EN = 4$$

En el $\triangle CBM$, $\overline{EN}$ es base media:

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{x+3}{2} \\ 8 &= x+3 \\ \therefore x &= 5 u \end{aligned}$$

RPTA: B

6. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se verifica que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$. Si $m\angle ABD = 13m\angle DBC$ y $m\angle ADB = 6m\angle DBC$, hallar $m\angle DBC$.

- A. 2°
- B. 3°
- C. 4°
- D. 5°
- E. 6°

$$90^\circ - 7\alpha + 13\alpha + 30^\circ + 6\alpha = 180^\circ$$

$$12\alpha = 60^\circ$$

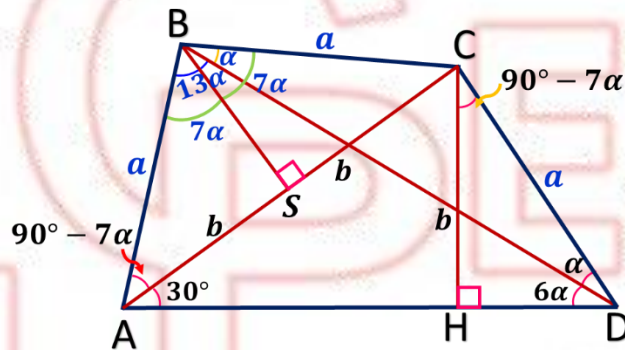
$$\alpha = 5^\circ$$

$$\therefore m\angle DBC = 5^\circ$$

RPTA: D

RESOLUCIÓN:

Elaboramos el gráfico con los datos:



Piden: $m\angle DBC = \alpha$

Trazamos alturas $\overline{AC}$ y $\overline{CH}$.

En $\triangle ABC$ es isósceles por lo tanto, coinciden todas las líneas notables en $\overline{BS}$.

$$AS = SC = b$$

Entonces:

$$\triangle ASB \cong \triangle CHD \quad (\text{ALA})$$

Determinamos:

$$m\angle BAS = 90 - 7\alpha$$

$$AS = CH = b$$

En $\triangle AHC$ la $m\angle CAH = 30^\circ$ determina triángulo notable de 30° y 60° .

En $\triangle ABD$ por propiedad suma de ángulos internos:

7. En un triángulo equilátero ABC , sobre la altura $\overline{AH}$ ($H \in \overline{BC}$) se toma el punto "E" y en la prolongación de $\overline{AC}$ se toma el punto D ($C \in \overline{AD}$), tal que $EC = CD$ y $AC = ED$. Hallar $m\angle HED$.

- A. 40°
- B. 45°
- C. 48°
- D. 50°
- E. 52°

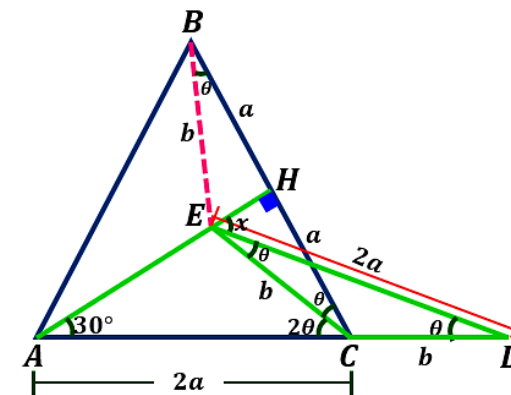
RESOLUCIÓN:

Nos piden: $m\angle HED = x$

Por dato, el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero:

$EC = CD$ y $AC = ED$.

Construimos el gráfico:



Trazamos $\overline{BE}$, entonces observamos:

$$\triangle ECD \cong \triangle BEC (LLL)$$

Si, $m\angle EDC = \theta \rightarrow m\angle ECA = 2\theta$

En "C":

$$3\theta = 60^\circ$$

$$\theta = 20^\circ$$

Luego, en $\triangle EHC$:

$$x + \theta + \theta = 90^\circ$$

$$x + 2\theta = 90$$

$$x + 40^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

RPTA: D

8. En un triángulo ABC , la $m\angle C = 2m\angle A$. Sobre el lado $\overline{AB}$ se traza el triángulo ABP recto "B" (P exterior a $\overline{AB}$). Si $m\angle PAB = \frac{1}{2}m\angle C$ y $AP = 12u$, determinar la longitud de $\overline{BC}$ (en u).

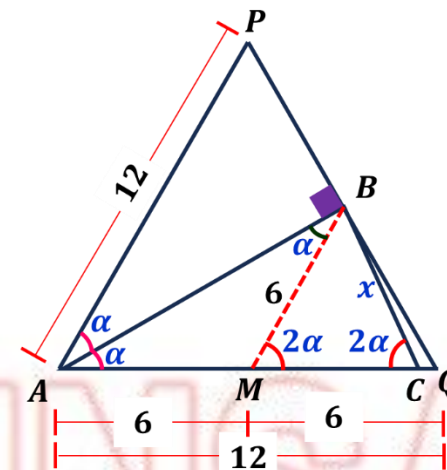
- A. $3u$
- B. $4u$
- C. $5u$
- D. $6u$
- E. $8u$

RESOLUCIÓN:

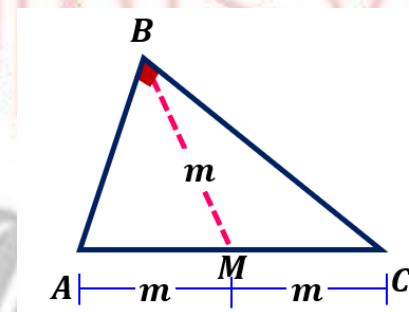
Piden: $\overline{BC} = x$

Sabemos: $AP = 12$

Graficamos:



Por propiedad:



Se prolonga $\overline{AC}$ y $\overline{PB}$ hasta "Q".

En el $\triangle APQ$ se observa que $\overline{AB}$ es bisectriz y altura a la vez; por lo tanto, el $\triangle PAQ$ es isósceles:

$$AP = AQ = 12$$

En el $\triangle ABQ$ se traza la mediana relativa a la hipotenusa $\overline{AQ}$.

$$\rightarrow AM = MQ = BM = 6$$

El $\triangle MBC$ es isósceles.

$$\therefore x = 6u.$$

RPTA: D

CAPÍTULO IV

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

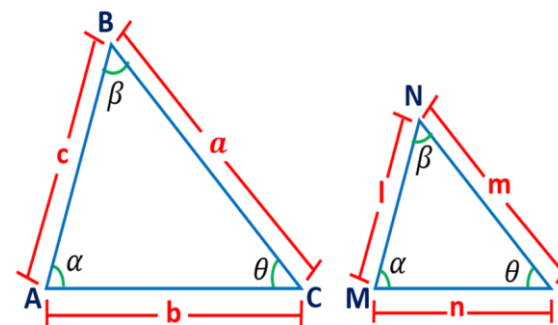
La geometría se ocupa de las propiedades y relaciones de puntos, líneas, planos y figuras en el espacio. La trigonometría se encarga en las relaciones y propiedades de los triángulos y las funciones trigonométricas.



4 DECIFRANDO LA RELACIÓN: TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA EN LA INTERPRETACIÓN DE FORMAS

4.1 PROPORCIONALIDAD. TEOREMA DE THALES- SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.

Dos triángulos son semejantes, si tienen sus tres ángulos congruentes y las longitudes de sus tres lados opuestos a dichos ángulos (denominados lados homólogos) respectivamente proporcionales.



Si: $\triangle ABC \sim \triangle MNL$

Se cumple:

- ✓ Las medidas de sus ángulos son, respectivamente iguales.
- ✓ Sus lados homólogos son proporcionales.

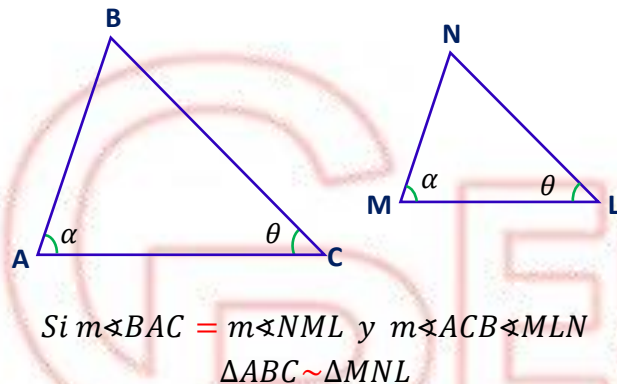
Es decir:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{l} = k$$

4.1.1 CRITERIOS DE SEMEJANZA

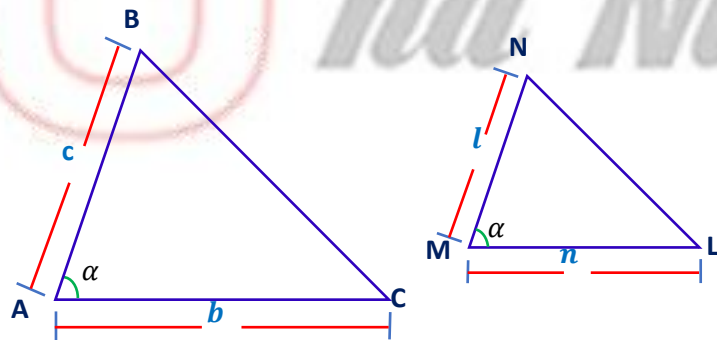
4.1.1.1. CASO 1 (A.A.)

Dos triángulos son semejantes, si tienen al menos dos ángulos respectivamente de igual medida.



4.1.1.2. CASO 2 (L.A.L.)

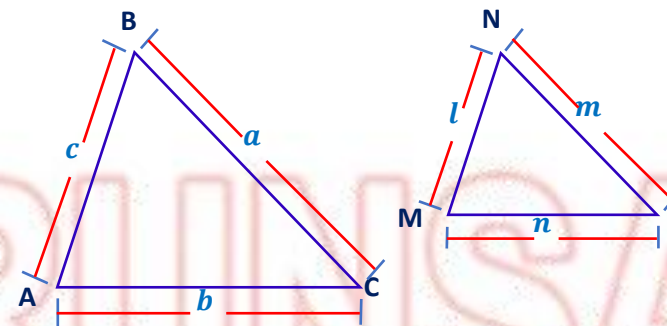
Dos triángulos son semejantes, si tienen un ángulo de igual medida y los lados que determinan a dichos ángulos respectivamente proporcionales.



$$\Delta ABC \sim \Delta MNL$$

4.1.1.3. CASO 3 (L.L.L.)

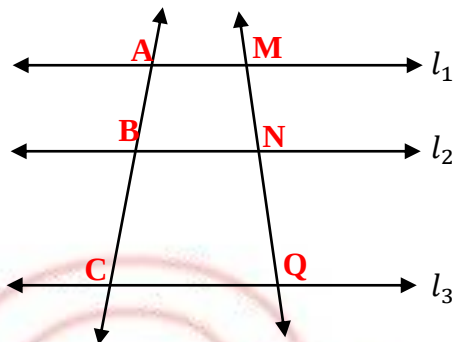
Dos triángulos son semejantes, si sus tres lados son respectivamente proporcionales.



4.1.2 TEOREMAS

4.1.2.1 TEOREMA DE THALES

Tres o más rectas paralelas determinan en dos rectas transversales o secantes a ellas, segmentos proporcionales.



Si $\vec{l}_1 // \overline{AC}$

Se cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

Además:

Si $\vec{l}_2 // \overline{AC}$

Se cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

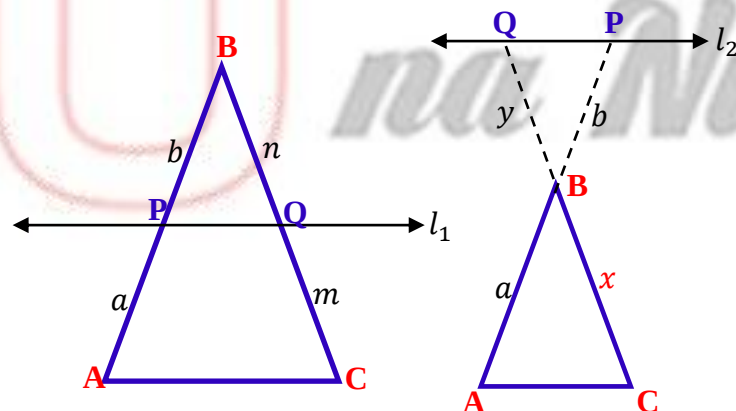
En el gráfico:

Si $\vec{l}_1 // \vec{l}_2 // \vec{l}_3$

Se cumple:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NQ}$$

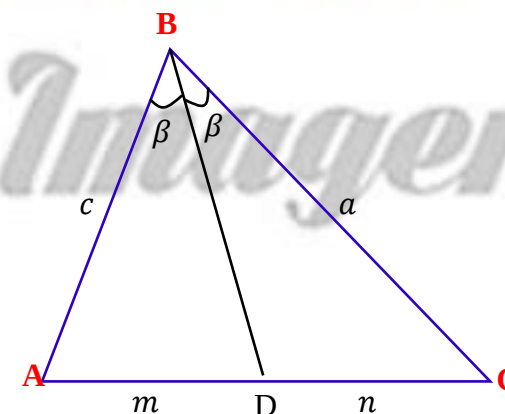
4.1.2.2 COROLARIO DEL TEOREMA DE THALES:



En la figura:

4.1.2.3 TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR

En todo triángulo, una bisectriz interior determina en el lado al cual es relativa segmentos proporcionales a los adyacentes a dicha bisectriz.



En el gráfico:

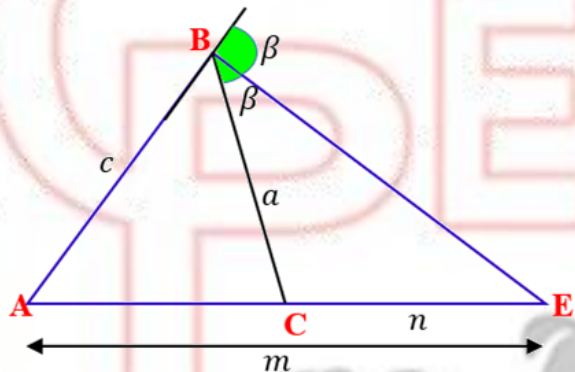
$\overline{BD}$: Es bisectriz interior del $\triangle ABC$

Se cumple:

$$\frac{c}{m} = \frac{a}{n} \vee \frac{c}{a} = \frac{m}{n}$$

4.1.2.4 TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

En un triángulo, una bisectriz exterior cuyos lados adyacentes son de diferente longitud; determina en el lado al cual es relativa segmentos proporcionales a lados adyacentes a dicha bisectriz.



En el gráfico, $\overline{BE}$ es bisectriz exterior del triángulo ABC

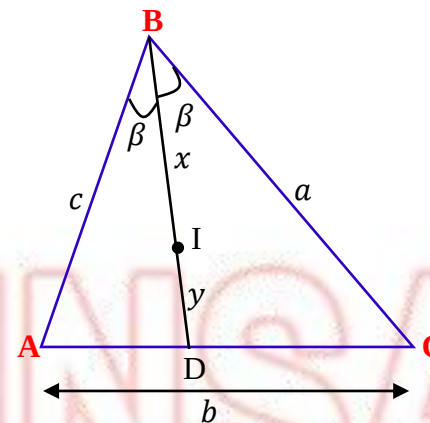
Se cumple:

$$\frac{c}{m} = \frac{a}{n} \vee \frac{c}{a} = \frac{m}{n}$$

4.1.2.5 TEOREMA DEL INCENTRO

En todo triángulo el incentro divide a una bisectriz interior en dos segmentos que son proporcionales a la suma de las longitudes de los

lados adyacentes a la bisectriz y a la longitud del lado al cual es relativa dicha bisectriz.



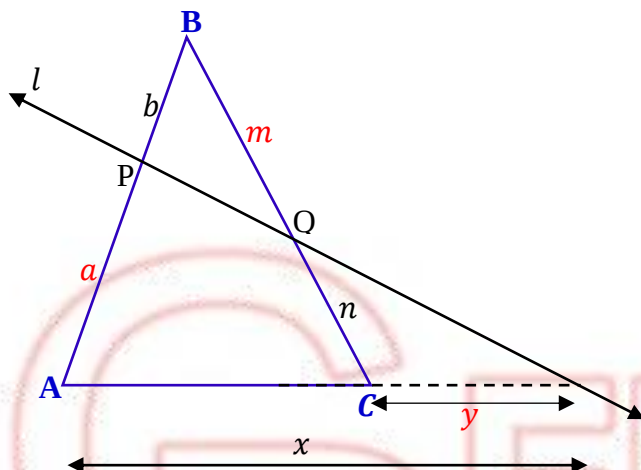
En el gráfico, I : incentro del triángulo ABC

Se cumple:

$$\frac{x}{y} = \frac{a + c}{b}$$

4.1.2.6 TEOREMA DE MENELAO

Toda recta secante a un triángulo que interseca a dos lados y al tercero en la prolongación, determina en dichos lados segmentos, de modo que el producto de las longitudes de tres de ellos sin extremo común es igual al producto de las longitudes de los otros tres.



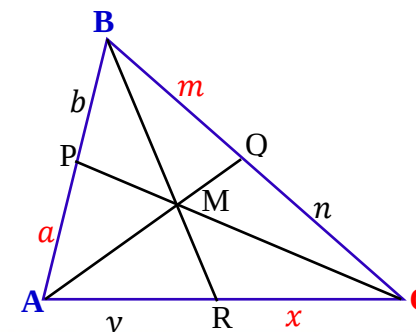
En el gráfico, l es recta secante al triángulo ABC .

Se cumple que:

$$amy = bnx$$

4.1.2.7 TEOREMA DE LA CEVA

En todo triángulo tres cevianas concurrentes, determinan en los lados, segmentos, de modo que el producto de las longitudes de tres de ellos sin extremo común es igual al producto de las longitudes de tres de ellos sin extremo común es igual al producto de las longitudes de los otros tres.



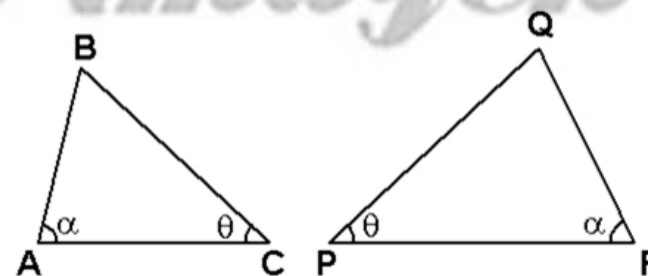
En el gráfico, las cevianas interiores AQ , BR , y CP concurrentes en M , dividen internamente a los lados del triángulo ABC .

Se cumple:

$$amx = bny$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. En el siguiente gráfico, $PQ = 15u$, $QR = 9u$, $BC = 5u$. Calcular AB .

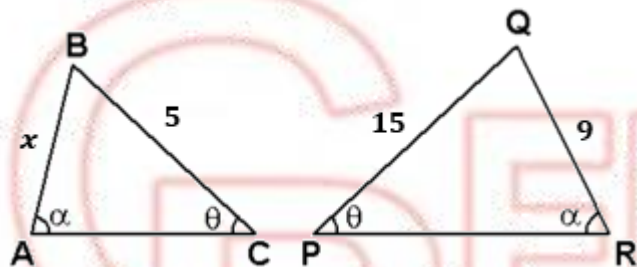


A. $3u$

- B. $4u$
 C. $5u$
 D. $6u$
 E. $8u$

RESOLUCIÓN:

Completando datos:



Sea: $AB = x$

$\triangle ABC \sim \triangle RQP$ (Ángulo - Ángulo)

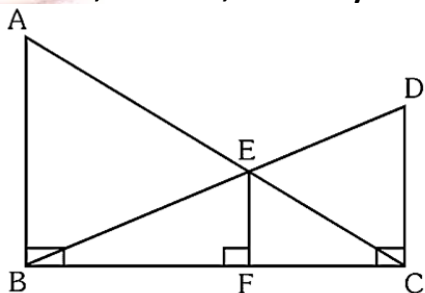
$$\frac{x}{5} = \frac{9}{15}$$

$$x = \frac{9 \cdot 5}{15}$$

$$\therefore x = 3u$$

RPTA: A

2. En el gráfico mostrado, $AB = 5$, $CD = 2$ y $BC = 7$, calcular FC .

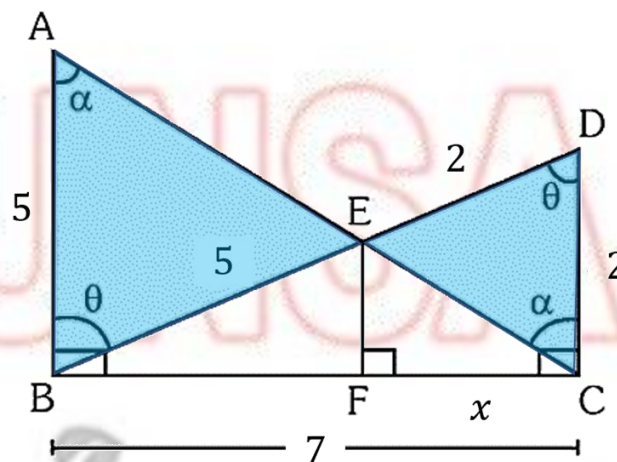


- A. 2,5

- B. 1,5
 C. 2
 D. 3
 E. 1,98

RESOLUCIÓN:

Completamos datos en el gráfico:



Aplicamos semejanza de triángulos en:

$$\triangle ABE \sim \triangle CDE$$

$$\frac{BE}{ED} = \frac{5}{2}$$

$$\triangle BEF \sim \triangle BDC$$

$$\frac{5}{7} = \frac{7-x}{7}$$

$$5 = 7 - x$$

$$x = 7 - 5$$

$$\therefore x = 2$$

RPTA: C

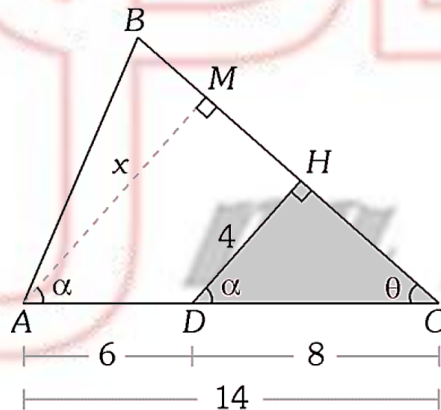
RPTA: E

3. En un triángulo ABC , sobre el lado AC se toma el punto "D", tal que, $AD = 6$ y $DC = 8$. Además, la longitud de la perpendicular trazada desde "D" hacia el lado BC es 4; entonces, la longitud de la altura del triángulo desde el vértice "A" al lado BC es:

- A. 8
- B. 9
- C. 5
- D. 6
- E. 7

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, graficamos:



Aplicamos semejanza de triángulos en:

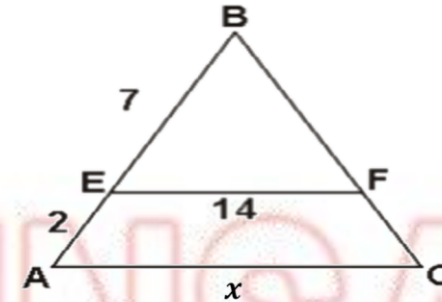
$$\triangle AMC \sim \triangle DHC$$

$$\frac{x}{4} = \frac{14}{8}$$

$$x = \frac{56}{8}$$

$$\therefore x = 7$$

4. En la figura, $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$. Calcular "x"



- A. 16
- B. 15
- C. 13
- D. 19
- E. 18

RESOLUCIÓN:

Del gráfico, aplicamos semejanza:

$$\triangle ABC \sim \triangle EBF$$

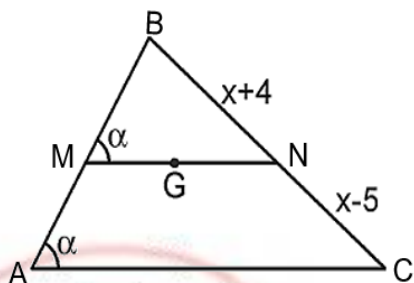
$$\frac{7}{14} = \frac{9}{x}$$

$$7x = 14(9)$$

$$\therefore x = 18$$

RPTA: E

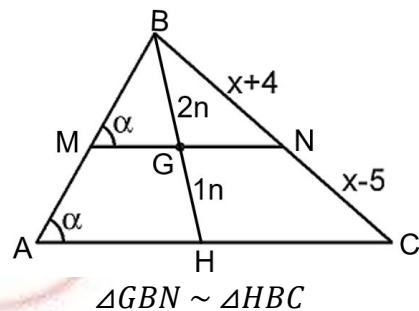
5. Se tiene un terreno triangular (tal como se muestra en la figura). Si un jardinero coloca una malla, paralela a uno de los lados para plantar dos tipos de flores y coloca una estaca en el punto "G" de la malla. Determinar el valor del lado BC del terreno, si "G" es baricentro.



- A. 27
B. 14
C. 28
D. 21
E. 36

RESOLUCIÓN:

Trazamos $\overline{BH}$, como pasa por el baricentro la proporción es de 2 a 1:



Aplicamos semejanza:

$$\frac{2n}{x+4} = \frac{3n}{2x-1}$$

$$4x-2 = 3x+12$$

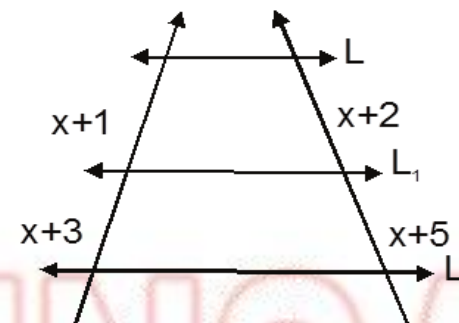
$$x = 14$$

Como $BC = (x+4) + (x-5)$

$$\therefore BC = 2(14) - 1 = 27$$

RPTA: A

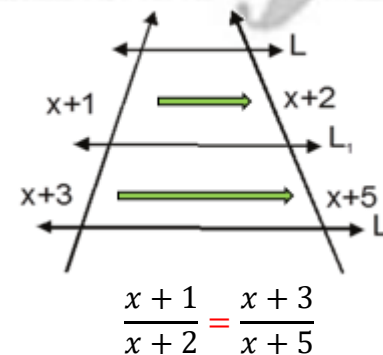
6. El gráfico muestra el diseño de una escalera a escala 1:20. Calcular el valor real de "x" (en centímetros) para que los peldaños sean paralelos.



- A. 14 cm
B. 16 cm
C. 18 cm
D. 20 cm
E. 15 cm

RESOLUCIÓN:

Para que los peldaños sean paralelos debe cumplirse el Teorema de Tales:



$$\begin{aligned}(x+1)(x+5) &= (x+2)(x+3) \\ x^2 + 6x + 5 &= x^2 + 5x + 6 \\ 6x - 5x &= 6 - 5 \\ x &= 1\end{aligned}$$

La escala: 1: 20; significa que 1 *cm*, en el diseño es 20 *cm* en la realidad

∴ El valor real es de 20 *cm*

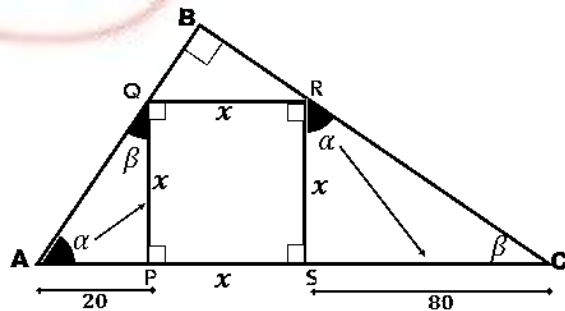
RPTA: D

7. La casa del profesor Melitón tiene forma de triángulo rectángulo ABC (recto en B). Si se sabe que cuenta con una piscina cuadrada $PQRS$ inscrita, además se ubica $\overline{PS}$ en $\overline{AC}$. Si $AP = 20$ m. y $SC = 80$ m, calcular el lado de la piscina.

- A. 30 m
- B. 40 m
- C. 60 m
- D. 50 m
- E. 70 m

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



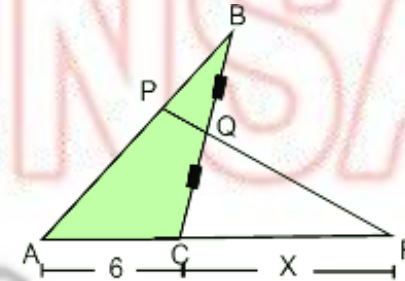
Tenemos que:

Los $\triangle APQ$ y $\triangle RSC$ son semejantes:

$$\begin{aligned}\frac{x}{20} &= \frac{80}{x} \\ (20)(80) &= x^2 \\ 1600 &= x^2 \\ \sqrt{1600} &= x \\ \therefore x &= 40\text{ m}\end{aligned}$$

RPTA: B

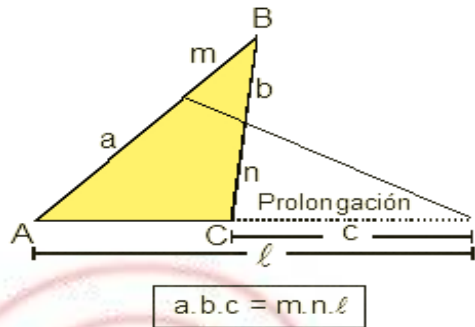
8. En la siguiente figura, las longitudes AP y PB son proporcionales a 10 y 4 respectivamente. Hallar " CR ".



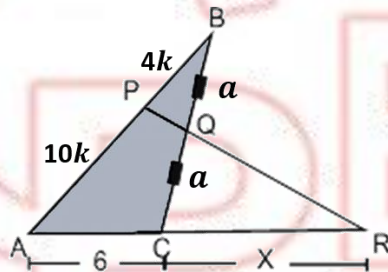
- A. 3
- B. 2
- C. 4
- D. 8
- E. 6

RESOLUCIÓN:

Sabemos por Teorema de Menelao:



Completamos datos en el gráfico:



Aplicamos el Teorema de Menelao:

$$(10k)(a)(x) = (4k)(a)(6 + x)$$

$$10(x) = 4(6 + x)$$

$$5x = 12 + 2x$$

$$3x = 12$$

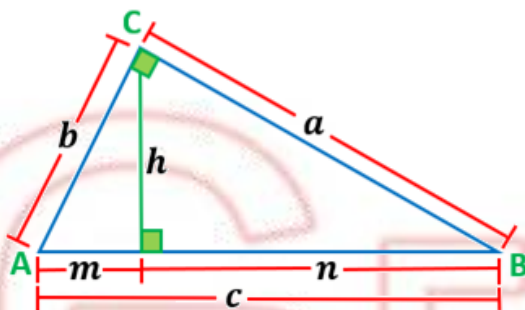
$$x = 4$$

$$\therefore CR = 4$$

RPTA: C

4.2 RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Si en un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se traza la altura h relativa a la hipotenusa $\overline{AB}$, observamos que:



4.2.1 PROPIEDADES

PROPIEDADES

Teorema de los catetos: En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

$$a^2 = c \cdot n$$

$$b^2 = c \cdot m$$

Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Teorema de la altura: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de su altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre dicha

$$h^2 = m \cdot n$$

Teorema del producto de catetos. En todo triángulo rectángulo, el producto de las longitudes de sus catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a dicha hipotenusa.

$$a \cdot b = c \cdot h$$

Teorema de la inversa de catetos: En todo triángulo rectángulo, la inversa del cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de las inversas de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

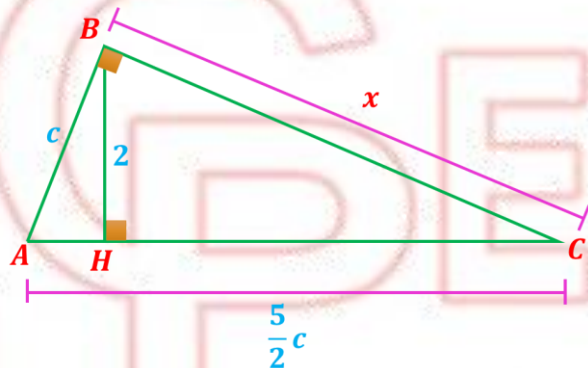
PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa mide 2 cm y la hipotenusa mide $\frac{5}{2}$ del valor de uno de los catetos. Calcular la medida del otro cateto.

- A. 1 cm
- B. 2 cm
- C. 3 cm
- D. 4 cm
- E. 5 cm

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Por el Teorema del producto de catetos, en el $\triangle ABC$:

$$c \cdot x = 2 \cdot \frac{5}{2}c$$

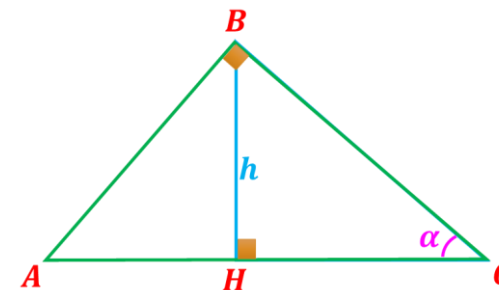
Simplificando la expresión:

$$x = 5$$

$\therefore$ La longitud del otro cateto es 5 cm.

RPTA: E

2. En el gráfico mostrado, $AH = 3$ cm, $HC = \frac{16}{3}$ cm. Calcular la medida del ángulo " α ".

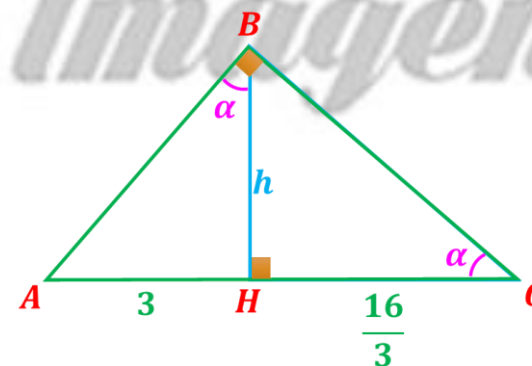


- A. 30°
- B. $\left(\frac{37}{2}\right)^\circ$
- C. 37°
- D. 53°
- E. 60°

RESOLUCIÓN:

Del gráfico se observa que:

$$m\angle ABH = m\angle BCA = \alpha$$



Por el teorema de la altura en el $\triangle ABC$:

$$h^2 = 3 \cdot \frac{16}{3}$$

$$h = 4 \text{ cm}$$

Por tanto, el $\triangle ABH$ es notable y la medida del ángulo " α " es 37°

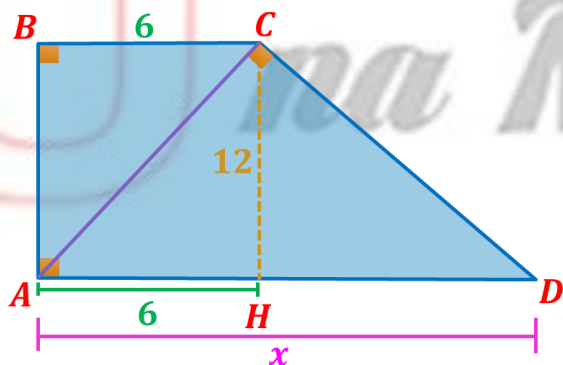
RPTA: C

3. En un trapecio rectangular, la base menor y la altura miden 6 cm y 12 cm , respectivamente. Determinar la medida de la base mayor, si la diagonal menor es perpendicular al mayor lado no paralelo.

- A. 45 cm
- B. 28 cm
- C. 30 cm
- D. 40 cm
- E. 55 cm

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Con la diagonal menor del trapecio ($\overline{AC}$) se forma un triángulo rectángulo ACD

Por relaciones métricas en el $\triangle ACD$, aplicando el teorema de la altura:

$$CH^2 = AH(HD)$$

$$12^2 = 6(x - 6)$$

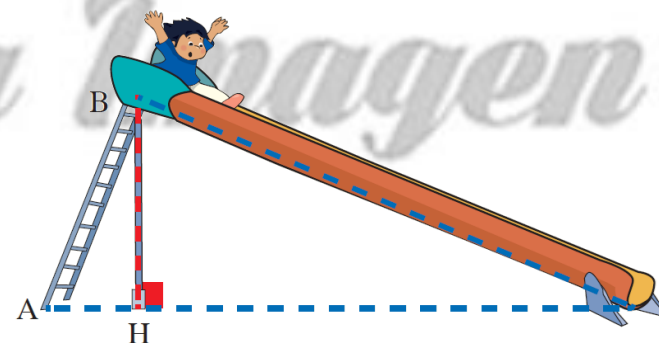
$$24 = x - 6$$

$$x = 30 \text{ cm}$$

$\therefore$ La longitud de la base mayor del trapecio es 30 cm .

RPTA: C

4. La menor de las hijas de la familia Gutiérrez, sube a un tobogán; pero el papá, preocupado por su seguridad, decide hallar la longitud del tobogán, así como su altura. Para ello, mide con sus pasos la distancia que hay desde el final del tobogán hasta un apoyo perpendicular al piso (tal como se muestra en la imagen) y de ésta, hasta el pie de la escalera, obteniendo en pasos 20 y 4 respectivamente.



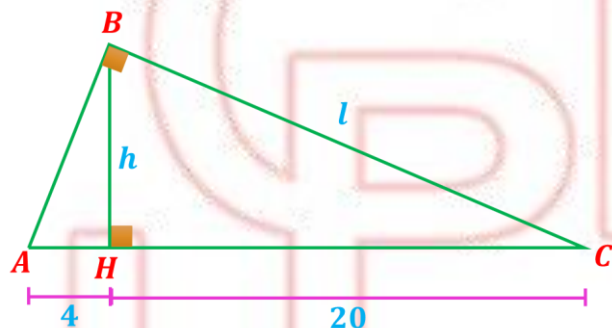
Se sabe que el tobogán y la escalera son perpendiculares y que el calzado del papá mide 26 cm . Calcular la relación entre la longitud del tobogán y su altura.

- A. $\sqrt{5}$
 B. $2\sqrt{5}$
 C. 5
 D. 4
 E. $\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN:

Como nos piden la relación entre la longitud del tobogán y la altura de éste, podemos trabajar las medidas de estos en función de "pasos".

Graficamos:



Por el Teorema del cateto en el $\triangle ABC$:

Calculamos la longitud del tobogán:

$$l^2 = 20 \cdot 24$$

$$l = 4\sqrt{30}$$

Calculamos la altura del tobogán:

$$h^2 = 4 \cdot 20$$

$$h = 4\sqrt{5}$$

Entonces, la relación entre la longitud del tobogán y su altura es:

$$\frac{l}{h} = \frac{4\sqrt{30}}{4\sqrt{5}}$$

$$\therefore \frac{l}{h} = \sqrt{6}$$

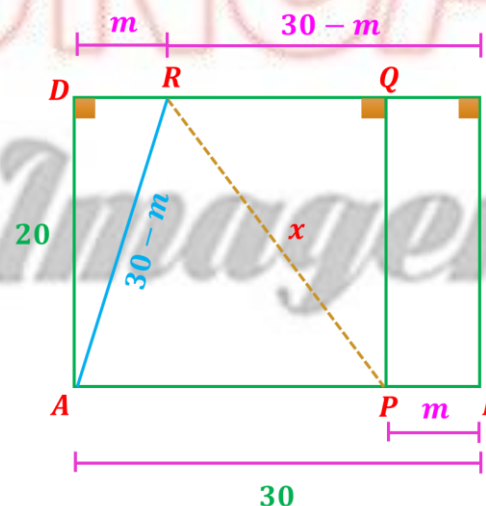
RPTA: E

5. Una hoja rectangular de papel, de 20 cm de ancho y 30 cm de largo, se dobla de tal manera que dos vértices opuestos coincidan. Calcular la longitud del doblez.

- C. $\frac{20}{3}\sqrt{13}$ cm
 D. $\frac{10}{3}\sqrt{13}$ cm
 E. $\frac{50}{3}\sqrt{13}$ cm
 F. $\frac{10}{3}\sqrt{6}$ cm
 G. $\frac{20}{3}\sqrt{6}$ cm

RESOLUCIÓN:

Graficando:



En la gráfica $\overline{RP}$ representa a uno de los dobleces.

Por el Teorema de Pitágoras en el $\triangle ADR$:

$$(30 - m)^2 = 20^2 + m^2$$

$$900 - 60m + m^2 = 400 + m^2$$

$$m = \frac{25}{3}$$

Entonces $RQ = 30 - 2m$

$$RQ = 30 - \frac{50}{3}$$

$$RQ = \frac{40}{3}$$

Por el Teorema de Pitágoras en el $\triangle PQR$:

$$x^2 = \left(\frac{40}{3}\right)^2 + 20^2$$

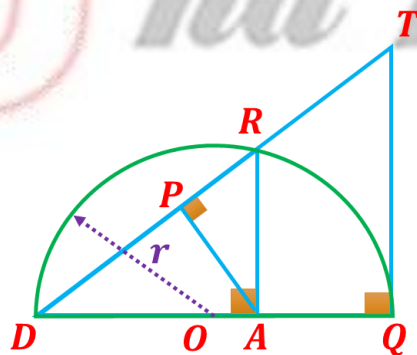
$$x^2 = \frac{1600 + 3600}{3^2}$$

$$x^2 = \frac{5200}{9}$$

$$x = \frac{20\sqrt{13}}{3}$$

$\therefore$ La longitud del doblez es $\frac{20\sqrt{13}}{3}$ cm.

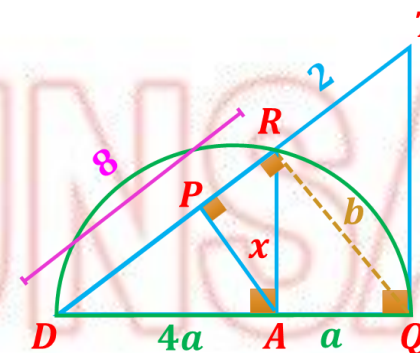
6. En el gráfico mostrado, calcular AP , si $DR = 8$ cm y $RT = 2$ cm, además $DQ = 5AQ$



- A. 4 cm
- B. 2 cm
- C. 3,2 cm
- D. 4,4 cm
- E. 5 cm

RESOLUCIÓN:

Sea $AQ = a \rightarrow DQ = 5a$ y $DA = 4a$



Por el Teorema de la altura en el $\triangle DTQ$:

$$RQ^2 = (RT)(DR)$$

$$b^2 = 2(8)$$

$$b = 4$$

Los triángulos DRQ y DPA son semejantes, entonces:

$$\frac{x}{b} = \frac{4a}{5a}$$

$$x = \frac{4b}{5}$$

$$x = \frac{4(4)}{5}$$

$$\therefore x = 3,2 \text{ cm}$$

RPTA: A

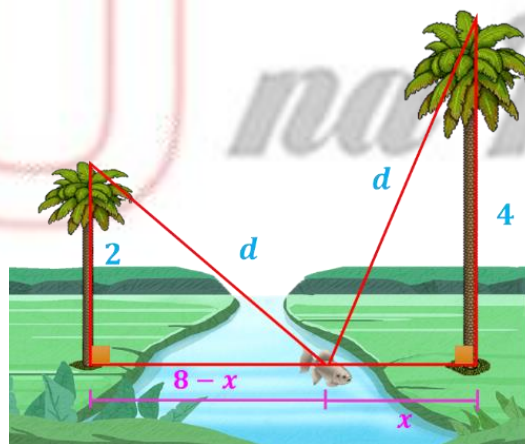
RPTA: C

7. A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. La altura de una es el doble de la otra. La distancia entre sus troncos, 8 metros. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito, los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron con la misma velocidad y alcanzaron al pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor, que mide 4 m, apareció el pez?

- H. $\frac{13}{4}m$
 I. 4 m
 J. 3 m
 K. $\frac{13}{2}m$
 L. $\frac{15}{6}m$

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Como llegan al mismo tiempo y van a la misma velocidad, entonces las distancias hacia el pez son iguales (d)

En ambos triángulos rectángulos aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$2^2 + (8 - x)^2 = d^2$$

$$4^2 + x^2 = d^2$$

Igualamos ambas expresiones:

$$2^2 + (8 - x)^2 = 4^2 + x^2$$

$$4 + 64 - 16x + x^2 = 16 + x^2$$

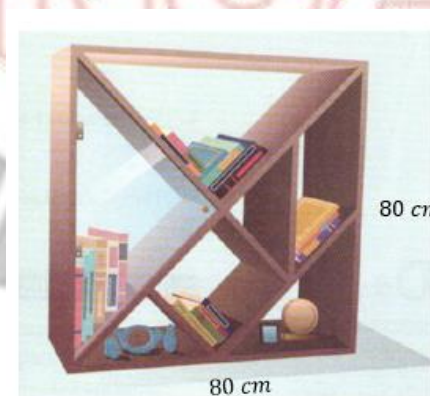
$$52 = 16x$$

$$x = \frac{13}{4}$$

∴ La distancia del tronco de la palmera mayor al pez es de $\frac{13}{4}m$.

RPTA: A

8. Álvaro es un carpintero que diseña muebles creativos. Inspirado en las piezas del tangram, ha diseñado un librero como se muestra a continuación:



Si Álvaro tiene planchas de melamina cuyo ancho coincide con la profundidad del mueble que hará. Calcular la longitud de melamina que se requiere para el armazón de dicho librero.

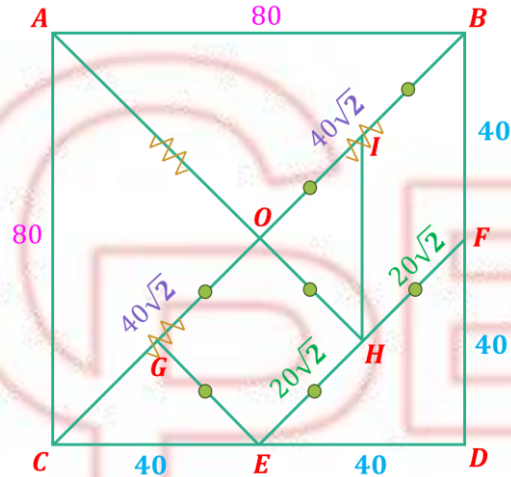
- A. $(360 + 200\sqrt{2})\text{ cm}$
 B. $(300 + 80\sqrt{2})\text{ cm}$
 C. $(600 + 80\sqrt{2})\text{ cm}$

D. $(150 + 200\sqrt{2}) \text{ cm}$

E. $(300 + 200\sqrt{2}) \text{ cm}$

RESOLUCIÓN:

Graficando y completando:



Tener en cuenta que al ser un tangram E y F son puntos medios de $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

Por el Teorema de Pitágoras en el $\triangle ABC$:

$$80^2 + 80^2 = CB^2$$

$$CB = \sqrt{6400 + 6400}$$

$$CB = 80\sqrt{2}$$

Como "O" es un punto medio:

$$CO = OB = AO = 40\sqrt{2}$$

Por el Teorema de Pitágoras en el $\triangle EDF$:

$$40^2 + 40^2 = EF^2$$

$$CB = \sqrt{1600 + 1600}$$

$$CB = 40\sqrt{2}$$

Como "H" es un punto medio:

$$EH = HF = 20\sqrt{2}$$

Entonces, como OHEG es un cuadrado, la medida de sus lados es $20\sqrt{2}$
Finalmente sumamos todas los trazos:

Cantidad de melamina:

$$= 80(4) + 3(40\sqrt{2}) + 4(20\sqrt{2}) + 40$$

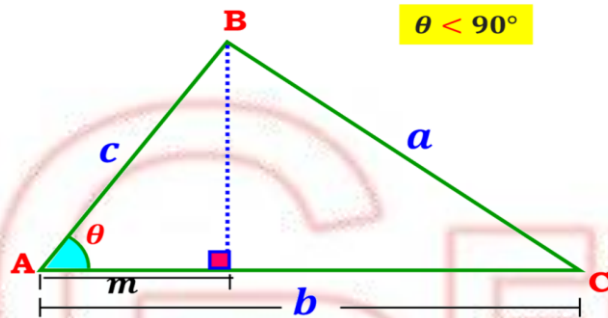
$$\therefore \text{Cantidad de melamina} = 360 + 200\sqrt{2} \text{ cm}$$

RPTA: A

4.3 RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

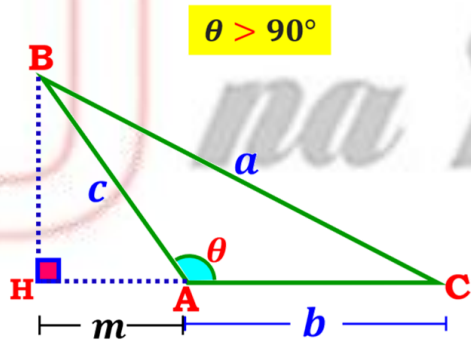
4.3.1 TEOREMA DE EUCLIDES

PRIMER CASO



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

SEGUNDO CASO

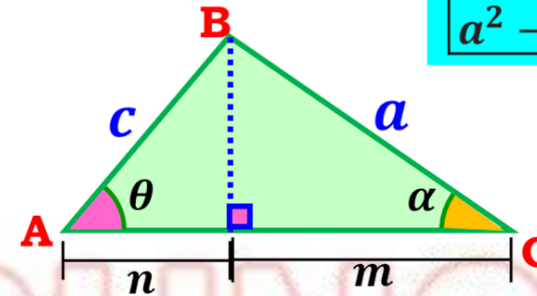


$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

4.3.2 TEOREMA DE LAS PROYECCIONES

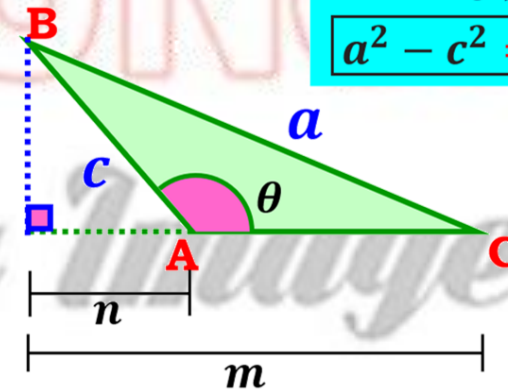
$$\theta < 90^\circ ; \alpha < 90^\circ$$

$$a^2 - c^2 = m^2 - n^2$$

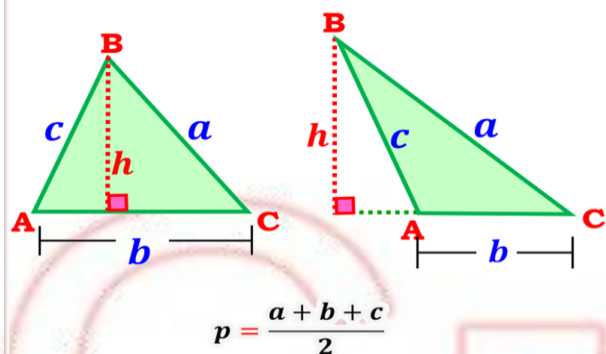


$$\theta > 90^\circ$$

$$a^2 - c^2 = m^2 - n^2$$

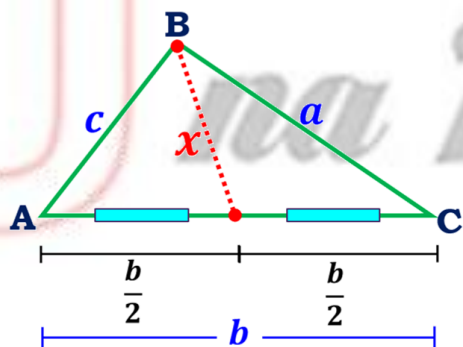


4.3.3 TEOREMA DE HERON



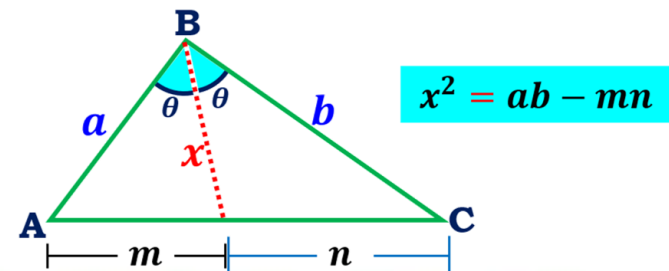
$$h = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

4.3.4 TEOREMA DE LA MEDIANA

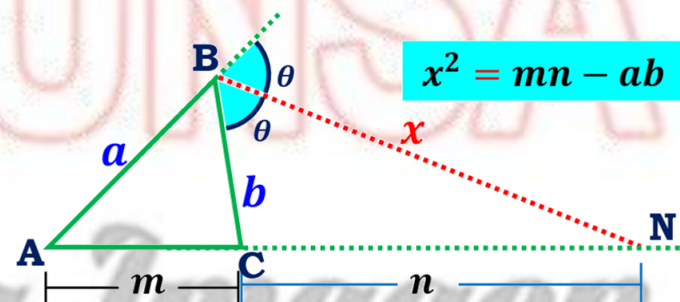


$$a^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{b^2}{2}$$

4.3.5 TEOREMA DE LA BISECTRIZ (INTERIOR)

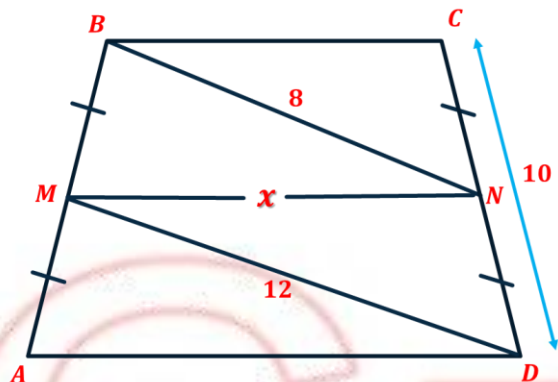


4.3.6 TEOREMA DE LA BISECTRIZ (EXTERIOR)



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

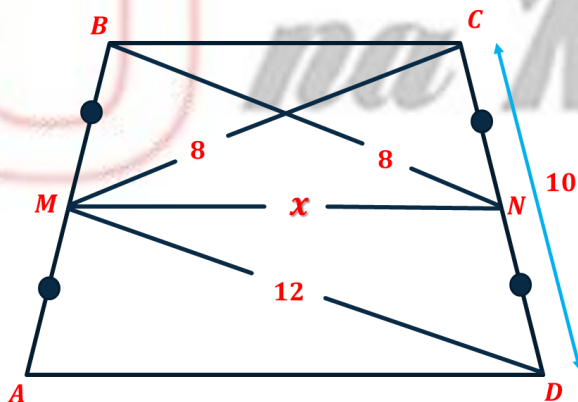
1. En el gráfico adjunto, si $ABCD$ es un trapecio isósceles, determinar "x"



- A. 7
 B. $\sqrt{69}$
 C. $\sqrt{89}$
 D. $\sqrt{79}$
 E. 9

RESOLUCIÓN:

Cómo $ABCD$ es un trapecio isósceles entonces $MBCN$ es también un trapecio isósceles de dónde $BN = MC = 8$



Luego en el $\triangle MCD$, por el teorema de la mediana:

Efectuando:

$$8^2 + 12^2 = 2x^2 + \frac{10^2}{2}$$

$$64 + 144 = 2x^2 + 50$$

$$208 = 2x^2 + 50$$

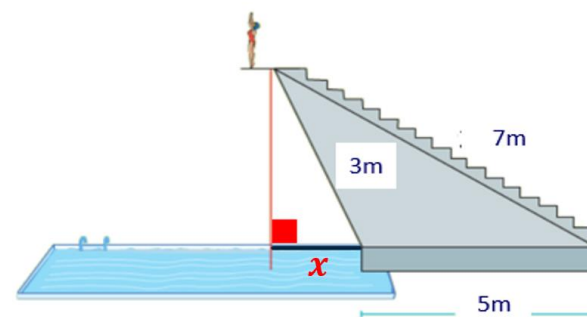
$$158 = 2x^2$$

$$79 = x^2$$

$$\therefore x = \sqrt{79}$$

RPTA: D

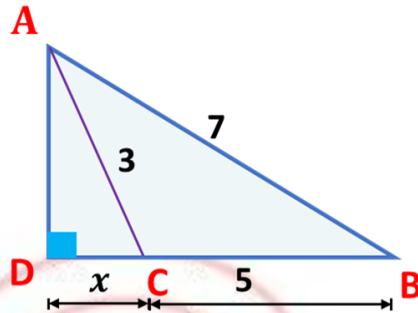
2. En la siguiente figura, calcular el valor de "x".



- A. 8,1 m
 B. 1,5 m
 C. 2,4 m
 D. 3,2 m
 E. 1,4 m

RESOLUCIÓN:

De la figura, se tiene que:



Sea "x" la proyección de AC sobre BD.

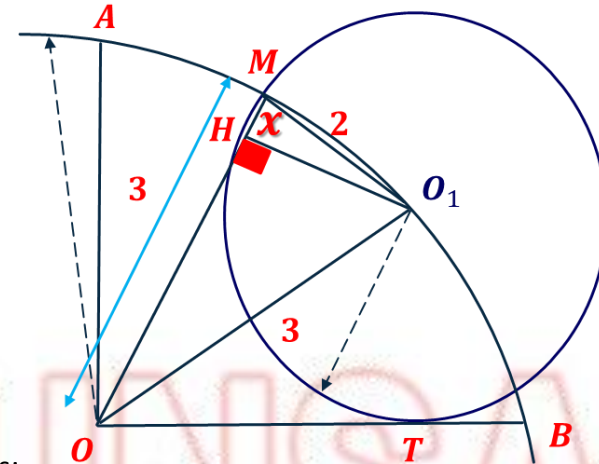
En el $\triangle ABC$, por el Teorema de Euclides:

$$\begin{aligned} 7^2 &= 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot x \\ 49 &= 9 + 25 + 10x \\ 15 &= 10x \\ \therefore x &= 1,5 \text{ m} \end{aligned}$$

RPTA: B

3. Se tiene un cuadrante AOB , donde: $AO = OB = 3$. En el arco $\widehat{AB}$ se ubica el punto O_1 , el cual será centro de una circunferencia cuyo radio mide 2, y es tangente a $\widehat{BO}$ en el punto "T"; además, un punto de intersección de dicha circunferencia al arco $\widehat{AB}$ es "M", luego se traza $\overline{O_1H} \perp \overline{MO}$ ($H \in \overline{MO}$). Calcular MH .

- A. $1/3$
- B. $7/3$
- C. $2/3$
- D. $4/3$
- E. 1



Graficamos:

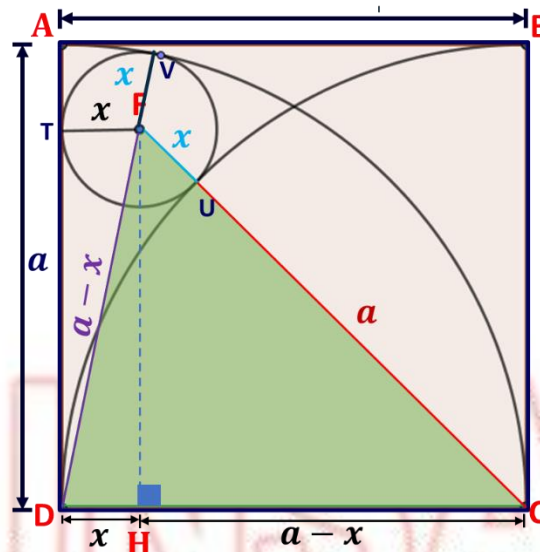
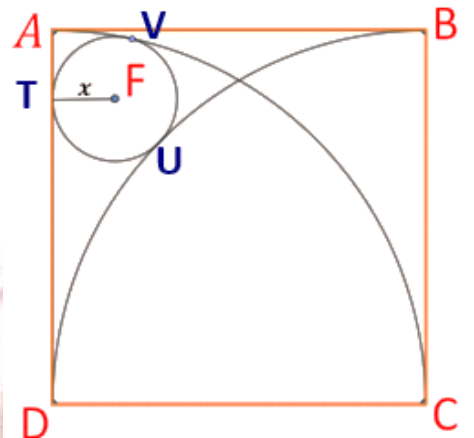
En el $\triangle OMO_1$, por el teorema de Euclides:

$$\begin{aligned} 3^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \\ 9 &= 4 + 9 - 6x \\ 6x &= 4 \\ \therefore x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

RPTA: C

4. En el cuadrado ABCD de lado "a" unidades, se trazan los arcos $\widehat{BD}$ y $\widehat{AC}$ con centros "C" y "D" (tal como se muestra en la imagen). Hallar la longitud del radio de la circunferencia de centro "F". (Sean "T", "U" y "V" puntos de tangencia).

RESOLUCIÓN:



- A. $\frac{a}{8}u$
 B. $\frac{a}{4}u$
 C. $\frac{a}{6}u$
 D. $\frac{a}{5}u$
 E. $\frac{a}{3}u$

RESOLUCIÓN:

Trazamos los segmentos $\overline{FD}$ y $\overline{FC}$:

En $\triangle DFC$, por el Teorema de Euclides:

$$(a+x)^2 = (a-x)^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot x$$

$$(a+x)^2 - (a-x)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot x$$

Por la Identidad de Legendre:

$$4ax = a^2 - 2ax$$

$$6ax = a^2$$

$$6x = a$$

$$\therefore x = \frac{a}{6}$$

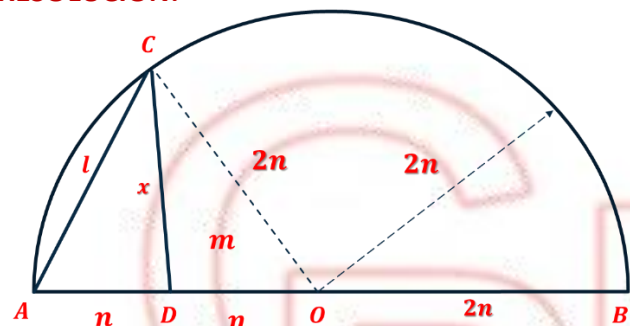
RPTA: C

5. En la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro "O", se ubican los puntos "C" y "D", en el arco $\widehat{AB}$ y el segmento $\overline{AB}$ respectivamente, tal que, $AB = 4(AD)$ y $2(AC)^2 + (OB)^2 = 144$. Hallar CD .

- A. 5
 B. 6

- C. 8
D. 9
E. 10

RESOLUCIÓN:



Piden $CD = x$

Datos:

$$AB = 4(AD) \text{ y}$$

$$2(AC)^2 + (OB)^2 = 144$$

$$\text{Sea } AD = n \rightarrow AB = 4n$$

En el $\triangle ACO$, por el teorema de la mediana:

$$l^2 + (2n)^2 = 2x^2 + \frac{(2n)^2}{2}$$

$$l^2 + 4n^2 = 2x^2 + 2n^2$$

$$l^2 + 2n^2 = 2x^2 \dots (I)$$

Del dato:

$$2(l)^2 + (2n)^2 = 144$$

$$2l^2 + 4n^2 = 144$$

$$l^2 + 2n^2 = 72 \dots (II)$$

De (I) y (II)

$$2x^2 = 72$$

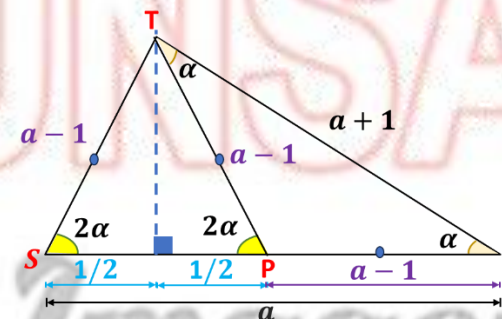
$$\therefore x = 6$$

6. En un triángulo STU, los lados están representados por 3 números enteros consecutivos. Si el ángulo mayor es el doble del menor, calcular los lados del triángulo.

- A. 2; 3 y 4
B. 5; 6 y 7
C. 3; 4 y 5
D. 4; 5 y 6
E. 7; 8 y 9

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



En $\triangle TPU$, por el Teorema de Euclides:

$$(a+1)^2 = (a-1)^2 + (a-1)^2 + 2 \cdot (a-1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$(a+1)^2 - (a-1)^2 = (a-1)^2 + (a-1)$$

$$4a = a^2 - 2a + 1 + a - 1$$

$$a^2 - 5a = 0$$

$$a(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 5$$

Luego:

$$ST = 4 \wedge TU = 6 \wedge SU = 5$$

RPTA: B

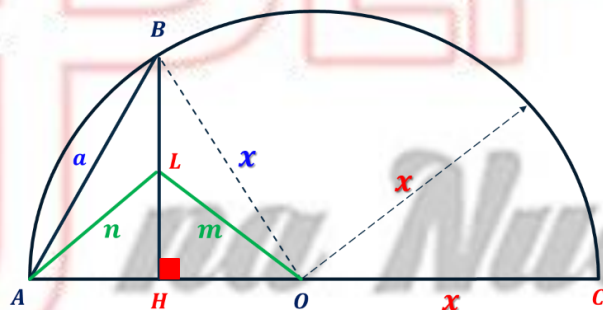
RPTA: D

7. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$ y centro "O", se traza la cuerda $\overline{AB}$ y además $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ ($H \in \overline{AC}$), luego en $\overline{BH}$ se ubica "L", tal que $(AB)^2 + (OL)^2 - (AL)^2 = 36$.
Calcular el radio.

- A. 3
B. 4
C. 5
D. 6
E. 7

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Del dato:

$$(AB)^2 + (OL)^2 - (AL)^2 = 36$$

Es decir

$$a^2 + m^2 - n^2 = 36 \dots (I)$$

Como el radio es $OC = BO = x$, entonces aplicamos el teorema de proyecciones en el ΔABO :

$$x^2 - a^2 = (OH)^2 - (AH)^2 \dots (II)$$

Nuevamente aplicamos el teorema de proyecciones en el ΔALO

$$m^2 - n^2 = (OH)^2 - (AH)^2 \dots (III)$$

De (II) y (III):

$$x^2 - a^2 = m^2 - n^2$$

Despejando:

$$x^2 = a^2 + m^2 - n^2 = 36$$

Comparando con (I):

$$x^2 = 36$$

$\therefore$ El radio es $x = 6$

RPTA: D

8. En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia, las prolongaciones de las cuerdas $\overline{CB}$ y $\overline{DA}$ se intersectan en " M ", luego se traza la cuerda $\overline{CQ}$ perpendicular a $\overline{AD}$ en " H ". Si $m\angle BDC + m\angle ADQ = 90^\circ$ y además $(MC)(CD) - (MA)(AB) = 64$, hallar AC .

- A. 4
B. 5
C. 6
D. 7
E. 8

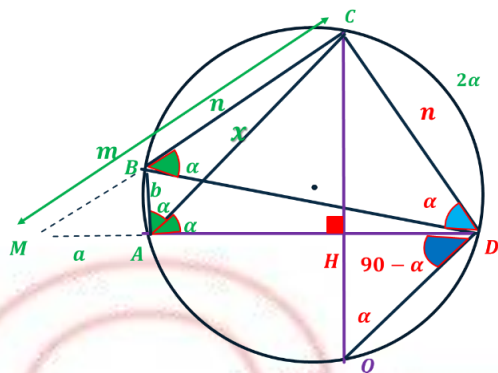
RESOLUCIÓN:

Según la condición:

$$(MC)(CD) - (MA)(AB) = 64$$

Nos piden $AC = x$

Por dato: $m\angle BDC + m\angle ADQ = 90^\circ$



Si $m\angle BDC = \alpha$, entonces $m\angle ADQ = 90^\circ - \alpha$

En el $\triangle QHD$: $m\angle CQD = \alpha$

Luego:

Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{CD} = 2\alpha \text{ y } m\angle CAD = m\angle CBD = \alpha$$

También $m\angle BAC = m\angle BDC = \alpha$ por la propiedad de cuerdas iguales se oponen ángulos iguales.

Se deduce que el $\triangle BCD$ es isósceles y por ello:

$$BC = CD = n$$

En el $\triangle MAB$, $\overline{AC}$ es bisectriz exterior.

Del teorema de la bisectriz (exterior)

$$x^2 = mn - ab$$

Pero:

$$(MC)(BC) - (MA)(AB) = 64$$

Reemplazando:

$$mn - ab = 64$$

Igualando:

$$x^2 = 64$$

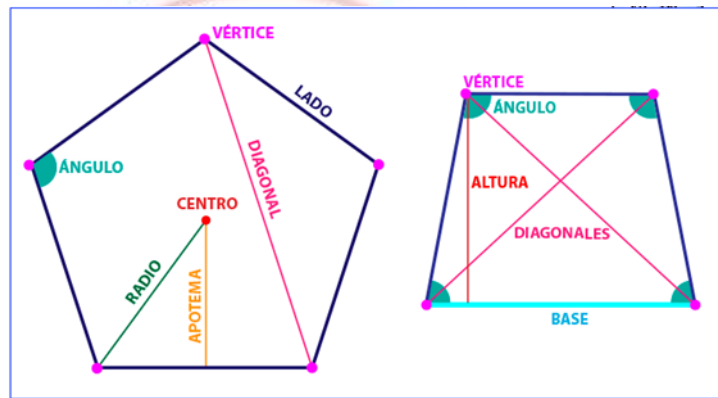
$$\therefore x = 8$$

RPTA: E

4.4 POLÍGONOS

4.4.1 DEFINICIÓN

Polígono es la figura que resulta de unir tres o más puntos no colineales mediante segmentos de recta no secantes y además deben de estar unidos en forma consecutiva y en cada vértice solo deben de concurrir dos lados.



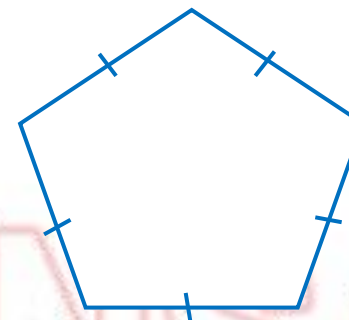
Según el número de lados, un polígono se llama:

Triángulo	3 lados
Cuadrilátero	4 lados
Pentágono	5 lados
Hexágono	6 lados
Heptágono	7 lados
Octógono	8 lados
Nonágono	9 lados
Decágono	10 lados
Endecágono	11 lados
Dodecágono	12 lados
Icoságono	20 Lados

4.4.2 CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS

4.4.2.1. EQUILÁTERO

Es el polígono que tiene todos sus lados congruentes.



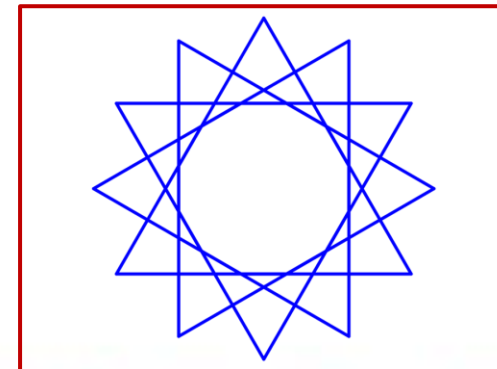
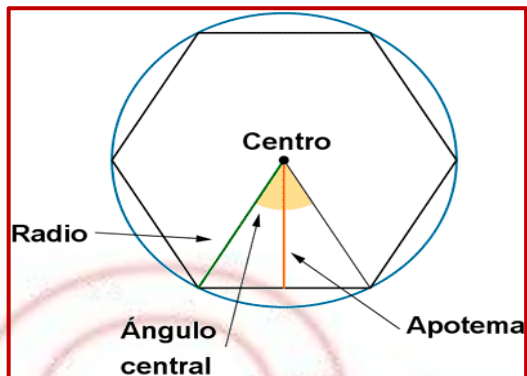
4.4.2.2. EQUIÁNGULO

Es el polígono que tiene todos sus ángulos congruentes.



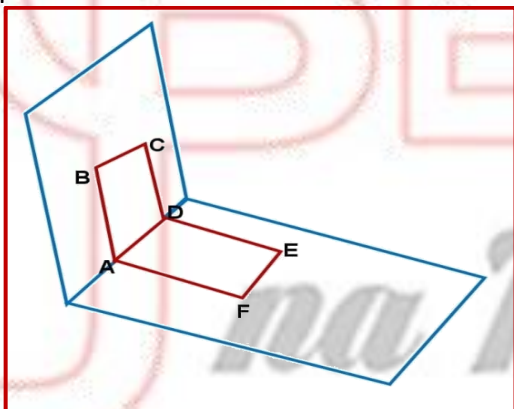
4.4.2.3. REGULAR

Es el polígono que tiene sus lados y ángulos respectivamente congruentes. Todo polígono regular puede ser inscrito y circunscrito a dos circunferencias que tienen el mismo centro.



4.4.2.4. ALABEADO

Es el polígono que tiene sus lados contenidos en diferentes planos.



Hexágono alabeado $ABCDEF$ ($\overline{AD}$ es una diagonal)

4.4.2.5. ESTRELLADO

Es el polígono que se origina al prolongar los lados de un polígono convexo. El pentágono es el polígono estrellado de menor número de lados.

4.4.3 PROPIEDADES

1. En todo polígono el número de lados es igual al número de vértices e igual al número de ángulos.

2. En todo polígono, de " n " lados, desde cada vértice, se pueden trazar $(n - 3)$ diagonales.

$$D = \frac{n(n - 3)}{2}$$

El número total de diagonales es:

3. La suma de las medidas de los ángulos interiores es:

$$S_i = 180^\circ(n - 2)$$

4. En todo polígono convexo, las medidas de los ángulos exteriores, uno por vértice, suman 360°

5. La medida de un ángulo central en un polígono regula es:

$$c = \frac{360^\circ}{n}$$

6. En polígonos equiángulos, cada ángulo interior mide:

$$i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

7. En polígonos equiángulos cada ángulo exterior mide

$$e = \frac{360^\circ}{n}$$

8. En un polígono estrellado, los ángulos interiores suman: $180^\circ(n-4)$, y los exteriores 720° .

9. El número de diagonales medias:

$$D_M = \frac{n(n-1)}{2}$$

10. El número de diagonales que se pueden trazar desde vértices consecutivos.

$$\left\{v(n) - \frac{(v+1)(v+2)}{2}\right\}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. En un polígono equiángulo la medida de su ángulo interior es el triple de la medida de su ángulo exterior. Calcular el número de lados.

- A. 10
- B. 9
- C. 8
- D. 7
- E. 6

RESOLUCIÓN:

Sea “n” el número de lados

Por dato: $m\angle i = 3(m\angle e)$

Se sabe: $m\angle i + m\angle e = 180^\circ$

Reemplazando:

$$3(m\angle e) + m\angle e = 180^\circ$$

$$m\angle e = 45^\circ$$

En los polígonos equiángulos se cumple:

$$m\angle e = \frac{360^\circ}{n}$$

$$45^\circ = \frac{360^\circ}{n}$$

$$n = 8$$

RPTA: C

2. En cierto polígono se cumple que el número de diagonales excede en 25 al número de vértices. ¿Cuántos lados tiene el polígono?.

- F. 10
- G. 20
- H. 5
- I. 16
- J. 14

RESOLUCIÓN:

Sea “n” el número de lados del polígono

Por dato: $N^\circ D = N^\circ V + 25$

Se sabe: $N^\circ D = N^\circ V$

Entonces:

$$\frac{n(n-3)}{2} = n + 25$$

$$n^2 - 3n = 2n + 50$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

Factorizando:

$$(n-10)(n+5) = 0$$

Luego se cumple:

$$n = 10$$

RPTA: A

3. En un polígono convexo se multiplica por 5 a su número de lados, y a sus diagonales se multiplica por 35. Cuántas diagonales tiene el polígono?

- A. 20
- B. 27
- C. 35
- D. 44
- E. 14

RESOLUCIÓN:

Por condición:

	N° lados	N° diagonales
P. Inicial	n	$\frac{n(n-3)}{2}$
P. Final	$5n$	$\frac{5n(5n-3)}{2}$

Luego se cumple:

$$\frac{5n(5n-3)}{2} = \frac{35n(n-3)}{2}$$

$$5n-3 = 7n-21$$

$$n = 9$$

Finalmente:

$$N^{\circ}D = \frac{9(9-3)}{2}$$

$$N^{\circ}D = 27$$

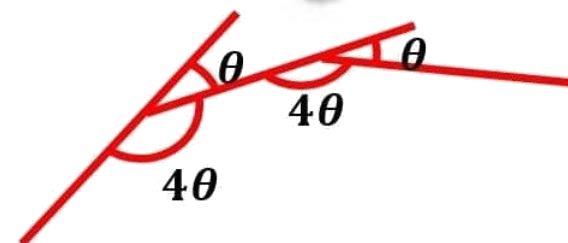
RPTA: B

4. En un polígono equiángulo se cumple que las medidas de un ángulo interior y un ángulo exterior son entre si como 4 es a 1. Calcular el número de diagonales.

- A. 15
- B. 25
- C. 35
- D. 45
- E. 30

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Entonces se cumple:

$$\theta + 4\theta = 180^{\circ}$$

$$\theta = 36^\circ$$

Luego:

$$m\angle e = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\frac{360^\circ}{n} = 36^\circ$$

$$n = 10$$

$$N^\circ D = \frac{10(10 - 3)}{2}$$

$$N^\circ D = 35$$

RPTA: C

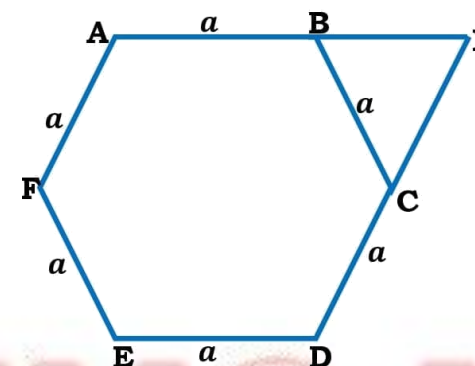
5. En un hexágono regular $ABCDEF$, se prolonga los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, los cuales se intersectan en " P ", si se cumple: $PB + PC = 10$. Calcular el perímetro del hexágono.

- A. 27 u
- B. 28 u
- C. 30 u
- D. 32 u
- E. 35 u

RESOLUCIÓN:

$n =$ es el número de lados

Graficando:



Sea " a " el lado del hexágono
Para el hexágono se cumple:

$$n = 6$$

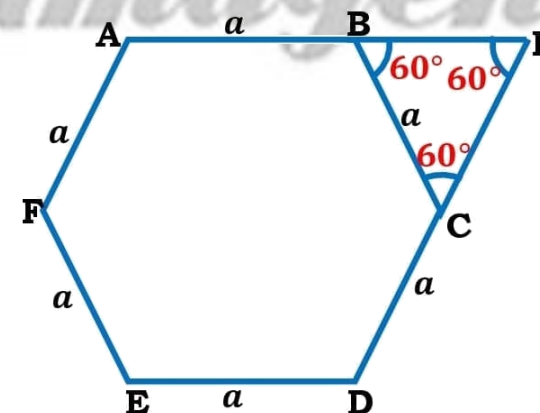
Entonces el perímetro:

$$2p = 6a$$

El ángulo exterior del hexágono

$$m\angle e = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

Completando el gráfico:



Del gráfico se concluye que: $\triangle PBC$ equilátero: $BP = BC = PC = a$

Luego por dato:

$$PB + PC = 10$$

$$\rightarrow a + a = 10$$

$$2a = 10$$

$$a = 5$$

Calculamos el perímetro:

$$2p = 6a$$

$$2p = 6(5) = 30$$

$$\therefore 2p = 30 u$$

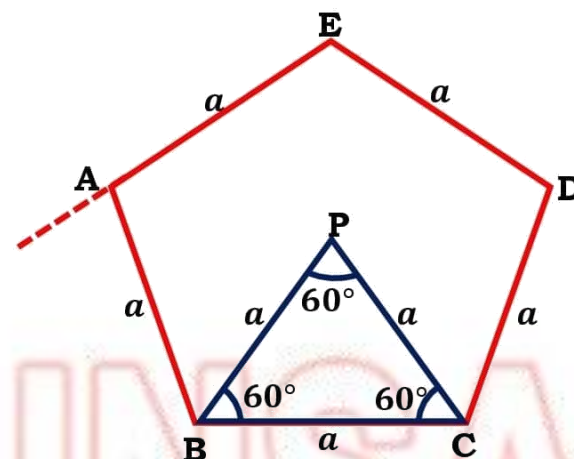
RPTA: C

6. En el manto de un Rey precolombino, la filigrana está conformada de polígonos pentagonales, una de las figuras es el pentágono $ABCDE$, en su interior se ubica el punto "P" de tal manera que el triángulo PBC es equilátero. Calcular la medida del menor ángulo formado por la prolongación de los lados $\overline{EA}$ y $\overline{DP}$.

- A. 25°
- B. 30°
- C. 36°
- D. 37°
- E. 28°

RESOLUCIÓN:

Al graficar se tiene:

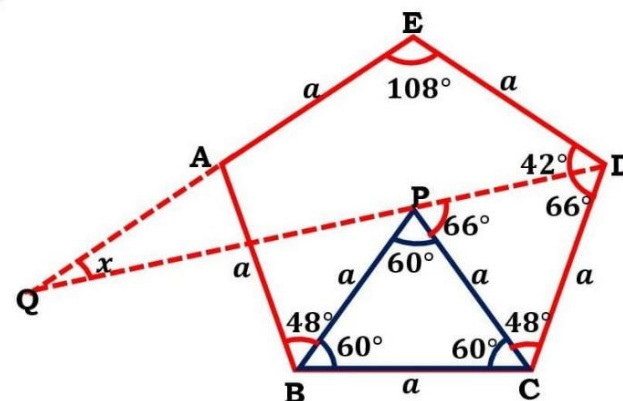


Por dato: $n = 5$

$$m\angle i = \frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{180^\circ(5-2)}{5}$$

$$m\angle i = 108^\circ$$

Trazando $\overline{DQ}$ y $\overline{EAQ}$



$\triangle PCD$ isósceles

$$m\angle PCD = 48^\circ$$

$$m\angle CPD = m\angle PDC = 66^\circ$$

$$\therefore m\angle PDE = 42^\circ$$

$$\triangle QDE$$

$$x + 108^\circ + 42^\circ = 180^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

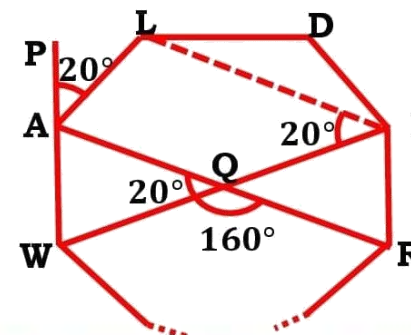
RPTA: B

7. Se tiene un polígono regular llamado *WALDIR* ..., de " n " lados si $\overline{WI}$ y $\overline{AR}$, forman ángulo de 160° . Hallar el número de diagonales de este polígono.

- A. 135
- B. 120
- C. 118
- D. 75
- E. 105

RESOLUCIÓN:

Graficando y trazando las diagonales: $\overline{WI}$ y $\overline{AR}$



$$m\angle WQR = 160^\circ$$

$$m\angle AQW = 20^\circ$$

Por propiedad se cumple:

$$AR \parallel LI \therefore m\angle WIL = 20^\circ$$

$$m\angle WIL = m\angle PAL = 20^\circ$$

$$m\angle e = \frac{360^\circ}{n}$$

$$m\angle e = \frac{360^\circ}{n} = 20^\circ$$

$$n = 18$$

Luego:

$$N^\circ D = \frac{18(18 - 3)}{2}$$

$$\therefore N^\circ D = 135$$

RPTA: A

8. Se tiene un índalo en forma de hexágono regular $ABCDEF$, sobre el lado $\overline{AB}$, se construye el cuadrado $ABHI$. Calcular: $m\angle FME$, si "M" punto medio de $\overline{EI}$.

- A. 30°
- B. 36°
- C. 40°
- D. 45°
- E. 48°

RESOLUCIÓN:

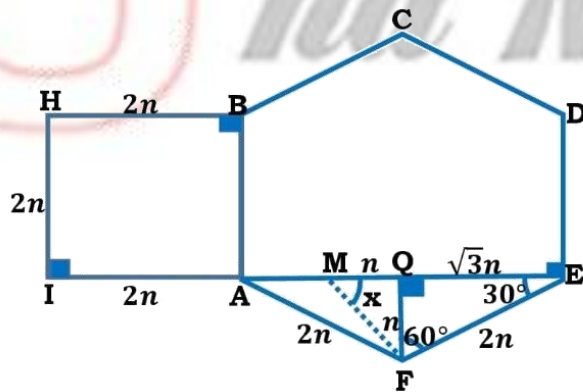
Graficando de acuerdo a los datos:

Si: " $2n$ " es el lado del hexágono, también será el lado del cuadrado.

Hallando la medida del ángulo interior:

$$m\angle i = \frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{180^\circ(6-2)}{6}$$

$$m\angle i = 120^\circ$$



$\triangle AFE$ isósceles

$\triangle FQE$, notable: 30° y 60°

$$FQ = n ; QE = n\sqrt{3}$$

Como "M" es punto medio de $\overline{EI}$, luego se cumple:

$$IE = 2n + 2n\sqrt{3}$$

$$IM = \frac{2n + 2n\sqrt{3}}{2} = n + n\sqrt{3}$$

Luego: $MQ = n$, y $\triangle MOF$, notable de 45°

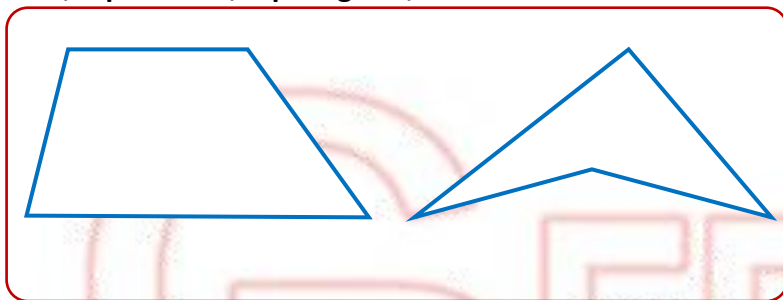
$$\therefore x = 45^\circ$$

RPTA: D

4.5 CUADRILÁTEROS

4.5.1. DEFINICIÓN

Son polígonos de cuatro lados, estos pueden ser convexos, no convexos, equiláteros, equiángulos, etc.



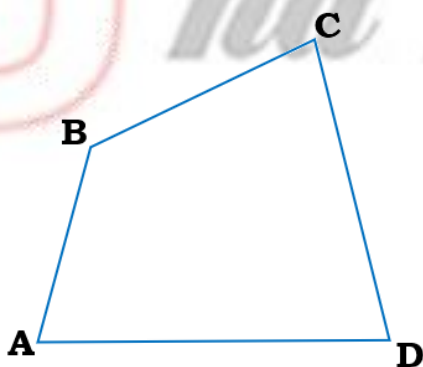
Recuerda que:

En todo cuadrilátero la suma de sus ángulos internos es 360°

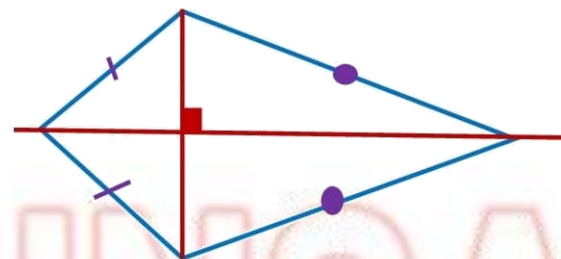
4.5.2. CLASIFICACIÓN

4.5.2.1. TRAPEZOIDES:

Los que no tienen ningún par de lados opuestos paralelos

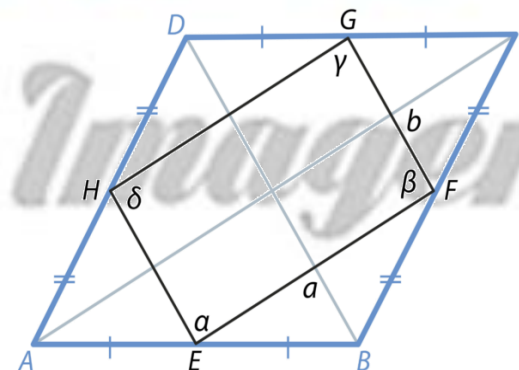


Un caso particular es el trapezoide simétrico, donde una diagonal es su eje de simetría, también se le llama trapezoide BISOSCELES O CONTRAPARALELOGRAMO.



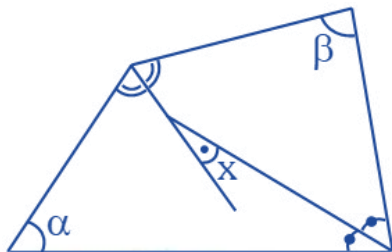
4.5.2.1.1. PROPIEDADES:

I) En el trapezoide ABCD, H, G, F y E son puntos medios.



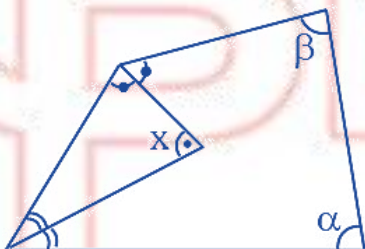
Entonces HGFE es un paralelogramo.

II) En el trapezoide, el ángulo formado por dos bisectrices interiores opuestas es:



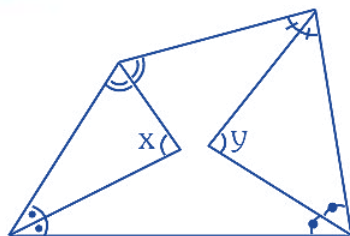
$$x = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

- III) En el trapezoide, el ángulo formado por dos bisectrices interiores consecutivas es:



$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

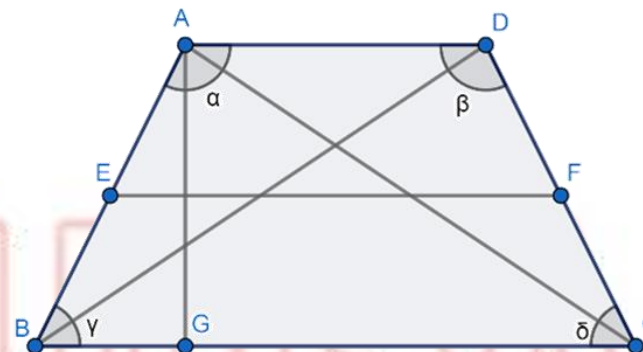
- IV) En el trapezoide, se cumple (I)



$$x + y = 180^\circ$$

4.5.2.2. TRAPECIO

Es el cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos paralelos, dichos lados son las bases del trapecio.



ELEMENTOS:

$\overline{AG}$: Altura

$\overline{EF}$: Mediana

$\overline{BD}$; $\overline{AC}$: Diagonales

$\overline{AD} // \overline{EF} // \overline{BC}$

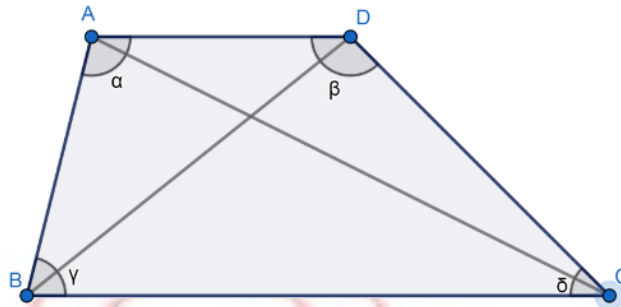
$\overline{BC}$: Base mayor

$\overline{AD}$: Base menor

4.5.2.2.1. CLASES:

I) TRAPECIO ESCALENO

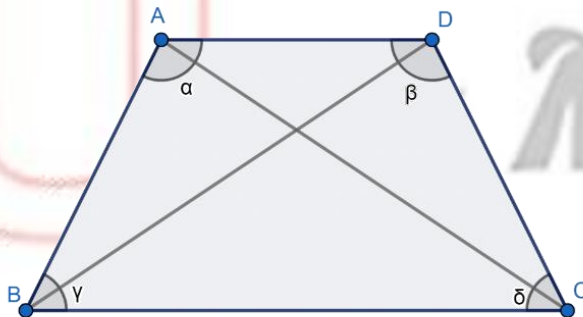
Es aquel en el que su par de lados opuestos no paralelos tienen diferente medida.



$$\overline{AB} \neq \overline{CD}$$

II) TRAPECIO ISOSCELES

Es aquel trapezio, en el que su par de lados opuestos no paralelos tienen igual medida.

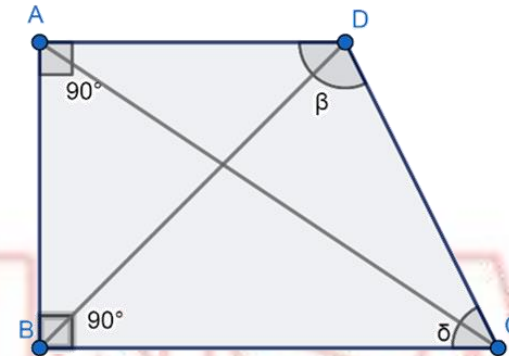


$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

$$m\angle\gamma = m\angle\delta$$

III) TRAPECIO RECTÁNGULO

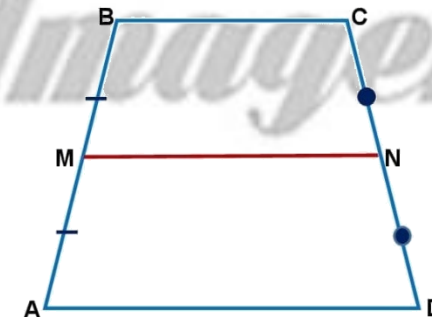
Es aquel trapezio, en el que un lado no paralelo es su altura, tienen dos ángulos rectos.



$\overline{AB}$: Altura

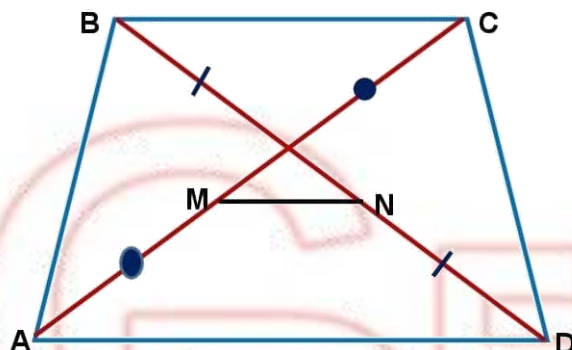
4.5.2.2.2. PROPIEDADES

I) En todo trapezio, la longitud de la mediana es igual a la semisuma de las longitudes de sus bases.



$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

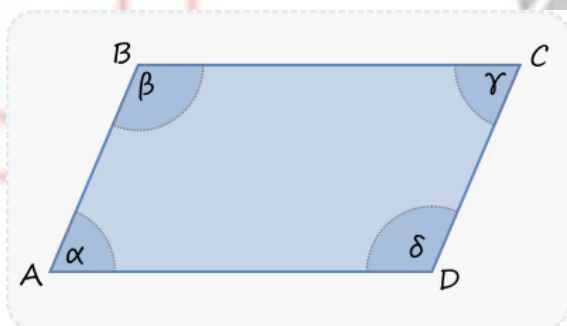
II) En todo trapecio la longitud del segmento que une los puntos medios de sus diagonales es igual a la semidiferencia de las longitudes de sus bases.



$$MN = \frac{AD - BC}{2}$$

4.5.2.3. PARALELOGRAMO

Es aquel cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos y congruentes respectivamente. También se le conoce con el nombre de ROMBOIDE.



PROPIEDADES

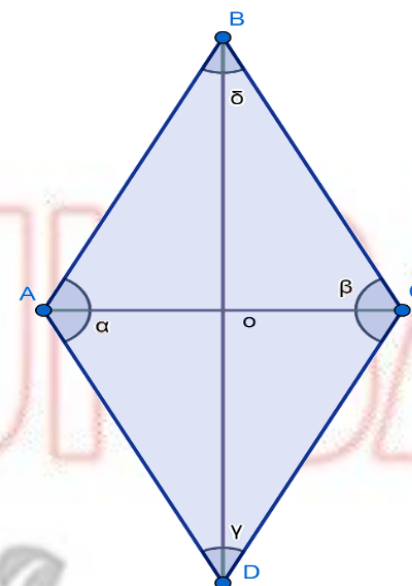
$$m\angle\alpha = m\angle\gamma; m\angle\beta = m\angle\delta$$

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

$$m\angle\alpha + m\angle\beta = 180^\circ; m\angle\gamma + m\angle\delta = 180^\circ$$

4.5.2.4. ROMBO



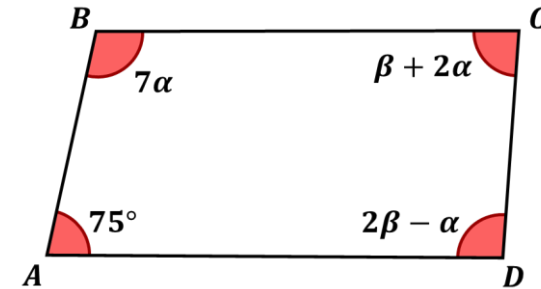
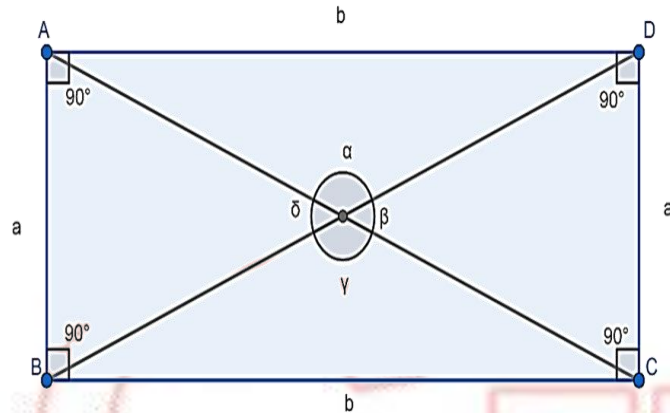
PROPIEDADES

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$$

$$m\angle\alpha = m\angle\beta; m\angle\gamma = m\angle\delta$$

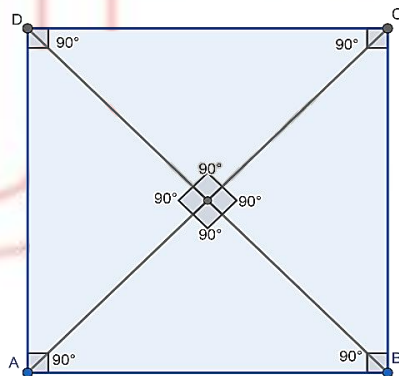
4.5.2.5. RECTÁNGULO

Tiene dos pares de lados opuestos de igual medida y paralelos, sus diagonales son congruentes y sus cuatro ángulos interiores son rectos.



4.5.2.6. CUADRADO

Tiene sus cuatro lados congruentes y paralelos, sus diagonales tienen igual medida y son perpendiculares y determinan ángulos con los lados, cuya medida es de 45° .



- A. 105°
- B. 82°
- C. 74°
- D. 70°
- E. 58°

RESOLUCION

Como $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, entonces $ABCD$ es un trapecio.



Por propiedad en el trapecio:

$$75^\circ + 7\alpha = 180^\circ$$

$$7\alpha = 105^\circ$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. En la siguiente figura: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, calcular el valor de " $\alpha + \beta$ ".

$$\alpha = 15^\circ \rightarrow \alpha = 15^\circ \dots (I)$$

Por propiedad en el trapecio:

$$\beta + 2\alpha + 2\beta - \alpha = 180^\circ$$

$$3\beta + \alpha = 180^\circ \dots (II)$$

Luego, reemplazando (I) en (II):

$$3\beta + 15^\circ = 180^\circ$$

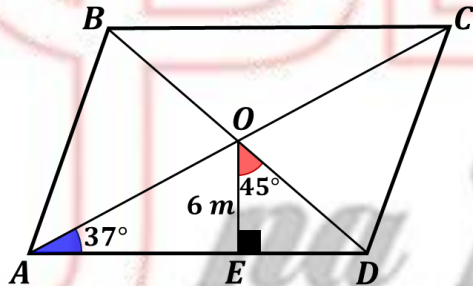
$$3\beta = 165^\circ \rightarrow \beta = 55^\circ$$

Nos pide:

$$\therefore \alpha + \beta = 15^\circ + 55^\circ = 70^\circ$$

RPTA: D

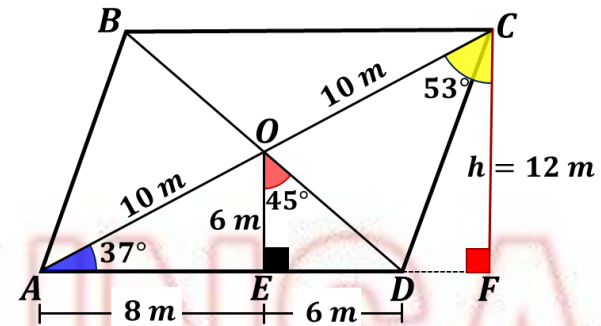
2. Si $ABCD$ es un romboide. Calcular su área.



- A. 110 m^2
- B. 182 m^2
- C. 174 m^2
- D. 170 m^2
- E. 168 m^2

RESOLUCIÓN

En la gráfica, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan en "O" y observamos los triángulos rectángulos notables de $(37^\circ - 53^\circ)$ y $(45^\circ - 45^\circ)$:



$\triangle OED$: notable de 45° y 45° :

$$ED = 6 \text{ m}$$

$\triangle OEA$: notable de 37° y 53° :

$$AE = 8 \text{ m}$$

$$AO = 10 \text{ m}$$

Luego: $AD = 14 \text{ m}$

Trazamos la altura $\overline{CF}$:

$$CF = h$$

$\triangle AFC$: notable de 37° y 53° :

$$AC = 20 \text{ m}$$

$$h = 12 \text{ m}$$

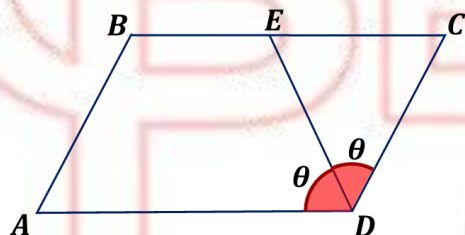
Calculamos el área del paralelogramo:

$$A = 14(12)$$

$$\therefore A = 168 \text{ m}^2$$

RPTA: E

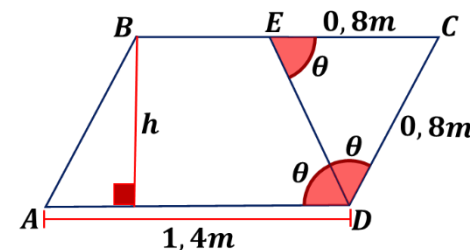
3. Una mesa de trabajo tiene la forma del romboide $ABCD$ (como se muestra en la figura), si $AD = 1,4 \text{ m}$ y $CD = 0,8 \text{ m}$. Hallar la altura del trapecio $ABED$, si su área es $0,7 \text{ m}^2$.



- A. 60 cm
- B. 70 cm
- C. 55 cm
- D. 67 cm
- E. 75 cm

RESOLUCION:

En la gráfica, como las bases del trapecio $ABED$ son paralelas, completamos los ángulos (por propiedad de ángulos alternos internos):



Luego, en el triángulo isósceles ECD :

$$EC = CD = 0,8$$

Luego:

$$BE = 1,4 - 0,8 = 0,6$$

Se sabe que el área del trapecio es:

$$A = \left(\frac{B + b}{2} \right) h$$

Por dato:

$$A = 0,7 \text{ m}^2$$

Reemplazando:

$$0,7 = \left(\frac{1,4 + 0,6}{2} \right) h$$

$$0,7 = (1)h$$

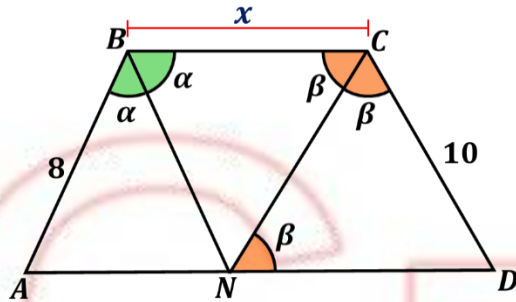
$$h = 0,7 \text{ m}$$

$$\therefore h = 70 \text{ cm}$$

RPTA: B

4. Un parque de juegos con una fuente de agua con forma de trapecio (como se muestra en la figura), tiene un área igual a 90 m^2 y la altura

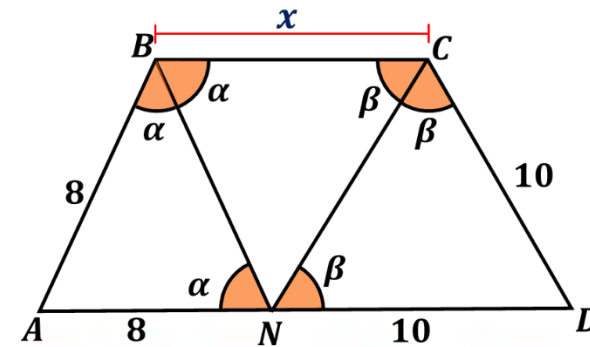
del triángulo ABN relativa al lado $\overline{AN}$ es igual a 6 m. Calcular la longitud de la base menor del trapecio.



- A. 13 m
- B. 12 m
- C. 14 m
- D. 17 m
- E. 15 m

RESOLUCION:

Se sabe que las bases de un trapecio son paralelas, luego completamos los ángulos, aplicando propiedad de ángulos alternos internos.



Por triángulos isósceles:

$$AN = 8 \quad \wedge \quad ND = 10$$

Aplicamos la fórmula de área del trapecio:

$$A = \frac{(B + b)}{2} h$$

Por dato:

$$A = 90 \text{ m}^2$$

Reemplazando:

$$90 = \left(\frac{18 + x}{2} \right) 6$$

$$90 = (18 + x) 3$$

$$30 = 18 + x$$

$$\therefore x = 12 \text{ m}$$

RPTA: B

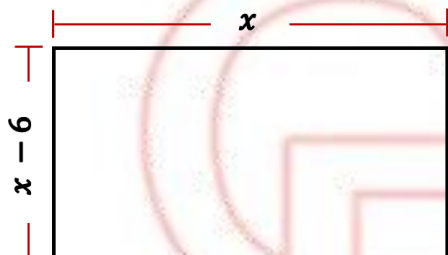
5. Un granjero tiene un campo rectangular cuyo ancho es 6 m menos que el largo. Calcular el perímetro de su campo, si su área es de 315 m².

- A. 70 m

- B. 82 m
C. 72 m
D. 90 m
E. 24 m

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



El área del campo será:

$$A = (x - 6)(x)$$

$$A = x^2 - 6x$$

Por dato:

$$A = 315 \text{ m}^2$$

Reemplazando:

$$315 = x^2 - 6x$$

$$0 = x^2 - 6x - 315$$

Factorizando:

$$0 = (x - 21)(x + 15)$$

$$x - 21 = 0 \quad \vee \quad x + 15 = 0$$

$$x = 21 \quad \vee \quad x = -15$$

Se descarta $x = -15$, porque la longitud es positiva, entonces:

$$x = 21$$

Calculando su perímetro será:

$$2p = 2(x - 6 + x)$$

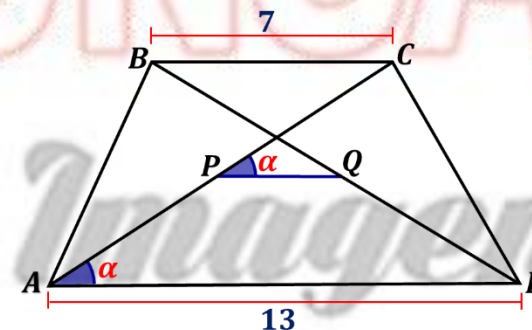
$$2p = 2(21 - 6 + 21)$$

$$2p = 72$$

Por lo tanto, el perímetro del campo es 72 m.

RPTA: C

6. Un agricultor tiene una parcela de tierra con forma de trapecio $ABCD$, cuyas longitudes de sus bases son 7 metros y 13 metros, la altura es 10 metros. También se sabe que "P" y "Q" son puntos medios de las diagonales. Si se divide la parcela, como se muestra en la gráfica. Calcular el área de la región $APQD$.



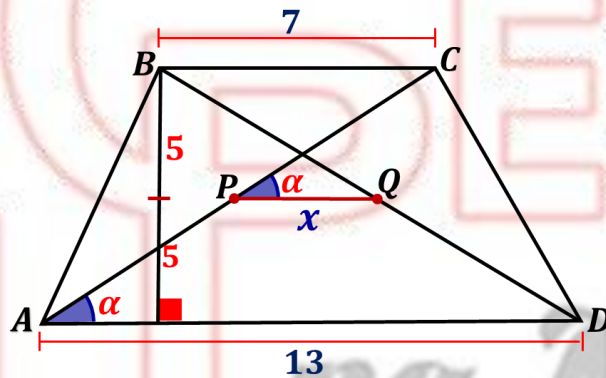
- A. 28 m^2
B. 38 m^2
C. 40 m^2
D. 82 m^2
E. 48 m^2

RESOLUCIÓN:

Como "P" y "Q" son puntos medios de las diagonales, entonces se cumple por propiedad:

$$PQ = \frac{AD - BC}{2}$$

$$PQ = \frac{13 - 7}{2} = 3$$



Luego, se tiene el área del trapecio:

$$A_{APQD} = \left(\frac{AD + PQ}{2} \right) h$$

$$A_{APQD} = \left(\frac{13 + 3}{2} \right) 5$$

$$A_{APQD} = 8(5)$$

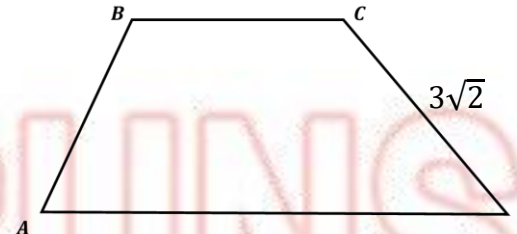
$$\therefore A_{APQD} = 40 \text{ m}^2$$

RPTA: C

7. El escenario de un teatro tiene la forma de un trapecio ABCD tal que:

$$\frac{m\angle A}{3} = \frac{m\angle B}{5} = \frac{m\angle C}{6} = \frac{m\angle D}{2},$$

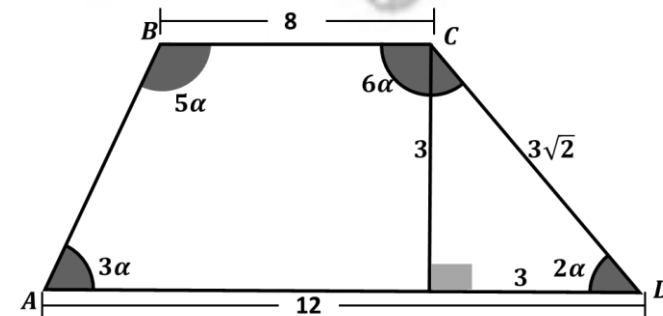
con una base frontal más ancha que la base trasera. Si la base frontal mide 12 metros y la base trasera 8 metros. Calcular el área del escenario. (Ver Figura).



- A. 20 m^2
- B. 30 m^2
- C. 40 m^2
- D. 50 m^2
- E. 60 m^2

RESOLUCIÓN:

Completando el gráfico con los datos del problema:



Hacemos que:

$$\frac{m\angle A}{3} = \frac{m\angle B}{5} = \frac{m\angle C}{6} = \frac{m\angle D}{2} = \alpha$$

Luego, tenemos:

$$\angle A = 3\alpha; \angle B = 5\alpha; \angle C = 6\alpha; \angle D = 2\alpha$$

Por la suma de los ángulos interiores en el trapecio:

$$3\alpha + 5\alpha + 6\alpha + 2\alpha = 360^\circ$$

$$16\alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = 22,5^\circ$$

Reemplazando, se observa que $\triangle CED$ es un triángulo rectángulo notable de $45^\circ - 45^\circ$:

$$h = 3$$

Luego, calculamos el área del trapecio:

$$A_{ABCD} = \left(\frac{AD + BC}{2} \right) h$$

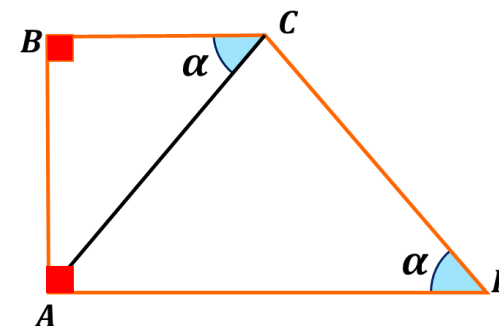
$$A_{ABCD} = \left(\frac{12 + 8}{2} \right) 3$$

$$A_{ABCD} = 10(3)$$

$$\therefore A_{ABCD} = 30 \text{ m}^2$$

RPTA: B

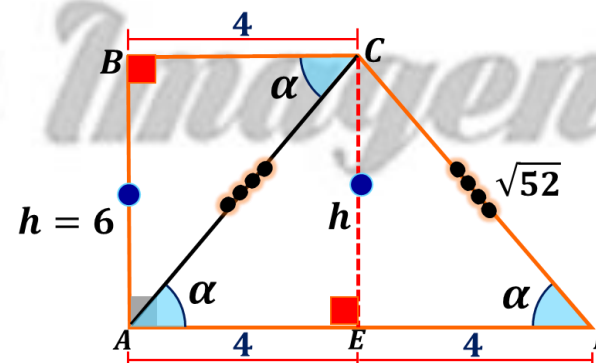
8. El diseño de un envase para un Tetrapak tiene forma de trapecio, (como se muestra en la gráfica). Calcular el perímetro de dicho Tetrapak, si $BC = 4 \text{ cm}$ y el área es 36 cm^2 .



- A. $2(5 + \sqrt{7}) \text{ cm}$
- B. $2(9 + \sqrt{13}) \text{ cm}$
- C. $2(3 + \sqrt{13}) \text{ cm}$
- D. $2(5 + \sqrt{13}) \text{ cm}$
- E. $2(9 + \sqrt{7}) \text{ cm}$

RESOLUCIÓN:

Completamos el gráfico con los datos:



Por congruencia de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$:

$$ED = 4 \text{ cm}$$

Además, $BC \parallel AD$ entonces $\triangle ACD$ es isósceles:

$$AE = 4\text{ cm}$$

Como el área del trapecio es 36 m^2 reemplazamos:

$$A_{ABCD} = \left(\frac{B+b}{2}\right)h$$

$$36 = \left(\frac{8+4}{2}\right)h$$

$$36 = (6)h$$

$$\therefore h = 6\text{ cm}$$

En el triángulo CED , por Pitágoras hallamos CD :

$$CD^2 = 4^2 + 6^2$$

$$CD = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\text{ cm}$$

Por lo tanto, el perímetro del trapecio será:

$$P = 8 + 6 + 4 + 2\sqrt{13}$$

$$P = 18 + 2\sqrt{13}$$

$$\therefore P = 2(9 + \sqrt{13})\text{ cm}$$

RPTA: B

4.6 SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES - CONVERSIÓN

4.6.1. SISTEMA SEXAGESIMAL (S)

Denominado también sistema inglés. Este sistema se obtiene al dividir al ángulo de una vuelta en 360 partes iguales, a esta unidad se le llama grado sexagesimal, teniendo que:

$$1^{\circ} = \frac{\text{una vuelta}}{360}$$

En consecuencia:

$$\text{una vuelta} = 360^{\circ}$$

Las subunidades son el minuto sexagesimal ($1'$) y el segundo sexagesimal ($1''$).

Las equivalencias son:

$$1 \text{ vuelta} = 360^{\circ}$$

$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

4.6.2. SISTEMA CENTESIMAL (C)

Denominado también sistema francés. Este sistema tiene como unidad a un ángulo que se obtiene al dividir al ángulo de una vuelta en 400 partes iguales, a esta unidad se le llama grado centesimal, teniendo que:

$$1^g = \frac{\text{una vuelta}}{400}$$

En consecuencia:

$$\text{una vuelta} = 400^g$$

Las subunidades son el minuto centesimal (1^m) y el segundo centesimal (1^s).

Las equivalencias son:

$$1 \text{ vuelta} = 400^g$$

$$1^g = 100^m$$

$$1^m = 100^s$$

$$1^g = 10\,000^s$$

4.6.3. SISTEMA RADIAL O CIRCULAR (R)

Denominado también sistema circular o también sistema internacional. Este sistema tiene como unidad a un ángulo cuyo vértice está en el centro de una circunferencia y que subtiende a un arco cuya longitud es igual al radio de dicha circunferencia.

Unidad: **1 rad**.

En consecuencia:

$$\text{una vuelta} = 2\pi \text{ rad}$$

4.6.4. RELACIÓN NUMÉRICA ENTRE LOS SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

$$\frac{S}{360} = \frac{C}{400} = \frac{R}{2\pi} = k$$

Equivalentemente:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

También:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$$

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Siendo “S” y “C” los sistemas sexagesimal y centesimal respectivamente. Reducir:

$$A = \frac{5S - 2C}{C - S}$$

- A. 5
- B. 15
- C. 18
- D. 25
- E. 32

RESOLUCION:

Dado que:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = k \rightarrow \begin{cases} S = 9k \\ C = 10k \end{cases}$$

Reemplazando en la expresión pedida:

$$A = \frac{5(9k) - 2(10k)}{10k - 9k} = \frac{25k}{k}$$

$$\therefore A = 25$$

RPTA: D

2. Si el ángulo “ α ” mide $30^g 20^m$. ¿Cuál es su medida en el sistema sexagesimal?

- A. $12,4^\circ$
- B. $27,18^\circ$
- C. $32,45^\circ$
- D. $42,27^\circ$
- E. $72,36^\circ$

RESOLUCION:

Como:

$$1^g = 100^m$$

Se tiene que:

$$\alpha = 30^g 20^m = 30^g + 20^m \frac{1^g}{100^m}$$

$$\alpha = 30,20^g$$

$$\alpha = 30,20^g \frac{9^\circ}{10^g}$$

$$\therefore \alpha = 27,18^\circ$$

RPTA: B**3. Simplificar:**

$$B = \frac{2\pi C + \frac{2}{9}\pi S + 80C}{\pi C + 60R}$$

Donde: S, C y R son los sistemas de medidas angulares sexagesimal, centesimal y circular respectivamente.

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 4
- E. 5

RESOLUCION:

Dado que:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{R}{\frac{\pi}{20}} = k \rightarrow \begin{cases} S = 9k \\ C = 10k \\ R = \frac{\pi}{20}k \end{cases}$$

Reemplazando en la expresión pedida:

$$B = \frac{2\pi C + \frac{2}{9}\pi S + 80R}{\pi C + 60R}$$

$$B = \frac{2\pi(10k) + \frac{2}{9}\pi(9k) + 80(\frac{\pi}{20}k)}{\pi(10k) + 60(\frac{\pi}{20}k)} = \frac{26\pi k}{13\pi k}$$

$$\therefore B = 2$$

RPTA: C**4. Si los siguientes ángulos:**

$$M = 12x^\circ \text{ y } N = 10(7x - 5)^\circ$$

Son suplementarios. Determinar la medida del menor ángulo.

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

RESOLUCION:

Como M y N son ángulos suplementarios, se tiene que:

$$12x^\circ + 10(7x - 5)^\circ = 180^\circ$$

$$12x^\circ + 10(7x - 5)^\circ \frac{9^\circ}{10^\circ} = 180^\circ$$

$$12x^\circ + 63x^\circ - 45^\circ = 180^\circ$$

$$75x^\circ = 225^\circ$$

$$x = \frac{225}{75}$$

$$\therefore x = 3$$

RPTA: C

5. Si los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal son números consecutivos. Calcular la medida del ángulo en el sistema sexagesimal.

- A. 9
- B. 10
- C. 30
- D. 42
- E. 55

RESOLUCION:

Por dato S y C son números consecutivos, tendrán la forma:

$$S = k$$

$$C = k + 1$$

$$\text{Luego: } C - S = 1$$

Reemplazando la equivalencia, se tiene:

$$\frac{10}{9}S - S = 1$$

$$\frac{1}{9}S = 1$$

$$\therefore S = 9$$

RPTA: A

6. Si la diferencia de los recíprocos de los números de grados sexagesimal y centesimal de un mismo ángulo es igual a su número

de radianes que contiene el ángulo dividido por 20π . Calcular el valor de dicho ángulo en el sistema radial.

- A. $\frac{\pi\sqrt{10}}{30}$
- B. $\frac{\pi\sqrt{10}}{3}$
- C. $\frac{\pi\sqrt{3}}{10}$
- D. 2π
- E. 5π

RESOLUCION:

Por dato:

$$\frac{1}{S} - \frac{1}{C} = \frac{R}{20\pi} \dots (*)$$

Sabemos que:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{R}{\frac{\pi}{20}} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{180R}{\pi} \\ C = \frac{200R}{\pi} \end{cases}$$

Reemplazando en (*), se tiene:

$$\frac{\pi}{180R} - \frac{\pi}{200R} = \frac{R}{20\pi}$$

$$\frac{\pi}{20R} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = \frac{R}{20\pi}$$

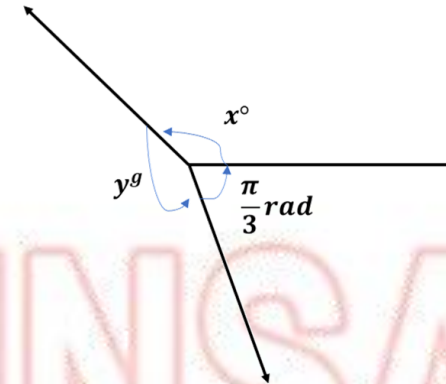
$$\pi^2 \left(\frac{1}{90} \right) = R^2$$

$$R = \frac{\pi}{\sqrt{90}} = \frac{\pi}{3\sqrt{10}}$$

$$\therefore R = \frac{\pi\sqrt{10}}{30}$$

7. De la siguiente figura, calcular:

$$10x + 9y$$



- A. 100
- B. 1 000
- C. 3 000
- D. 4 200
- E. 6 000

RESOLUCION:

Del gráfico, se tiene que:

$$x^\circ + y^\circ + \frac{\pi}{3} rad = 360^\circ$$

$$x^\circ + y^\circ \frac{9^\circ}{10^\circ} + \frac{\pi}{3} rad \frac{180^\circ}{\pi rad} = 360^\circ$$

$$x^\circ + \frac{9^\circ}{10} y + 60^\circ = 360^\circ$$

$$x^\circ + \frac{9^\circ}{10} y = 300^\circ$$

$$\frac{10x + 9y}{10} = 300$$

RPTA: A

$$\therefore 10x + 9y = 3000$$

RPTA: C

8. Si A representa $1/600$ parte de un grado centesimal y B, $1/200$ parte de un radián, hallar A/B.

A. 2π

B. 6

C. π

D. $\frac{\pi}{600}$

E. $\frac{\pi}{3}$

RESOLUCION:

Por dato:

$$A = \frac{1^g}{600} \text{ y } B = \frac{1\text{rad}}{200}$$

Convirtiendo al sistema radial:

$$A = \frac{1^g}{600} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{200^g} = \frac{\pi \text{ rad}}{120\,000}$$

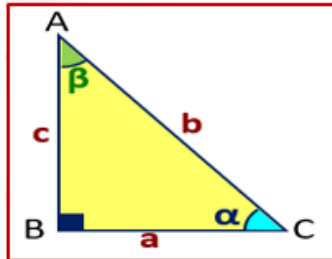
Nos piden calcular:

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{\frac{\pi \text{ rad}}{120\,000}}{\frac{1\text{rad}}{200}} \\ \therefore \frac{A}{B} &= \frac{\pi}{600} \end{aligned}$$

RPTA: D

4.7 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Dado el triángulo ABC , recto en " B ", según la figura, se establecen las siguientes razones trigonométricas para los ángulos complementarios " α " y " β ":



SENO → $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	COSECANTE → $\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}}$
COSENO → $\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	SECANTE → $\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$
TANGENTE → $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$	COTANGENTE → $\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}}$
$\text{sen } \alpha = \frac{c}{b}, \text{cos } \alpha = \frac{a}{b}, \text{tg } \alpha = \frac{c}{a}, \text{ctg } \alpha = \frac{a}{c}, \text{sec } \alpha = \frac{b}{a}, \text{csc } \alpha = \frac{b}{c}$ $b > c, b > a \quad b^2 = a^2 + c^2$	

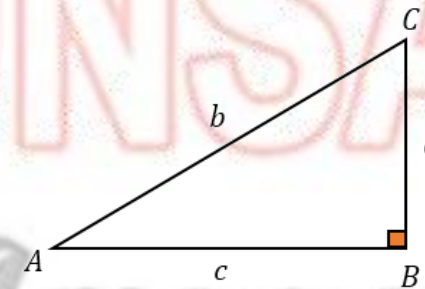
PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. El valor numérico del área de un triángulo rectángulo ACB , recto en " B ", es igual a $18 \text{sen } A \text{sen } C \text{ u}^2$. Calcular la hipotenusa del triángulo.

- A. 6 u
- B. 4 u
- C. 3 u
- D. 5 u
- E. $2,5 \text{ u}$

RESOLUCIÓN:

Sea el triángulo rectángulo ACB :



De la gráfica:

$$\text{Área} = \frac{ca}{2}$$

Por dato:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 18 \text{sen } A \cdot \text{sen } C \\ \rightarrow \frac{ca}{2} &= 18 \text{sen } A \cdot \text{sen } C \\ ca &= 36 \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{b}\right) \\ ca &= 36 \frac{ac}{b^2} \end{aligned}$$

$$b^2 = 36 \frac{ac}{ca}$$

$$b = 6$$

∴ La hipotenusa mide 6 u

RPTA: A

2. Sea ABC un triángulo rectángulo de hipotenusa $\overline{AC}$. Se ubica el punto "D" en el cateto $\overline{BC}$, de modo que, $\frac{CD}{DB} = 3$. Si $m\angle DAB = \alpha$ y $m\angle ACB = \beta$, hallar el valor de $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta$

- A. 1
- B. 4
- C. 3
- D. 2
- E. 5

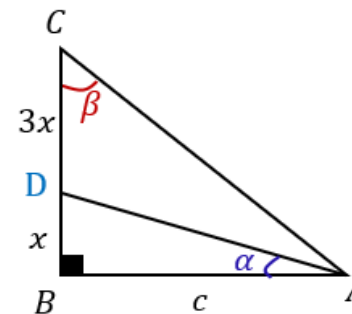
RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$\frac{CD}{DB} = 3$$

$$\frac{CD}{DB} = \frac{3x}{x}$$

Graficamos según los datos:



Piden hallar:

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \left(\frac{AB}{BD} \right) \left(\frac{CB}{AB} \right)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{CB}{BD}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{4x}{x}$$

$$\therefore \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = 4$$

RPTA: B

3. En un triángulo rectángulo ABC , recto en "A", de área $0,5 \text{ m}^2$, calcular:

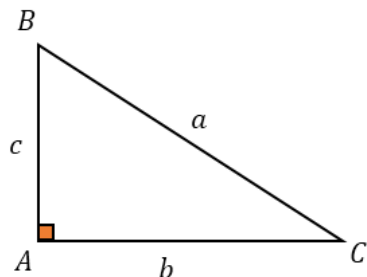
$$\frac{(AC)^2}{\operatorname{tg} B} + \frac{(AB)^2}{\operatorname{tg} C}$$

- A. 0,5
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4

RESOLUCIÓN:

Graficamos a partir de los datos:

RPTA: C



Por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \dots (1)$$

Por dato:

$$\text{Área} = 0,5 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{bc}{2}$$

$$\rightarrow \frac{bc}{2} = \frac{1}{2}$$

$$bc = 1$$

Piden calcular:

$$\frac{AC^2}{\operatorname{tg} B} + \frac{AB^2}{\operatorname{tg} C} = \frac{b^2}{\frac{b}{c}} + \frac{c^2}{\frac{c}{b}}$$

$$\frac{AC^2}{\operatorname{tg} B} + \frac{AB^2}{\operatorname{tg} C} = \frac{b^2 c}{b} + \frac{c^2 b}{c}$$

$$\frac{AC^2}{\operatorname{tg} B} + \frac{AB^2}{\operatorname{tg} C} = bc + cb$$

$$\frac{AC^2}{\operatorname{tg} B} + \frac{AB^2}{\operatorname{tg} C} = 1 + 1$$

4. Si " θ " es un ángulo del primer cuadrante, tal que, $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{6}$. Hallar el valor de:

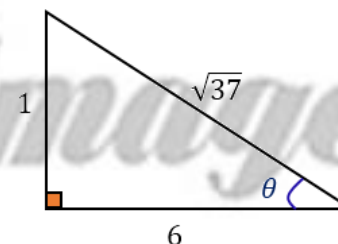
$$T = \sqrt{37} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta + 2}{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta}} - \frac{\cos \theta}{2} \right)$$

- A. 5
- B. 4
- C. 6
- D. 3
- E. 2

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{6}$$



Hallamos la hipotenusa:

$$1^2 + 6^2 = (\sqrt{37})^2$$

$$\sqrt{1 + 6^2} = \sqrt{37}$$

Hallamos T :

$$T = \sqrt{37} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta + 2}{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta}} - \frac{\cos \theta}{2} \right)$$

$$T = \sqrt{37} \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{6} + 6 + 2}{\frac{1}{6} + 6}} - \frac{\frac{6}{\sqrt{37}}}{2} \right)$$

$$T = \sqrt{37} \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{6} + 8}{\frac{37}{6}}} - \frac{6}{2\sqrt{37}} \right)$$

$$T = \sqrt{37} \left(\sqrt{\frac{\frac{49}{6}}{\frac{37}{6}}} - \frac{3}{\sqrt{37}} \right)$$

$$T = \sqrt{37} \left(\sqrt{\frac{49}{37}} - \frac{3}{\sqrt{37}} \right)$$

$$T = \sqrt{37} \left(\frac{7}{\sqrt{37}} - \frac{3}{\sqrt{37}} \right)$$

$$T = \sqrt{37} \left(\frac{4}{\sqrt{37}} \right)$$

$$\therefore T = 4$$

RPTA: B

5. Las longitudes de los lados de un rectángulo de área 108 m^2 se diferencian en 3 metros. Hallar el producto de la menor razón trigonométrica del ángulo formado por la diagonal y uno de los lados; y la cotangente del mayor ángulo agudo.

A. 3/10

B. 9/20

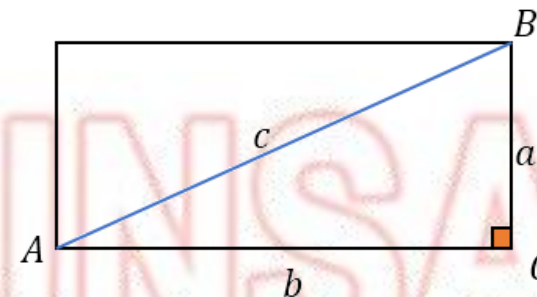
C. 2/3

D. 4/5

E. 5/4

RESOLUCIÓN:

Graficamos según los datos:



Del enunciado:

$$\text{Área} = 108$$

$$a \cdot b = 108 \dots (1)$$

La diferencia es 3:

$$b - a = 3$$

$$b = 3 + a \dots (2)$$

Sustituyendo en (1)

$$a(3 + a) = 108$$

$$a^2 + 3a = 108$$

$$a^2 + 3a - 108 = 0$$

$$(a + 12)(a - 9) = 0$$

$$a + 12 = 0$$

$$a = -12 \dots (\text{no corresponde})$$

$$a - 9 = 0$$

$$\rightarrow a = 9$$

Sustituyendo en (2)

$$b = 3 + 9$$

$$\rightarrow b = 12$$

Por Pitágoras:

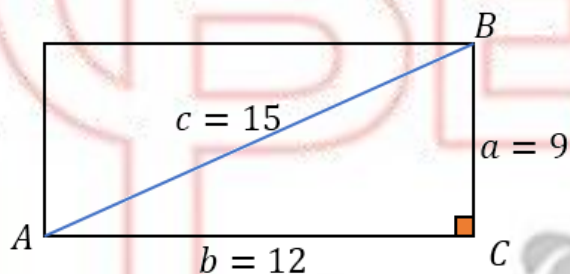
$$c^2 = 12^2 + 9^2$$

$$c^2 = 144 + 81$$

$$c^2 = 225$$

$$\rightarrow c = 15$$

Completamos datos en el gráfico:



La menor razón trigonométrica será:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

La ctg del mayor ángulo agudo será:

$$\operatorname{ctg} B = \frac{a}{b} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

$\therefore$ El producto es $9/20$

RPTA: B

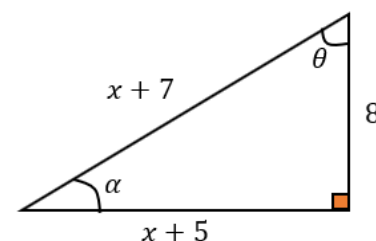
6. Alicia quiere saber la edad del hermano de su mejor amiga y cuando le pregunta, ella responde: "la edad de mi hermano es, el seno del mayor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo multiplicado por $(\operatorname{tg} \theta + \operatorname{csc} \alpha)(\operatorname{sec} \alpha)$ ". Se sabe que, en dicho triángulo rectángulo las medidas de las longitudes de sus lados son $8; x + 5; x + 7$.

¿Cuál es la edad del hermano de la mejor amiga de Alicia?

- A. 3 años
- B. 12 años
- C. 7 años
- D. 4 años
- E. 6 años

RESOLUCIÓN:

Graficamos según los datos:



Por teorema de Pitágoras:

$$(x + 7)^2 = (x + 5)^2 + 8^2$$

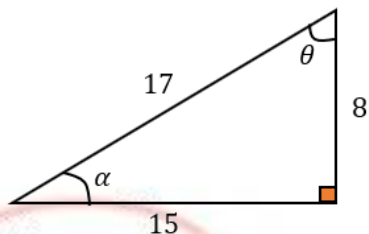
$$x^2 + 14x + 49 = x^2 + 10x + 25 + 64$$

$$4x = 89 - 49$$

$$x = \frac{40}{4}$$

$$x = 10$$

Completamos el triángulo con los datos hallados:



→ El ángulo mayor es θ :

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{15}{17}$$

Piden hallar:

$$(\operatorname{sen} \theta)(\operatorname{tg} \theta + \operatorname{csc} \alpha)(\sec \alpha)$$

$$\left(\frac{15}{17}\right)\left(\frac{15}{8} + \frac{17}{8}\right)\left(\frac{17}{15}\right) = \frac{32}{8} = 4$$

∴ La edad es 4 años

RPTA: D

7. En un triángulo rectángulo ABC, recto en "C", se cumple que:

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{3}{2}$$

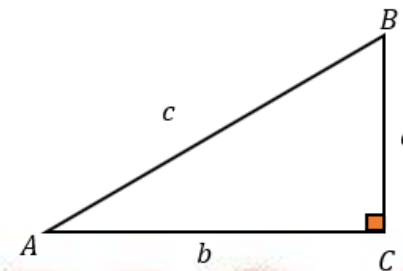
Calcular el valor de:

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{ctg} A}$$

- A. 26/25
- B. 25
- C. 26
- D. 13/9
- E. 13/4

RESOLUCIÓN:

Graficamos según los datos:



Del enunciado:

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{3}{2}$$

$$2\operatorname{sen} A + 2\operatorname{sen} B = 3\operatorname{sen} A - 3\operatorname{sen} B$$

$$5\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A$$

$$5\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{a}{c}$$

$$\rightarrow a = 5b$$

Piden hallar:

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{ctg} A} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{b}{a}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{ctg} A} = \frac{\frac{5b}{b} + \frac{b}{5b}}{\frac{b}{5b}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{ctg} A} = \frac{5 + \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{ctg} A} = \frac{\frac{26}{5}}{\frac{1}{5}}$$

$$\therefore \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{ctg} A} = 26$$

RPTA: C

8. Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en B . En la hipotenusa $\overline{AC}$ se ubica el punto " D ", de tal forma que, $BD = BC$ y en la prolongación de $\overline{BD}$ se ubica el punto " E ", tal que, $m\angle AEB = 90^\circ$. Si $AE = 3 \text{ cm}$ y la distancia de " D " a $\overline{BC}$ es perpendicular y mide 6 cm .

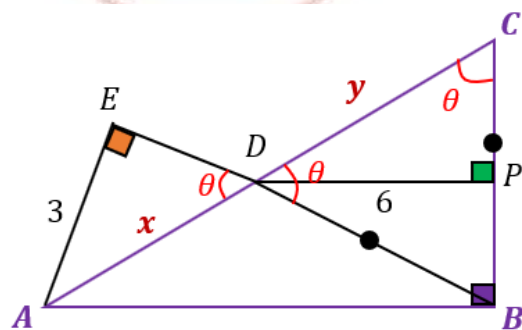
Calcular

$$\frac{AC}{AD}$$

- A. $2/3$
- B. $3/2$
- C. 2
- D. 3
- E. $10/3$

RESOLUCIÓN:

Grafiquemos según los datos del enunciado:



En los triángulos rectángulos AED y DPC :

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{x} = \frac{6}{y}$$

$$y = \frac{6x}{3}$$

$$\rightarrow y = 2x$$

Nos piden hallar:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{x + y}{x}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{x + 2x}{x}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{3x}{x}$$

$$\therefore \frac{AC}{AD} = 3$$

RPTA: D

CAPÍTULO V

TRIGONOMETRÍA

La trigonometría es la parte de la matemática que se encarga de estudiar y medir los triángulos, las relaciones entre sus ángulos y lados, y sus funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

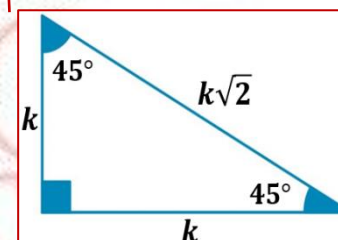
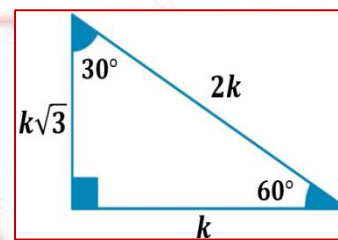
Razones trigonométricas: Teorema de Pitágoras. Definición de cateto opuesto y de cateto adyacente. Uso de la calculadora. Problemas del observador: Ángulo de elevación y ángulo de depresión.



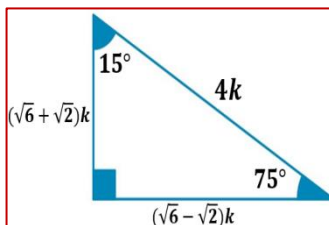
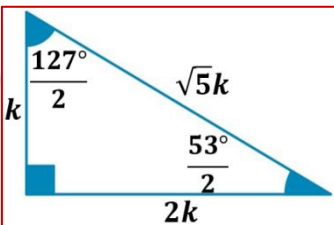
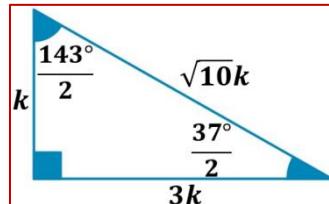
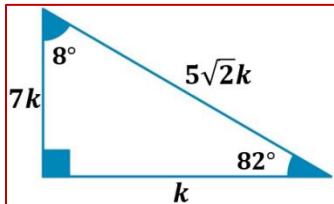
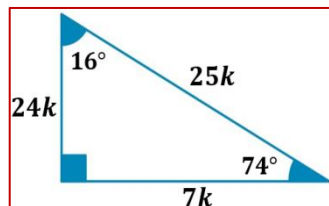
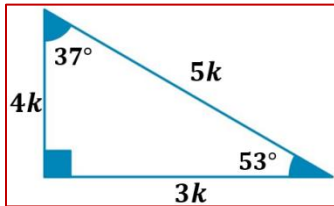
5 LA TRIGONOMETRÍA COMO LA CIENCIA DE LAS RELACIONES ENTRE LÍNEAS Y ÁNGULOS

5.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES EXACTOS



TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES
APROXIMADOS



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Miguel le pregunta a José, ¿cuál es tu edad? Y José le indica que su edad justo coincide con el valor de $E = 10Q$. Hallar la edad de José si:

$$Q = \frac{\sec 53^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{sen} 37^\circ \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{(\csc^2 45^\circ - 1)\operatorname{tg} 60^\circ - \frac{1}{3}\csc 60^\circ}$$

A. 11 años

- B. 17 años
- C. 7 años
- D. 13 años
- E. 10 años

RESOLUCIÓN:

De

$$Q = \frac{\sec 53^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{sen} 37^\circ \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{(\csc^2 45^\circ - 1)\operatorname{tg} 60^\circ - \frac{1}{3}\csc 60^\circ}$$

Por triángulos notables, se tiene:

$$Q = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$Q = \frac{\frac{5}{3\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}}{10}}{(2-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) - \frac{2}{3\sqrt{3}}}$$

$$Q = \frac{\frac{50+27}{30\sqrt{3}}}{\frac{77}{30\sqrt{3}}} = \frac{\frac{77}{9-2}}{\frac{77}{3\sqrt{3}}}$$

$$Q = \frac{11}{10}$$

Finalmente, la edad de José es $E = 10 * \frac{11}{10} = 11$ años.

RPTA: A

2. La temperatura en grados Celsius en China justo el día de hoy coincide con el valor de T , determinar dicha temperatura, si se sabe que:

$$T = 6tg^2(3y - 18^\circ) - 4ctg^4(y + 29^\circ)$$

Además, se cumple:

$$\operatorname{sen}(4y + 10^\circ) \cdot \operatorname{tg}(3y + 30^\circ) \cdot \operatorname{sec} y = \operatorname{ctg}(60^\circ - 3y)$$

- A. -2°C
- B. 7°C
- C. -9°C
- D. 11°C
- E. 3°C

RESOLUCIÓN:

De

$$\operatorname{sen}(4y + 10^\circ) \cdot \operatorname{tg}(3y + 30^\circ) \cdot \operatorname{sec} y = \operatorname{ctg}(60^\circ - 3y) \dots I$$

Se ve que $(3y + 30^\circ) + (60^\circ - 3y) = 90^\circ$

$$\rightarrow \operatorname{tg}(3y + 30^\circ) = \operatorname{ctg}(60^\circ - 3y)$$

En I , se tiene:

$$\operatorname{sen}(4y + 10^\circ) \cdot \operatorname{sec} y = 1$$

Pero $\operatorname{sec} x = \operatorname{csc}(90^\circ - y)$, entonces:

$$\operatorname{sen}(4y + 10^\circ) \operatorname{csc}(90^\circ - y) = 1$$

$$\rightarrow 4y + 10^\circ = 90^\circ - y$$

$$\rightarrow 5y = 80^\circ$$

$$\rightarrow y = 16^\circ$$

Nos piden:

$$R = 6tg^2(3y - 18^\circ) - 4ctg^4(y + 29^\circ), \text{ reemplazando el valor de } y.$$

$$R = 6tg^2(3(16^\circ) - 18^\circ) - 4ctg^4(16^\circ + 29^\circ)$$

$$R = 6tg^2(30^\circ) - 4ctg^4(45^\circ)$$

$$P = 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4(1)^4$$

$$R = 6\left(\frac{1}{3}\right) - 4(1) = 2 - 4$$

$$\therefore R = -2^\circ\text{C}$$

RPTA: A

3. La edad promedio de los niños que atendió un Pediatra, en una semana de octubre, fue de " M " años. Sabiendo que, " α " es agudo y además, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} 30^\circ$, ¿cuál es dicha edad promedio, si: $M = 4\sec^2 \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$?

- A. 6 años
- B. 8 años
- C. 9 años
- D. 7 años
- E. 5 años

RESOLUCIÓN:

Si determinamos " α " a partir de :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} 30^\circ$$

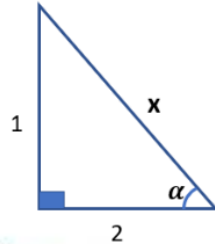
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 2^2 + 1^2$$

$$x^2 = 4 + 1$$

$$x = \sqrt{5}$$



Ahora determinamos M:

$$M = 4\sec^2 \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$$

$$M = 4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{2}{1}$$

$$M = 4\left(\frac{5}{4}\right) + 2$$

$$M = 5 + 2 = 7$$

La edad promedio de los niños es 7 años.

RPTA: D

4. El número de días que se necesita para elaborar una chompa artesanal es “L”, que resulta de simplificar la expresión:

$$L = \frac{\cos 45^\circ \cdot \csc 30^\circ \cdot \sec 45^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 74^\circ \cdot \operatorname{tg} 16^\circ}$$

¿Cuántos días se necesitan para elaborar una chompa artesanal?

- A. 2 días
- B. 4 días
- C. 6 días
- D. 8 días
- E. 10 días

RESOLUCIÓN:

Reemplazamos razones trigonométricas recíprocas y las co-razones:

$$L = \frac{\cos 45^\circ \cdot \csc 30^\circ \cdot \sec 45^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 74^\circ \cdot \operatorname{tg} 16^\circ}$$

$$L = \frac{(\cos 45^\circ) \cdot \sec 45^\circ \cdot \csc 30^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 74^\circ \cdot \operatorname{ctg} 74^\circ}$$

Si:

$$\cos 45^\circ \cdot \sec 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 74^\circ \cdot \operatorname{ctg} 74^\circ = 1$$

Reemplazamos:

$$L = \frac{\csc 30^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \cos 60^\circ}$$

$$L = \frac{2}{1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$L = 4$$

El número de días para elaborar una chompa artesanal es 4 días .

RPTA: B

5. En el valle de Chilina crece el capullo emblemático de la Ciudad Blanca. La planta no tiene tallos y gatea por los muros de la andenería: el texao, flor que está conformada por “m” sépalos y pétalos. El valor de “m” se encuentra en: $m = 2\sqrt{x} + 2$; además, se cumple que: $5x \cdot \operatorname{sen} 37^\circ - 3\csc 30^\circ = 4\operatorname{tg} 37^\circ - 2x \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$. ¿Cuál es el número de pétalos del texao?

- A. 1
- B. 2

- C. 3
D. 4
E. 5

RESOLUCIÓN:

Reemplazamos los valores de las razones trigonométricas de ángulos notables:

$$5x \operatorname{sen} 37^\circ - 3 \operatorname{csc} 30^\circ = 4 \operatorname{tg} 37^\circ - 2x \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$5x \left(\frac{3}{5} \right) - 3(2) = 4 \left(\frac{3}{4} \right) - 2x \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$3x - 6 = 3 - x$$

$$4x = 9$$

$$x = \frac{9}{4}$$

Reemplazando:

$$m = 2\sqrt{x} + 2 = 2\sqrt{\frac{9}{4}} + 2$$

$$m = 2 \left(\frac{3}{2} \right) + 2$$

$$m = 5$$

El texao tiene 5 pétalos.

RPTA: E

6. La parte del terreno que le corresponde recibir en herencia al Señor

Valencia es 10 veces el resultado de:

$$D = \frac{\operatorname{csc} 30^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \sec^2 45^\circ \cdot \operatorname{sen}^2 45^\circ}{\frac{25}{4} \sec 53^\circ \cdot \cos 16^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 60^\circ}$$

¿Qué parte del terreno recibirá en herencia el Sr. Valencia?

- A. $\frac{1}{5}$
B. $\frac{2}{3}$
C. $\frac{2}{5}$
D. $\frac{1}{3}$
E. $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN:

Aplicando razones trigonométricas recíprocas y corazonos:

$$D = \frac{\operatorname{csc} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \cdot (\sec 45^\circ \cdot \cos 45^\circ)^2}{\frac{25}{4} \sec 53^\circ \cdot \cos 16^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 60^\circ}$$

$$D = \frac{(1)(1)}{\frac{25}{4} \sec 53^\circ \cdot \cos 16^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 60^\circ}$$

Teniendo en cuenta los triángulos rectángulos notables, reemplazamos los valores:

$$D = \frac{1}{\frac{25}{4} \sec 53^\circ \cdot \cos 16^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 60^\circ}$$

$$D = \frac{1}{\frac{25}{4} \left(\frac{5}{3} \right) \left(\frac{24}{25} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{1} \right)^2}$$

$$D = \frac{1}{(5)(2)(3)}$$

$$D = \frac{1}{30}$$

La parte de la herencia es 10 veces $\frac{1}{30}$

$$\therefore 10 \left(\frac{1}{30} \right) = \frac{1}{3}$$

RPTA: D

7. El apio es un vegetal con un alto contenido de vitaminas A y C, flavonoides, y glucósidos con un potente efecto antioxidante además de contener pocas calorías. En 100 gramos de apio hay “n” calorías; si “n” resulta de simplificar la expresión:

$$n = \sqrt{6} \cdot \sec 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + (2 \sec 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ) \operatorname{sen} 53^\circ + 14$$

¿Cuántas calorías proporciona el apio en 100 gramos?

- A. 15 calorías
- B. 36 calorías
- C. 20 calorías
- D. 28 calorías
- E. 30 calorías

RESOLUCIÓN:

Reemplazamos los valores:

$$n = \sqrt{6} \cdot \sec 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + (2 \sec 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ) \operatorname{sen} 53^\circ + 14$$

$$n = \sqrt{6} (\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + (2(2) + 1) \left(\frac{4}{5} \right) + 14$$

$$n = \frac{6}{3} + 4 + 14$$

$$n = 2 + 4 + 14$$

$$n = 6 + 14$$

$$n = 20$$

$\therefore$ El apio en 100 gramos proporciona 20 calorías.

RPTA: C

8. Una pared es cubierta con mosaicos en forma de rombos. Se sabe que, en un rombo $ABCD$ ($AC > BD$), se ubica el punto “P” en $\overline{AC}$, tal que, $m\angle PBC = 90^\circ$, $m\angle BAC = \alpha$, y $AP = BP$. Calcular el valor de “M” si representa el precio del mosaico $ABCD$ en soles.

$$M = \left(\frac{28}{5} \right) \left[\frac{5 \operatorname{sen}^2 (2\alpha - 7^\circ) + \operatorname{sen}^2 (2\alpha)}{\operatorname{sen}(-14^\circ + \alpha)} \right]$$

- A. s/ 75
- B. s/ 95
- C. s/ 82
- D. s/ 79
- E. s/ 74

RESOLUCIÓN:

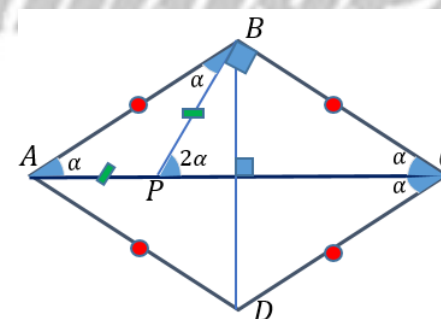
Del enunciado:

Como $AP = BP$ $\triangle APB$, es isósceles:

$$m\angle PAB = m\angle PBA = \alpha$$

Luego: $m\angle BPC = 2\alpha$

Graficamos

En el $\triangle PBC$:

$$2\alpha + \alpha = 90^\circ$$

$$3\alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Reemplazando:

$$M = \left(\frac{28}{5}\right) \left[\frac{5\sin^2(2(30) - 7^\circ) + \sin^2(2(30^\circ))}{\sin(-14 + 30^\circ)} \right]$$

$$M = \left(\frac{28}{5}\right) \left[\frac{5\sin^2(53^\circ) + \sin^2(60^\circ)}{\sin(16^\circ)} \right]$$

$$M = \left(\frac{28}{5}\right) \left[\frac{5\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{7}{25}} \right]$$

$$M = \left(\frac{28}{5}\right) \left[\frac{\frac{16}{5} + \frac{3}{4}}{\frac{7}{25}} \right] = \left(\frac{28}{5}\right) \left[\frac{395}{28} \right] = 79$$

$\therefore$ El precio del mosaico es S/ 79.

RPTA: D

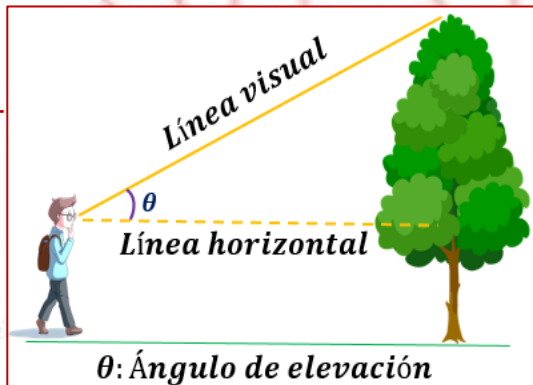
5.2 ÁNGULOS VERTICALES: ELEVACIÓN Y DEPRESIÓN

Son aquellos ángulos contenidos en un plano vertical formados por la línea de mira (o visual) y la línea horizontal, que parten de la vista del observador.

Los ángulos verticales pueden ser:

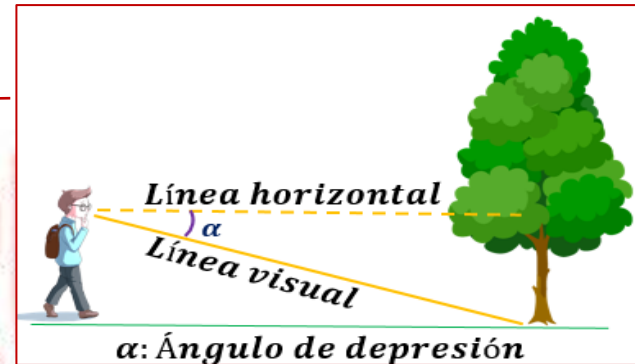
ÁNGULOS DE ELEVACIÓN

Es el ángulo formado por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por encima de la línea horizontal.

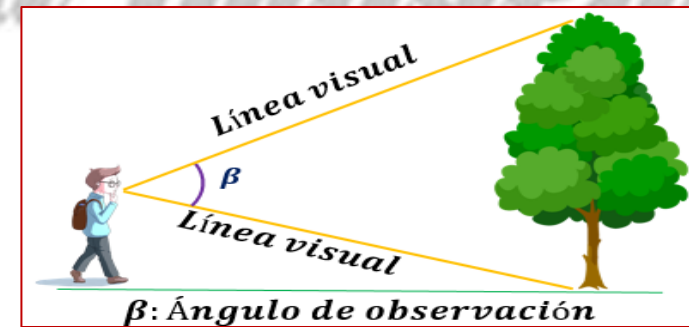


ÁNGULOS DE DEPRESIÓN

Es aquel ángulo formado por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por debajo de la línea horizontal.



Nota: En el gráfico adjunto, " α " es el ángulo bajo el cual se divide la torre, note que se deben trazar las dos visuales; una hacia la parte alta y la otra hacia la parte baja. Luego " α " es el ángulo de observación.



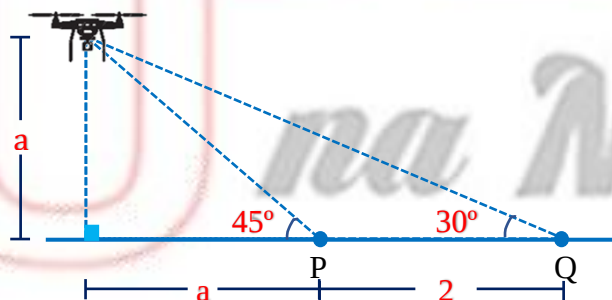
PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Una persona localizada en el punto P observa directamente un *drone* con un ángulo de elevación de 45° . En el mismo instante, otra persona localizada en el punto Q , que se encuentra a 2 km directamente al este de P ve el mismo objeto con un ángulo de elevación de 30° . Determinar la distancia en km de la persona localizada en el punto Q al *drone*. (P está ubicado al este del *drone*).

- A. $4(\sqrt{3} + 1)\text{ km}$
- B. $3(\sqrt{3} - 1)\text{ km}$
- C. $2(\sqrt{3} - 3)\text{ km}$
- D. $2(\sqrt{3} + 2)\text{ km}$
- E. $2(\sqrt{3} + 1)\text{ km}$

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Ubicamos en la gráfica el $\triangle$ de 30° y 60° :

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ a\sqrt{3} &= a+2 \\ a(\sqrt{3}-1) &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= \frac{2}{(\sqrt{3}-1)} \\ a &= (\sqrt{3}+1)\end{aligned}$$

Reemplazamos:

$$\begin{aligned}x &= 2a = 2(\sqrt{3}+1) \\ \therefore x &= 2(\sqrt{3}+1)\text{ km}\end{aligned}$$

RPTA: E

2. Desde la parte superior e inferior del segundo piso de un edificio de cuatro pisos iguales, se observa una piedra en el suelo y a una distancia de 9 m con ángulos de depresión " β " y " θ " respectivamente. Desde la parte más alta del edificio, el ángulo de depresión, para la piedra es " α ". Si se conoce que:

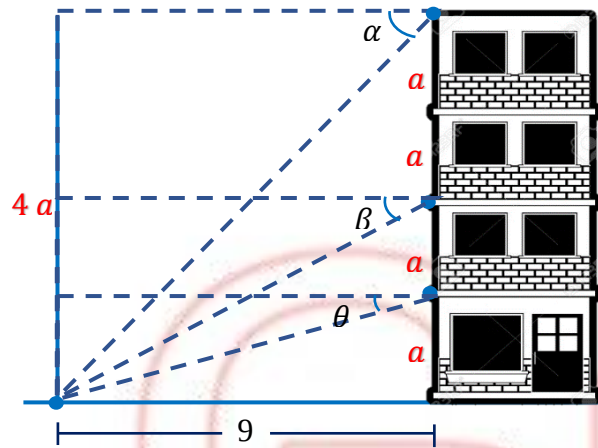
$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{4}$$

Hallar la altura del edificio.

- A. 6 m
- B. 10 m
- C. 9 m
- D. 8 m
- E. 4 m

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



De acuerdo, al gráfico, podemos encontrar las siguientes relaciones

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4a}{9}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2a}{9}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{9}$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4a}{9} - \frac{2a}{9} - \frac{a}{9} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{9} = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{9}{4}$$

Como ya tenemos el valor de "a", podemos decir que la altura es 4a.

$$\therefore 4a = 4 \left(\frac{9}{4} \right) = 9 \text{ m}$$

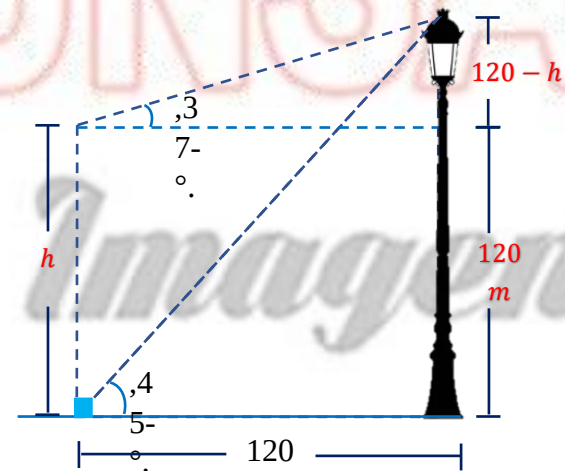
RPTA: C

3. Desde el pie de un poste se observa la parte más alta de otro poste de luz, con un ángulo de elevación de 45° , el mismo punto es observado desde la parte más alta del poste con un ángulo de elevación de 37° . Calcular la longitud del poste, si la distancia entre el poste y la torre es de 120 m.

- A. 30 m
- B. 90 m
- C. 45 m
- D. 60 m
- E. 62 m

RESOLUCIÓN:

Siguiendo las indicaciones del texto, armamos la siguiente gráfica:



De acuerdo, a la gráfica:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{120 - h}{120}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{120 - h}{120}$$

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$90 = 120 - h$$

$$h = 120 - 90$$

$$\therefore h = 30 \text{ m}$$

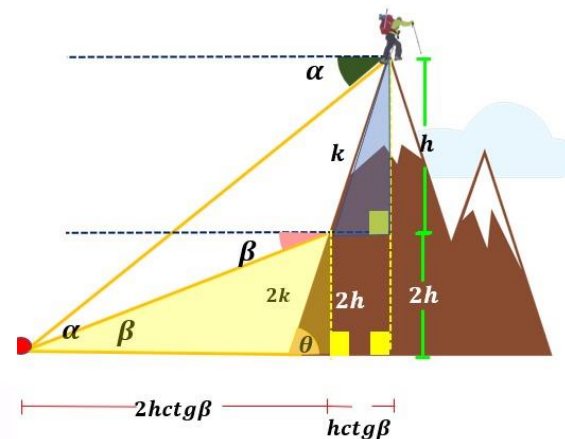
RPTA: A

4. Descendiendo por una colina, que tiene un ángulo de inclinación " θ " con respecto a un plano horizontal, un hombre observa un objeto en dicho plano con un ángulo de depresión " α ". A la tercera parte del descenso, observa el mismo objeto con un ángulo de depresión " β ". Hallar $3\text{ctg } \alpha - 2\text{ctg } \beta$.

- A. $\text{ctg } \theta$
- B. $\text{ctg } \beta$
- C. $\text{tg } \theta$
- D. $\text{tg } \alpha$
- E. $\text{tg } \theta$

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



$$\begin{aligned} \text{ctg } \alpha &= \frac{2h\text{ctg } \beta + h\text{ctg } \theta}{3h} \\ 3\text{ctg } \alpha &= 2\text{ctg } \beta + \text{ctg } \theta \\ \therefore 3\text{ctg } \alpha - 2\text{ctg } \beta &= \text{ctg } \theta \end{aligned}$$

RPTA: A

5. Un joven enamorado, observa a su bella amada en lo alto de una torre de 12 m con un ángulo de elevación igual a θ . Si decide declarar su amor, va hacia la torre y a 13 m que avanza hacia la torre, es detenido por el padre de la dama indicándole que no podrá acercarse más; ya que, son muy jóvenes para casarse y que regrese en " E " años. El joven mira a su amada por última vez, en ese punto, con un ángulo de elevación 2θ y se retira con la promesa de regresar. ¿Dentro de cuántos años regresará? (Sabendo que, $E = 2\text{ctg} \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sqrt{13}$).

- A. 4 años
- B. 3 años
- C. 5 años

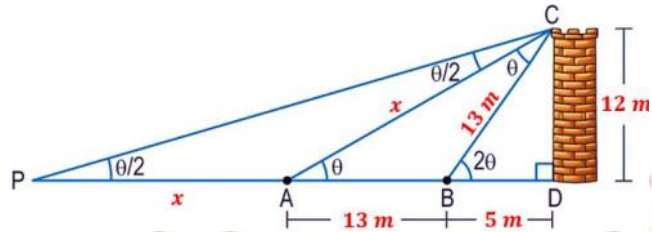
- D. 2 años
E. 6 años

El joven deberá regresar en 3 años.

RPTA: B

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Del gráfico: $AB = BC = 13\text{ m}$

Entonces, por Teorema de Pitágoras: $BD = 5\text{ m}$

Nos piden: $2\text{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{13}$

Trazamos $\overline{CP}$, de tal modo que: $PA = AC = x$

Por Teorema de Pitágoras en el triángulo ACD:

$$x^2 = 18^2 + 12^2$$

$$x^2 = 468$$

$$x = 6\sqrt{13}$$

Entonces:

$$\text{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{6\sqrt{13} + 18}{12}$$

Reemplazamos:

$$E = 2\left(\frac{6\sqrt{13} + 18}{12}\right) - \sqrt{13}$$

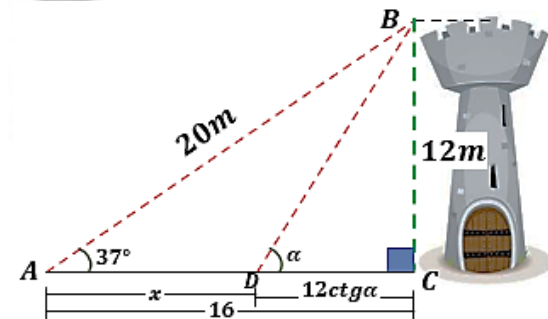
$$E = 3$$

6. Romeo, desde un punto en tierra, observa la altura de una torre donde se encuentra Julieta, con un ángulo de elevación de 37° . Si la línea visual en dicho lugar mide 20 m , ¿qué distancia horizontal (en metros), deberá acercarse Romeo, hacia la torre, para que el nuevo ángulo de elevación tenga por tangente igual a 2?

- A. 13 m
B. 11 m
C. 10 m
D. 9 m
E. 5 m

RESOLUCIÓN:

En el Gráfico elaborado se debe verificar que: $\text{tg}\alpha = 2$



Asimismo:

$$5k = 20\text{ m}$$

$$k = 4\text{ m}$$

Entonces:

$$BC = 3K = 12$$

$$AC = 4K = 16$$

También:

$$x = 16 - 12 \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$x = 16 - 12 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$x = 16 - 12 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 10 \text{ m}$$

RPTA: C

7. Dos personas están separadas “ x ” metros entre sí y la altura de la primera persona, es el doble que la de la otra. Además, si desde el punto medio de la línea que une sus pies, un observador encuentra que las elevaciones angulares de sus partes superiores son complementarias. Determinar la suma de las alturas de ambas personas en función de “ x ”.

A. $\frac{6\sqrt{2}x}{5} \text{ m}$

B. $\frac{3\sqrt{2}x}{2} \text{ m}$

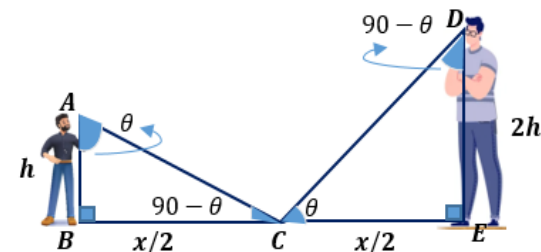
C. $\frac{5\sqrt{2}x}{6} \text{ m}$

D. $\frac{5\sqrt{2}x}{2} \text{ m}$

E. $\frac{3\sqrt{2}x}{4} \text{ m}$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado graficamos:



En el $\triangle ABC$:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{x}{2}}{h} = \frac{x}{2h}$$

En el $\triangle CED$:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{2h}{x}}{\frac{x}{2}} = \frac{4h}{x}$$

Igualando

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{2h} = \frac{4h}{x}$$

$$x^2 = 8h^2$$

$$x = 2\sqrt{2}h$$

$$h = \frac{x}{2\sqrt{2}}$$

Nos piden: $3h$

$$3h = 3 \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} x$$

$\therefore$ La suma de las alturas de ambas personas: $\frac{3\sqrt{2}}{4} x$

RPTA: E

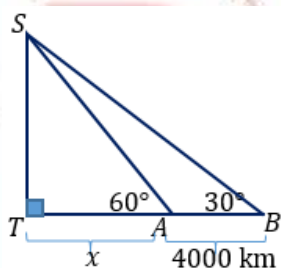
8. Los ángulos de elevación de un satélite terrestre artificial, medidos desde dos estaciones terrenas, situadas en el mismo lado del satélite, son de 30° y 60° . Las dos estaciones terrenas y el satélite se

encuentran en el mismo plano vertical. Si la distancia entre las estaciones terrestres es de 4000 km , encontrar la distancia entre el satélite y la Tierra.

- A. $1800\sqrt{3} \text{ km}$
- B. $9500\sqrt{3} \text{ km}$
- C. $2000\sqrt{3} \text{ km}$
- D. $8000\sqrt{3} \text{ km}$
- E. $2800\sqrt{3} \text{ km}$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:



Donde el satélite se ubica en el punto S y la tierra en el punto T , las estaciones en A y B .

En el triángulo ABC : $TA = x$

$$\begin{aligned} m\angle SAT &= 60^\circ \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= ST/TA \\ \sqrt{3} &= ST/TA \\ ST &= x\sqrt{3} \dots (1) \end{aligned}$$

En el triángulo STB :

$$m\angle SBT = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ &= ST/TB \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{ST}{TA + AB} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{ST}{x + 4000} \\ ST &= \frac{(x + 4000)}{\sqrt{3}} \dots (2) \end{aligned}$$

Igualando: (1) y (2)

$$\begin{aligned} x\sqrt{3} &= \frac{(x + 4000)}{\sqrt{3}} \\ 3x &= x + 4000 \\ 2x &= 4000 \\ x &= 2000 \end{aligned}$$

Nos piden: $ST = x\sqrt{3}$

$$ST = 2000\sqrt{3} \text{ km}$$

$\therefore$ Distancia entre el satélite y la tierra: $2000\sqrt{3} \text{ km}$.

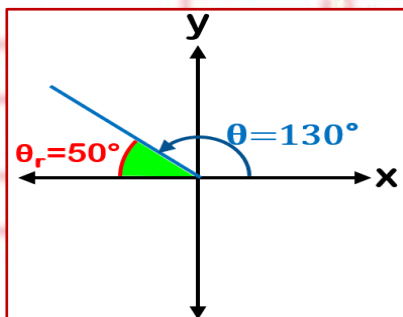
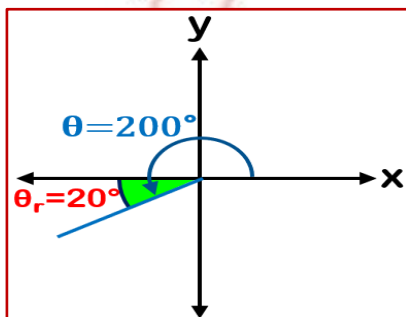
RPTA: C

5.3 REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE ÁNGULO DE REFERENCIA

ÁNGULO DE REFERENCIA

El ángulo de referencia denotado por θ_R , de un ángulo θ en posición normal es el ángulo agudo formado por el lado final de dicho ángulo y el eje "x".

EJEMPLOS:



PROPIEDAD:

Si θ es un ángulo en posición normal tal que $|\theta|$ es menor que una vuelta entonces se cumple que:

$$\text{Si } |\theta| \in \text{IC} \rightarrow \theta_R = |\theta|$$

$$\text{Si } |\theta| \in \text{IIC} \rightarrow \theta_R = 180^\circ - |\theta|$$

$$\text{Si } |\theta| \in \text{IIIC} \rightarrow \theta_R = |\theta| - 180^\circ$$

$$\text{Si } |\theta| \in \text{IVC} \rightarrow \theta_R = 360^\circ - |\theta|$$

5.3.1 CÁLCULO DE ÁNGULOS DE REFERENCIA PARA ÁNGULOS MAYORES A UNA VUELTA

PARA ÁNGULOS MAYORES A UNA VUELTA

Si tenemos un ángulo " θ " mayor a una vuelta, para convertirlo al IC; dividimos a " θ " entre 360° y calculamos el θ_r del ángulo residuo.

Hallar el ángulo de referencia de $\theta = 2300^\circ$

Hallar el ángulo de referencia de $\theta = 1000^\circ$

$$\begin{array}{r} 2300 \\ \underline{2160} \\ 140 \end{array} \quad \begin{array}{r} 360 \\ \underline{6} \end{array}$$

$140^\circ \in \text{IIC}$
 $\theta_r = 180^\circ - 140^\circ$
 $\theta_r = 40^\circ$

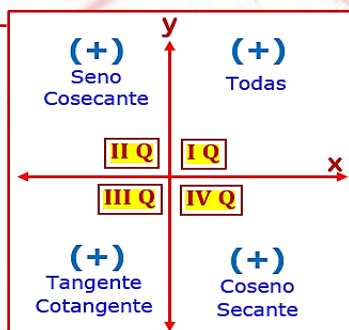
$$\begin{array}{r} 1000 \\ \underline{720} \\ 280 \end{array} \quad \begin{array}{r} 360 \\ \underline{2} \end{array}$$

$280^\circ \in \text{IVC}$
 $\theta_r = 360^\circ - 280^\circ$
 $\theta_r = 80^\circ$

5.3.2 NOCIONES PREVIAS

SIGNO DE LAS RAZONES

Según sea el cuadrante al cual pertenece el ángulo, las RT de éste pueden ser tanto negativas como positivas.



PARA ÁNGULOS NEGATIVOS:

Si $\theta > 0$; entonces se cumple:

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan\theta \\ \cot(-\theta) &= -\cot\theta \\ \sec(-\theta) &= \sec\theta \\ \csc(-\theta) &= -\csc\theta\end{aligned}$$

5.3.3 REDUCCIÓN DE UNA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA AL PRIMER CUADRANTE

Es el proceso mediante el cual se determina el valor de una razón trigonométrica utilizando su correspondiente ángulo de referencia.

PROPIEDAD:

Sea θ cualquier ángulo en posición normal y θ_R su ángulo de referencia, entonces se verifica que las razones trigonométricas de θ y θ_R tienen igual valor absoluto.

$$|\mathbf{R. T.}(\theta)| = |\mathbf{R. T.}(\theta_R)|$$

$$\rightarrow \mathbf{R. T.}(\theta) = \pm \mathbf{R. T.}(\theta_R)$$

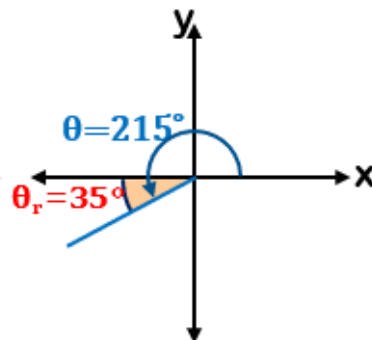
El signo del segundo miembro dependerá en que cuadrante se encuentra θ y de qué Razón Trigonométrica se trate.

EJEMPLOS:

Reduce al primer cuadrante:

- $\bullet \sin 215^\circ = -\sin 35^\circ$

Como 215° se encuentra en el III Q, la R.T. Seno es NEGATIVO, entonces:
 $\text{sen } 215^\circ$
 $\text{sen } (215^\circ - 180^\circ)$
 $\text{sen } 215^\circ = -\text{sen } 35^\circ$



5.3.4 REDUCCIÓN PARA ÁNGULOS DE LA FORMA $(180^\circ \pm \theta)$ y $(360^\circ \pm \theta)$

Para cualquier ángulo θ no cuadrantal se cumple:

$$\begin{aligned} \text{R. T. } (180^\circ \pm \theta) &= \pm \text{R. T. } (\theta) \\ \text{R. T. } (360^\circ \pm \theta) &= \pm \text{R. T. } (\theta) \end{aligned}$$

El signo del segundo miembro dependerá en que cuadrante se encuentran $(180^\circ \pm \theta)$ y $(360^\circ \pm \theta)$ asumiendo θ agudo; además de que R.T. se trate.

5.3.5 REDUCCIÓN PARA ÁNGULOS DE LA FORMA $(90^\circ \pm \theta)$ y $(270^\circ \pm \theta)$

Para cualquier θ no cuadrantal se cumple:

$$\begin{aligned} \text{R. T. } (90^\circ \pm \theta) &= \pm \text{CO} - \text{R. T. } (\theta) \\ \text{R. T. } (270^\circ \pm \theta) &= \pm \text{CO} - \text{R. T. } (\theta) \end{aligned}$$

El signo del segundo miembro dependerá en que cuadrante se encuentran $(90^\circ \pm \theta)$ y $(270^\circ \pm \theta)$ asumiendo θ agudo; además de que R.T. se trate.

Así, por ejemplo:

- $\text{sen } (90^\circ + \theta) = +\cos \theta$
- $\cos (270^\circ - \theta) = -\text{sen } \theta$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. En una embarcación se descarga “4A” toneladas de pescado, donde:

$$A = \frac{\text{tg } (13\pi + x) \cdot \cos (9\pi + x)}{\text{ctg } (990^\circ + x) \cdot \cos (720^\circ + x)}$$

¿Cuántas toneladas de pescado se descargaron?

- A. 4
- B. 5
- C. 6
- D. 7
- E. 8

RESOLUCIÓN:

Realizamos la reducción al primer cuadrante:

$$A = \frac{\text{tg } (13\pi + x) \cdot \cos (9\pi + x)}{\text{ctg } (990^\circ + x) \cdot \cos (720^\circ + x)}$$

$$A = \frac{\text{tg } (\pi + x) \cdot \cos (\pi + x)}{\text{ctg } (270^\circ + x) \cdot \cos (0^\circ + x)}$$

$$A = \frac{\text{tg } x \cdot (-\cos x)}{-\text{tg } x \cdot (\cos x)}$$

$$A = 1$$

Reemplazando en “4A” tenemos:

$$4(1) = 4$$

Por lo tanto, se descargaron 4 toneladas de pescado.

RPTA: A

2. En un huerto se observa un ciruelo cargado de frutos, este número de frutos esta determinado por el valor de:

$$F = 90 \operatorname{sen} x + 1,$$

Si “ x ” pertenece al II cuadrante, además:

$$\csc^2 x - 2 \csc x = 3$$

¿Cuántos frutos tiene el ciruelo?

- A. 40
- B. 50
- C. 60
- D. 70
- E. 80

RESOLUCIÓN:

De la condición como ecuación cuadrática:

$$\csc^2 x - 2 \csc x = 3$$

$$\csc^2 x - 2 \csc x - 3 = 0$$

$$(\csc x - 3)(\csc x + 1) = 0$$

$$\csc x = 3 \wedge \csc x = -1$$

$$\csc x = \frac{3}{1}$$

Por razones trigonométricas reciprocas:

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$$

Reemplazando en F tenemos:

$$F = 90 \operatorname{sen} x + 10$$

$$F = 90 \left(\frac{1}{3} \right) + 10$$

$$F = 40$$

Por lo tanto, el ciruelo tiene 40 frutos.

RPTA: A

3. En el año 2021 se manifestaron unos fenómenos solares, que están determinados por el cálculo de la siguiente expresión matemática:

$$\frac{\cos(180^\circ - x) \cdot \sec(180^\circ - x) + \operatorname{sen}(180^\circ - x) \cdot \csc(180^\circ - x)}{4 \operatorname{tg}(-45^\circ) + 5}$$

¿Cuántos fenómenos solares se dieron?

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6

RESOLUCIÓN:

Reducción al primer cuadrante:

$$\frac{\cos(180^\circ - x) \cdot \sec(180^\circ - x) + \operatorname{sen}(180^\circ - x) \cdot \csc(180^\circ - x)}{4 \operatorname{tg}(-45^\circ) + 5}$$

$$F = \frac{\cos x \cdot \sec x + \operatorname{sen} x \cdot \csc x}{-4 \operatorname{tg} 45^\circ + 5}$$

$$F = \frac{1 + 1}{-4(1) + 5}$$

$$F = 2$$

Por lo tanto, se dieron 2 fenómenos solares.

RPTA: A

4. Si la cantidad de explosiones nucleares realizadas en el océano Atlántico, están representadas por "H", dada como:

$$H = 25 \operatorname{sen}(90^\circ - x).$$

Y si:

$$5 \operatorname{csc}(90^\circ + x) + 3 \operatorname{sec}(2\pi - x) = 10;$$

donde "x" es agudo. Calcular la cantidad de explosiones nucleares.

- A. 20
- B. 30
- C. 40
- D. 50
- E. 60

RESOLUCIÓN:

Partimos de la condición:

$$5 \operatorname{csc}(90^\circ + x) + 3 \operatorname{sec}(2\pi - x) = 10$$

$$5 \operatorname{sec} x + 3 \operatorname{sec} x = 10$$

$$8 \operatorname{sec} x = 10$$

$$\operatorname{sec} x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Luego:

$$H = 25 \operatorname{sen}(90^\circ - x)$$

$$H = 25 \cos x$$

$$H = 25 \cdot \frac{4}{5}$$

$$\therefore H = 20$$

RPTA: A

5. En la granja de Timoteo hay "50G" gallinas. Si el valor de "G" lo encontramos en la expresión:

$$G = \frac{11 \operatorname{csc}(-40^\circ)}{7 \operatorname{csc} 220^\circ} + \frac{\operatorname{sec}(-80^\circ)}{\operatorname{sec} 280^\circ} + \frac{4 \operatorname{tg}(-60^\circ)}{7 \operatorname{tg} 420^\circ}$$

¿Cuántas gallinas hay?

- A. 60
- B. 70
- C. 80
- D. 90
- E. 100

RESOLUCIÓN:

Por razones trigonométricas de ángulos negativos y reducción de ángulos al primer cuadrante tenemos:

$$G = \frac{11 \operatorname{csc}(-40^\circ)}{7 \operatorname{csc} 220^\circ} + \frac{\operatorname{sec}(-80^\circ)}{\operatorname{sec} 280^\circ} + \frac{4 \operatorname{tg}(-60^\circ)}{7 \operatorname{tg} 420^\circ}$$

$$G = \frac{-11 \operatorname{csc} 40^\circ}{7 \operatorname{csc}(180^\circ + 40^\circ)} + \frac{\operatorname{sec} 80^\circ}{\operatorname{sec}(360^\circ - 80^\circ)} + \frac{-4 \operatorname{tg} 60^\circ}{7 \operatorname{tg}(360^\circ + 60^\circ)}$$

$$G = \frac{-11 \operatorname{csc} 40^\circ}{-7 \operatorname{csc} 40^\circ} + \frac{\operatorname{sec} 80^\circ}{\operatorname{sec} 80^\circ} + \frac{-4 \operatorname{tg} 60^\circ}{7 \operatorname{tg} 60^\circ}$$

Simplificando tenemos:

$$G = \frac{11}{7} + 1 - \frac{4}{7}$$

$$G = \frac{7}{7} + 1$$

$$G = 2$$

Por lo tanto, el número de gallinas es $50(2) = 100$.

RPTA: E

7. En un partido de Béisbol, si la cantidad de jugadores de un equipo es "9P", donde:

$$P = \frac{\operatorname{tg}(9\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{ctg}(630^\circ + x) \cdot \operatorname{sen}(720^\circ + x)}$$

¿Cuántos son los jugadores de un equipo de Beisbol?

- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 11
- E. 12

RESOLUCIÓN:

Realizamos la reducción al primer cuadrante:

$$P = \frac{\operatorname{tg}(9\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{ctg}(630^\circ + x) \cdot \operatorname{sen}(720^\circ + x)}$$

$$P = \frac{\operatorname{tg}(\pi + x) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{ctg}(270^\circ + x) \cdot \operatorname{sen}(0^\circ + x)}$$

$$P = \frac{\operatorname{tg} x(-\operatorname{sen} x)}{-\operatorname{tg} x(\operatorname{sen} x)}$$

$$P = 1$$

Reemplazando en "9P" tenemos: $= 9(1) = 9$

∴ En un equipo de Béisbol juegan **9** jugadores

RPTA: B

8. De acuerdo a la tesis del geógrafo peruano Javier Pulgar Vidal, el Perú está dividido en $16M + 7$ regiones naturales. Según lo señalado, ¿cuántas regiones naturales tiene el Perú?, si se sabe que:

$$M = \frac{2\cos^2 120^\circ - 3\operatorname{sen}^3 150^\circ}{\operatorname{tg} 225^\circ + \operatorname{tg}^2 1845^\circ}$$

- A. 8 regiones Naturales
- B. 3 regiones Naturales
- C. 4 regiones Naturales
- D. 5 regiones Naturales
- E. 9 regiones Naturales

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$M = \frac{2\cos^2 120^\circ - 3\operatorname{sen}^3 150^\circ}{\operatorname{tg} 225^\circ + \operatorname{tg}^2 1845^\circ}$$

Reduciendo los ángulos al primer cuadrante:

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$$

$$\operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} 1845^\circ = \operatorname{tg}(360^\circ(5) + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ$$

Reemplazando en M:

$$M = \frac{2(-\cos 60^\circ)^2 - 3(\operatorname{sen} 30^\circ)^3}{\operatorname{tg} 45^\circ + (\operatorname{tg} 45^\circ)^2}$$

$$M = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1 + (1)^2}$$

$$M = \frac{2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(\frac{1}{8}\right)}{1 + 1}$$

$$M = \frac{\frac{2}{4} - \frac{3}{8}}{2} = \frac{\frac{1}{8}}{2}$$

$$M = \frac{1}{16}$$

Piden hallar:

$$16M + 7$$
$$16\left(\frac{1}{16}\right) + 7 = 8$$

∴ En el Perú hay 8 regiones Naturales.

RPTA: A

5.4 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Es una igualdad donde la variable o incógnita se encuentra afectada por los operadores trigonométricos y se verifica para todo valor admisible de dicha variable.

5.4.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

I. IDENTIDADES RECÍPROCAS

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{csc} x = 1 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{csc} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{csc} x} \end{cases}$$

$$\forall x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x \cdot \sec x = 1 \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sec x} \\ \sec x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \\ \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \end{cases}$$

$$\forall x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

II. IDENTIDADES POR COCIENTE:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\forall x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

III. IDENTIDADES PITAGÓRICAS

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$\forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{csc}^2 x$$

$$\forall x \neq k\pi$$

5.4.2 IDENTIDADES AUXILIARES:

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sec x \cdot \csc x$$

$$\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$$

$$(\operatorname{sen} x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$(1 \pm \operatorname{sen} x \pm \cos x)^2 = 2(1 \pm \operatorname{sen} x)(1 \pm \cos x)$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. William compra en total "3C" cuadernos al precio de "P" soles cada uno, donde:

$$C = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x + 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + 12$$

$$P = \operatorname{sen}^2 x + 2\sec \frac{\pi}{3} + \csc \frac{\pi}{6} + \cos^2 x$$

¿Cuánto pagó en total por los cuadernos? (UNSA-2019)

A. S/ 273

B. S/ 275

C. S/ 230

D. S/ 252

E. S/ 321

RESOLUCIÓN:

Según el problema nos pide hallar el pago que hizo por la compra de los cuadernos, entonces:

$$C = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x + 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + 12$$

Luego:

$$C = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + 12$$

$$C = 13$$

$$\rightarrow 3C = 39 \text{ cuadernos}$$

$$P = \operatorname{sen}^2 x + 2\sec \frac{\pi}{3} + \csc \frac{\pi}{6} + \cos^2 x$$

Luego:

$$P = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\sec 60^\circ + \csc 30^\circ$$

$$P = 1 + 2(2) + 2$$

$$P = 7$$

Por lo tanto, el pago es:

$$\text{Pagó} = (39)(7)$$

$$\text{Pagó} = 273 \text{ soles}$$

RPTA: A

2. Si $\sec \alpha = 1 + \operatorname{sen} \alpha$, halle el valor de:

$$E = \frac{\cos^3 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha}$$

(CEPRUNSA CICLO QUINTOS-2020)

A. 1,5

B. 2

C. 1

D. -1

E. -1,5

RESOLUCIÓN:

Según el problema:

$$E = \frac{\cos^3 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha}$$

Luego:

$$E = \frac{\cos \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha}$$

$$E = \frac{\cos \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{1 - \sin \alpha}$$

$$E = \frac{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{1 - \sin \alpha}$$

$$E = \cos \alpha (1 + \sin \alpha)$$

Dato: $\sec \alpha = 1 + \sin \alpha$

Reemplazando:

$$E = \cos \alpha \cdot \sec \alpha$$

$$\therefore E = 1$$

RPTA: C

3. Si: $\sec \theta$ y $\csc \theta$ son las raíces de la ecuación: $x^2 + px + q = 0$, ¿qué alternativa muestra la relación correcta?

- A. $q^2 + 2q = p^2$
- B. $p^2 + 2p = q^2$
- C. $q^2 - 2q = p^2$
- D. $p^2 - 2p = q^2$
- E. $p^2 + q^2 = 1$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 = \sec \theta$$

$$x_2 = \csc \theta$$

Se observa:

$$x_1 \cdot x_2 = q \rightarrow \sec \theta \cdot \csc \theta = q \dots (I)$$

$$x_1 + x_2 = -p \rightarrow \sec \theta + \csc \theta = -p \dots (II)$$

Elevando al cuadrado la igualdad (II):

$$(\sec \theta + \csc \theta)^2 = (-p)^2$$

$$\sec^2 \theta + \csc^2 \theta + 2 \sec \theta \cdot \csc \theta = p^2$$

Identidad trigonométrica auxiliar:

$$\sec^2 \theta + \csc^2 \theta = \sec^2 \theta \cdot \csc^2 \theta$$

$$(\sec \theta \cdot \csc \theta)^2 + 2(\sec \theta \cdot \csc \theta) = p^2$$

$$\therefore \text{La relación correcta es: } q^2 + 2q = p^2$$

RPTA: A

4. Calcular "a + b" para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = a \sec x + b \tan x.$$

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4

RESOLUCIÓN:

Del ejercicio:

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = a \sec x + b \tan x$$

$$\sqrt{\frac{(1 - \sin x)(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}} = a \sec x + b \tan x$$

$$\sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{1 - \sin^2 x}} = a \sec x + b \tan x$$

$$\sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{\cos^2 x}} = a \sec x + b \tan x$$

$$\frac{1 - \sin x}{\cos x} = a \sec x + b \tan x$$

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{\sec x}{\cos x} = a \sec x + b \tan x$$

$$\sec x - \tan x = a \sec x + b \tan x$$

$$a = 1 \wedge b = -1$$

$$\therefore a + b = 0$$

RPTA: A

5. Si: $\tan x + \sec x = 2(1 + \cos x)$; $x \in III C$.Calcular: $E = \sec x \cdot \csc x$

- A. $\frac{3}{2}$
 B. $\frac{5}{2}$
 C. $\frac{7}{2}$
 D. $-\frac{7}{2}$
 E. $-\frac{5}{2}$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$\tan x + \sec x = 2(1 + \cos x); x \in III C$$

(Identidades por cociente)

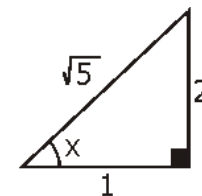
$$\frac{\sec x}{\cos x} + \sec x = 2(1 + \cos x)$$

$$\frac{\sec x + \sec x \cdot \cos x}{\cos x} = 2(1 + \cos x)$$

Factorizamos:

$$\frac{\sec x(1 + \cos x)}{\cos x} = 2(1 + \cos x)$$

$$\tan x = 2; x \in III C$$



$$\sec x = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}; x \in III C$$

$$\csc x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Reemplazamos:

$$E = \sec x \cdot \csc x$$

$$E = \sqrt{5} \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right) = -\frac{5}{2}$$

 $\therefore$ El valor de E es $-5/2$

RPTA: B

6. Si $\tan^2 \alpha = 2 \tan^2 x + 1$, hallar el valor de $y = \cos^2 \alpha + \sec^2 x$:

- A. $\sec^2 \alpha$
 B. $\cos^2 \alpha$
 C. $1 + \sec^2 \alpha$
 D. $\tan^2 \alpha$
 E. $1 + \cos^2 \alpha$

RESOLUCIÓN:

Dato del ejercicio:

$$\tan^2 \alpha = 2 \tan^2 x + 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = 2(\tan^2 x + 1)$$

$$\sec^2 \alpha = 2 \sec^2 x$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = 2 \cdot \cos^2 \alpha$$

Nos piden:

$$\begin{aligned}y &= \cos^2 \alpha + \sin^2 x \\y &= \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 x \\y &= \cos^2 \alpha + 1 - 2\cos^2 \alpha \\y &= 1 - \cos^2 \alpha \\y &= \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

RPTA: A

7. Simplificar la expresión:

$$N = \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x}{\csc x}$$

- A. $\operatorname{ctg} x$
- B. $\sec^2 x$
- C. $\operatorname{tg} x$
- D. $\csc^2 x$
- E. $\sin^2 x$

RESOLUCIÓN:

Se tiene:

$$\begin{aligned}N &= \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x}{\csc x} \\N &= \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} + \frac{\sin x}{\frac{1}{\sin x}} \\N &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \cos^2 x + \sin^2 x \\N &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 1 \\N &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} \\N &= \frac{1}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$N = \csc^2 x$$

RPTA: D

8. Simplificar:

$$S = \frac{(\sec \theta + \csc \theta)^2 + (\sec \theta - \csc \theta)^2}{\sec^2 \theta \cdot \csc^2 \theta}$$

- A. 4
- B. 5
- C. 3
- D. 2
- E. 6

RESOLUCIÓN:

Por dato se tiene:

$$S = \frac{(\sec \theta + \csc \theta)^2 + (\sec \theta - \csc \theta)^2}{\sec^2 \theta \cdot \csc^2 \theta}$$

Aplicamos Identidad de Legendre.

$$S = \frac{2(\sec^2 \theta + \csc^2 \theta)}{\sec^2 \theta \cdot \csc^2 \theta}$$

Por identidad Auxiliar se tiene:

$$S = \frac{2\sec^2 \theta \cdot \csc^2 \theta}{\sec^2 \theta \cdot \csc^2 \theta}$$

Por lo tanto:

$$S = 2$$

RPTA: D

5.5 IDENTIDADES CON ARCOS COMPUESTOS

Seno de la suma y de la diferencia de dos ángulos	$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$ $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$
Coseno de la suma y diferencia de dos ángulos	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$
Tangente de la suma y de la diferencia de dos ángulos	$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. La Provincia de Islay cumplió $\overline{a53}$ aniversario este 6 de enero, siendo "a" el valor de la expresión:

$$\frac{\operatorname{tg} 11^\circ + \operatorname{tg} 34^\circ}{1 - (\operatorname{tg} 11^\circ)(\operatorname{tg} 34^\circ)}$$

¿Cuántos años cumplió la provincia?

- A. 253
- B. 353
- C. 153
- D. 243
- E. 143

RESOLUCIÓN:

Del ejercicio:

$$\frac{\operatorname{tg} 11^\circ + \operatorname{tg} 34^\circ}{1 - (\operatorname{tg} 11^\circ)(\operatorname{tg} 34^\circ)}$$

Utilizando la identidad trigonométrica de ángulos compuestos tangente suma:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - (\operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} \beta)} \\ \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} 11^\circ + \operatorname{tg} 34^\circ}{1 - (\operatorname{tg} 11^\circ)(\operatorname{tg} 34^\circ)} &= \operatorname{tg}(11^\circ + 34^\circ) \\ \operatorname{tg}(11^\circ + 34^\circ) &= \operatorname{tg} 45^\circ \\ \operatorname{tg} 45^\circ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, Islay cumplió 153 años.

RPTA: C

2. Susana tiene un examen de trigonometría, pero se olvidó llevar su calculadora, en una de las preguntas obtuvo como respuesta "sen 23°" pero su profesor le indicó que, para aprobar debía obtener el resultado de $4(4\sqrt{3} + 3)\operatorname{sen} 23^\circ$.

Indicar la cantidad que debió obtener Susana.

- A. 16,9
- B. 14,7
- C. 17
- D. 15,5
- E. 15,6

RESOLUCIÓN:

Del dato del problema tenemos:

$$\operatorname{sen} 23^\circ = \operatorname{sen}(60^\circ - 37^\circ)$$

Desarrollando:

$$\operatorname{sen}(60^\circ - 37^\circ) = (\operatorname{sen} 60^\circ)(\cos 37^\circ) - (\cos 60^\circ)(\operatorname{sen} 37^\circ)$$

$$\operatorname{sen}(60^\circ - 37^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\operatorname{sen}(60^\circ - 37^\circ) = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$$

$$\operatorname{sen} 23^\circ = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$$

Reemplazando en la condición tenemos:

$$4(4\sqrt{3} + 3)\operatorname{sen} 23^\circ$$

$$4(4\sqrt{3} + 3)\left(\frac{4\sqrt{3} - 3}{10}\right) = 15,6$$

Por lo tanto, Susana debió obtener 15,6

3. Calcular el valor de " β " que verifica la siguiente ecuación:

$$\operatorname{sen} \beta \cdot \cos(3\beta) + \cos \beta \cdot \operatorname{sen}(3\beta) = \frac{7}{25}$$

- A. 5°
- B. 4°
- C. 24°
- D. 7°
- E. 16°

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$\operatorname{sen} \beta \cos 3\beta + \cos \beta \operatorname{sen} 3\beta = \frac{7}{25}$$

$$\operatorname{sen}(\beta + 3\beta) = \frac{7}{25}$$

$$\operatorname{sen}(4\beta) = \frac{7}{25}$$

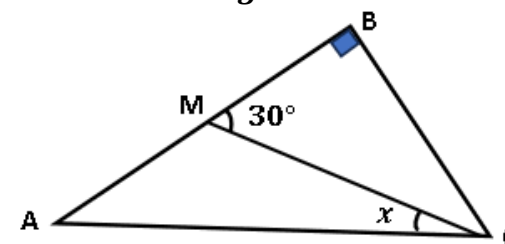
$$4\beta = 16^\circ$$

$$\beta = 4^\circ$$

RPTA: B

4. La figura muestra un triángulo ABC con $\overline{CM}$ (mediana). Calcular:

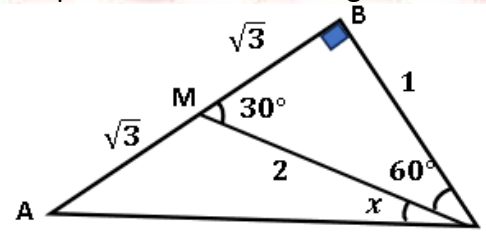
$$R = \sqrt{3} \operatorname{ctg} x - \operatorname{csc} 30^\circ$$



- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

RESOLUCIÓN:

Completando datos en la figura:



$$\operatorname{tg}(60^\circ + x) = 2\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}(60^\circ + x) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} x}{1 - (\operatorname{tg} 60^\circ)(\operatorname{tg} x)} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - (\sqrt{3})(\operatorname{tg} x)} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} + \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}(1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x)$$

$$\sqrt{3} + \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3} - 6\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x + 6\operatorname{tg} x = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

Nos pide calcular:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{3} \operatorname{ctg} x - \csc 30^\circ \\ R &= \sqrt{3} \left(\frac{7}{\sqrt{3}} \right) - 2 \\ \therefore R &= 5 \end{aligned}$$

RPTA: E

5. La edad de un estudiante cuando ingresó al examen ordinario I FASE 2023 a la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa es equivalente al resultado de calcular:

$$\operatorname{sen}(x + 20^\circ) \frac{44}{\sqrt{3}}$$

Si se cumple que:

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos 10^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ \cdot \cos x = \operatorname{sen} 50^\circ$$

¿Cuántos años tenía el estudiante cuando ingresó a la universidad?

- A. 24 años
- B. 25 años
- C. 18 años
- D. 21 años
- E. 22 años

RESOLUCIÓN:

Por identidad del seno de la suma:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x$$

Aplicando en la condición:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \cdot \cos 10^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ \cdot \cos x &= \operatorname{sen} 50^\circ \\ \operatorname{sen}(x + 10^\circ) &= \operatorname{sen} 50^\circ \\ x + 10^\circ &= 50^\circ \\ x &= 40^\circ \end{aligned}$$

Calculamos la edad, reemplazando "x"

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x + 20^\circ) \frac{44}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{sen}(40^\circ + 20^\circ) \frac{44}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \frac{44}{\sqrt{3}} \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{44}{\sqrt{3}} = 22 \end{aligned}$$

∴ El estudiante cuando ingresó a la universidad tenía 22 años.

RPTA: E

6. Determinar el valor de "3k", si:

$$k = \frac{\operatorname{sen}(3x) \cdot \cos(4x) + \cos(3x) \cdot \operatorname{sen}(4x)}{\operatorname{sen}(6x) \cdot \cos x + \cos(6x) \cdot \operatorname{sen} x}$$

- A. 22
- B. 12
- C. 9
- D. 2
- E. 3

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

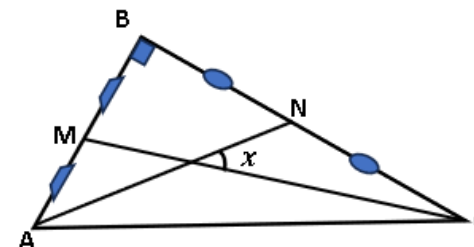
$$\begin{aligned} k &= \frac{\operatorname{sen}(3x) \cos(4x) + \cos(3x) \operatorname{sen}(4x)}{\operatorname{sen}(6x) \cos x + \cos(6x) \operatorname{sen} x} \\ k &= \frac{\operatorname{sen}(3x + 4x)}{\operatorname{sen}(6x + x)} \\ k &= \frac{\operatorname{sen}(7x)}{\operatorname{sen}(7x)} \\ k &= 1 \end{aligned}$$

el valor de

$$3k = 3(1)$$

$$\therefore 3k = 3$$

RPTA: E



7. Calcular el valor de:

$$A = 3\sec 60^\circ(\sen 50^\circ - 2\cos 40^\circ \cdot \sen 10^\circ)$$

- A. 3
- B. 5
- C. 4
- D. 7
- E. 1

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$3\sec 60^\circ(\sen 50^\circ - 2\cos 40^\circ \sen 10^\circ)$$

$$3\sec 60^\circ[\sen (40^\circ + 10^\circ) - 2\cos 40^\circ \sen 10^\circ]$$

$$3\sec 60^\circ[\sen 40^\circ \cos 10^\circ + \sen 10^\circ \cos 40^\circ - 2\cos 40^\circ \sen 10^\circ]$$

$$3\sec 60^\circ[\sen 40^\circ \cos 10^\circ - \cos 40^\circ \sen 10^\circ]$$

$$3\sec 60^\circ[\sen (40^\circ - 10^\circ)]$$

$$3\sec 60^\circ[\sen (30^\circ)]$$

$$3\sec 60^\circ \sen 30^\circ$$

$$3(2) \frac{1}{2} = 3$$

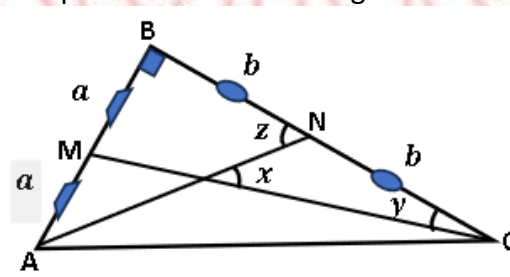
RPTA: A

8. En la figura, hallar el máximo valor de "x":

- A. 54°
- B. 37°
- C. 45°
- D. 15°
- E. 60°

RESOLUCIÓN:

Completando datos en la figura:



$$\operatorname{tg} y = \frac{a}{2b}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{2a}{b}$$

Aplicando propiedad:

$$z = x + y$$

$$x = z - y$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (z - y)$$

$$\operatorname{tg} (z - y) = \frac{\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} y}{1 + (\operatorname{tg} z)(\operatorname{tg} y)}$$

Reemplazando

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{2a}{b} - \frac{a}{2b}}{1 + \left(\frac{2a}{b}\right)\left(\frac{a}{2b}\right)}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{3a}{2b}}{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{3ab}{b^2}}{2(a^2 + b^2)}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)}$$

Nuestro objetivo es generar el denominador más pequeño, si a y b asumen valores enteros; entonces, el factor debería ser 2

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$$

$$\therefore x_{\max} = 37^\circ$$

RPTA: B

5.6 IDENTIDADES DE ÁNGULOS MÚLTIPLES (DOBLE Y MITAD)

5.6.1 ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

5.6.2 ÁNGULO MITAD

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Nota: $(\pm)$ Depende del cuadrante al cual $\epsilon \frac{\alpha}{2}$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. En un triángulo rectángulo sus catetos miden: $\operatorname{sen} 20^\circ$ y $1 + \cos 20^\circ$. Calcular la medida de sus ángulos agudos.

A. 37° y 53°

B. 30° y 60°

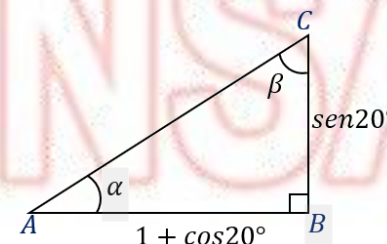
C. 40° y 50°

D. 45° y 45°

E. 10° y 80°

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Sean los ángulos agudos α y β

En el $\triangle ABC$, tenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{1 + \cos 20^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 2 \cdot 10^\circ}{1 + \cos 2 \cdot 10^\circ}$$

Por identidad de ángulo doble:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\operatorname{sen} 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}{2\cos^2 10^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 10^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ$$

Además:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$$10^\circ + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 80^\circ$$

$$\therefore \alpha = 10^\circ \text{ y } \beta = 80^\circ$$

RPTA: E

2. Calcular el valor de:

$$E = \frac{\cos 12^\circ}{\cos 6^\circ + \sin 6^\circ} - \cos 6^\circ$$

- A. $-\sin 4^\circ$
- B. $\cos 6^\circ$
- C. $-\sin 6^\circ$
- D. $-\cos 6^\circ$
- E. $\sin 6^\circ$

RESOLUCIÓN:

Por identidad del ángulo doble:

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

Tenemos:

$$E = \frac{\cos^2 6^\circ - \sin^2 6^\circ}{\cos 6^\circ + \sin 6^\circ} - \cos 6^\circ$$

Aplicamos el producto notable de diferencia de cuadrados:

$$E = \frac{(\cos 6^\circ + \sin 6^\circ)(\cos 6^\circ - \sin 6^\circ)}{\cos 6^\circ + \sin 6^\circ} - \cos 6^\circ$$

$$E = \cos 6^\circ - \sin 6^\circ - \cos 6^\circ$$

$$\therefore E = -\sin 6^\circ$$

RPTA: C

3. Simplificar la siguiente expresión:

$$W = \cos 2x - (\sin x + \cos x)\sqrt{1 - \sin 2x}$$

donde $\sin x < \cos x$.

- A. 0
- B. -1
- C. 1
- D. 2
- E. -2

RESOLUCIÓN:

Reescribiendo la expresión:

$$1 - \sin 2x = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{2\sin x \cdot \cos x}_{\sin 2x}$$

Reemplazando:

$$W = \cos 2x - (\sin x + \cos x)\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$W = \cos 2x - (\sin x + \cos x)\underbrace{|\sin x - \cos x|}_{<0}$$

Como:

$$\sin x < \cos x \Rightarrow \sin x - \cos x < 0$$

Luego en "W", tenemos:

$$W = \cos 2x - (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)$$

Entonces:

$$W = \cos 2x - (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

Por ángulo doble del coseno:

$$W = \cos 2x - \cos 2x$$

$$\therefore W = 0$$

RPTA: A

4. Expresar:

$$tg\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right) \text{ en función de } tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ y } sec\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

- A. $sec\left(\frac{\alpha}{2}\right) - tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
- B. $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + sec\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
- C. $\frac{1}{2}tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + sec\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
- D. $-tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) - sec\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
- E. $2\left[tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + sec\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

RESOLUCIÓN:

Por identidad de la tangente del ángulo mitad:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \csc A - \operatorname{ctg} A$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \alpha}{4}\right) &= \csc\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \alpha}{4}\right) &= \csc\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \\ \therefore \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \alpha}{4}\right) &= \sec\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

RPTA: A

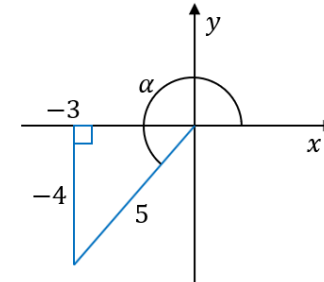
5. Si se cumple que $\operatorname{ctg} \alpha = 0,75$; donde $\alpha \in \text{IIIC}$. Calcular: $N = \cos 2\alpha - \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

- A. $\frac{3}{5}$
- B. $\frac{4}{5}$
- C. $\frac{7}{25}$
- D. $\frac{43}{25}$
- E. $-\frac{23}{25}$

RESOLUCIÓN:

De $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$; $\alpha \in \text{IIIC}$, graficamos y por teorema de Pitágoras la hipotenusa es 5:

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \text{IIC}$$



$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; \frac{\alpha}{2} \in \text{IIC} \dots (I)$$

$$\text{Pero: } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5} \dots (II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)}} = -2$$

Por el ángulo doble de:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 = 2\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 \\ \Rightarrow \cos 2\alpha &= -\frac{7}{25}\end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}N &= -\frac{7}{25} - (-2) = \frac{43}{25} \\ \therefore N &= \frac{43}{25}\end{aligned}$$

RPTA: D

6. Sabiendo que: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, además, $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$. Calcular $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

- A. $\sqrt{\frac{1}{8}}$
 B. $\sqrt{3}$
 C. $\sqrt{\frac{1}{6}}$
 D. $\sqrt{\frac{1}{7}}$
 E. $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

Sabemos que:

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \\ \Rightarrow 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$$

En el I Cuadrante $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ es (+)

Por identidad del coseno del ángulo mitad:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Si: $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$, entonces:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4}}{2}} \\ \therefore \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{8}}$$

7. Si: $\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$, donde $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\sqrt{2}$.Si: $4\operatorname{sen} \alpha - 3\sqrt{2}\cos \alpha = 5$, calcular:

$$E = \cos 2\alpha - 12\sqrt{2}\operatorname{sen} 2\alpha$$

- A. 8
 B. 6
 C. 4
 D. 2
 E. 1

RESOLUCIÓN:

De la condición, elevamos al cuadrado:

$$(4\operatorname{sen} \alpha - 3\sqrt{2}\cos \alpha)^2 = 5^2$$

$$16\operatorname{sen}^2 \alpha - 2(4\operatorname{sen} \alpha)(3\sqrt{2}\cos \alpha) + (3\sqrt{2}\cos \alpha)^2 = 5^2$$

$$8 \underbrace{(2\operatorname{sen}^2 \alpha)}_{1 - \cos 2\alpha} - 12\sqrt{2} \underbrace{(2\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha)}_{\operatorname{sen} 2\alpha} + 9 \underbrace{(2\cos^2 \alpha)}_{1 + \cos 2\alpha} = 25$$

Reemplazando:

$$8(1 - \cos 2\alpha) - 12\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha + 9(1 + \cos 2\alpha) = 25$$

$$8 - 8\cos 2\alpha - 12\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha + 9 + 9\cos 2\alpha = 25$$

$$\cos 2\alpha - 12\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha = 8$$

Por lo tanto:

$$E = 8$$

RPTA: A**8.** Sea un ángulo " α ", si se sabe que:

$$N = 1 - \operatorname{sen} 2^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 8^\circ$$

Calcular el valor de " $200N$ ".

- A. 207
 B. 193
 C. 181
 D. 197
 E. 204

RESOLUCIÓN:

Por identidad del ángulo doble:

RPTA: A

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cdot \cos A$$

Entonces:

$$N = 1 - \operatorname{sen}(2^\circ) \cos(2^\circ) \cos(4^\circ) \cos(8^\circ)$$

$$2N = 2 - (2 \operatorname{sen} 2^\circ \cdot \cos 2^\circ) \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 8^\circ$$

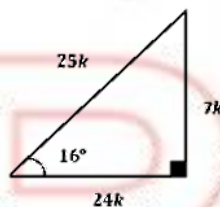
$$2N = 2 - \operatorname{sen} 4^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 8^\circ$$

$$4N = 4 - (2 \operatorname{sen} 4^\circ \cdot \cos 4^\circ) \cdot \cos 8^\circ$$

$$4N = 4 - \operatorname{sen} 8^\circ \cdot \cos 8^\circ$$

$$8N = 8 - (2 \operatorname{sen} 8^\circ \cdot \cos 8^\circ)$$

$$8N = 8 - \operatorname{sen} 16^\circ$$



$$8N = 8 - \frac{7}{25}$$

$$8N = \frac{193}{25}$$

Nos piden calcular "200N":

$$\therefore 200N = 193$$

RPTA: B

5.7 IDENTIDADES PARA LA SUMA Y PRODUCTO DE SENOS Y COSENOS

5.7.1 TRANSFORMACIONES DE SUMAS O DIFERENCIAS A PRODUCTOS

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

5.7.2 TRANSFORMACIONES DE PRODUCTOS A SUMAS O DIFERENCIAS

$$2 \operatorname{sen} A \cdot \cos B = \operatorname{sen} (A+B) + \operatorname{sen} (A-B)$$

$$2 \cos A \cdot \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} (A+B) - \operatorname{sen} (A-B)$$

$$2 \cos A \cdot \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$$

$$2 \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Reducir:

$$M = \frac{\cos 15x + 10 \cos 10x + \cos 5x}{\operatorname{sen} 15x + 10 \operatorname{sen} 10x + \operatorname{sen} 5x}$$

- A. $\operatorname{ctg} x$
- B. $\operatorname{ctg} 2x$
- C. $\operatorname{ctg} 4x$
- D. $\operatorname{ctg} 5x$
- E. $\operatorname{ctg} 10x$

RESOLUCIÓN:

Acomodamos el dato:

$$M = \frac{\cos 15x + \cos 5x + 10 \cos 10x}{\operatorname{sen} 15x + \operatorname{sen} 5x + 10 \operatorname{sen} 10x}$$

Transformamos a producto:

$$M = \frac{2 \cos 10x \cdot \cos 5x + 10 \cos 10x}{2 \sin 10x \cdot \cos 5x + 10 \sin 10x}$$

Factorizamos:

$$M = \frac{2 \cos 10x (\cos 5x + 5)}{2 \sin 10x (\cos 5x + 5)}$$

$$M = \operatorname{ctg} 10x$$

2. Reducir:

$$M = \frac{\cos (45^\circ + x) - \cos (45^\circ - x)}{\sin (120^\circ + x) - \sin (120^\circ - x)}$$

- A. $\sqrt{2}$
 B. 1
 C. 0
 D. 0.5
 E. 2

RESOLUCIÓN:

Transformando a producto:

$$M = \frac{-2 \sin 45^\circ \cdot \sin x}{2 \cos 120^\circ \cdot \sin x}$$

Luego de simplificar y reemplazar los valores numéricos correspondiente tendremos:

$$M = \frac{-\sin 45}{\cos 120^\circ}$$

$$M = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$M = \sqrt{2}$$

RPTA: E

RPTA: A

3. Simplificar:

$$M = \frac{1,5 + \sqrt{3} \sin 2x}{\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} (x + 30^\circ)}$$

- A. 1
 B. $\sqrt{2}$
 C. 2
 D. 1,5
 E. $\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

Reescribimos el dato:

$$M = \frac{\frac{3}{2} + \sqrt{3} \sin 2x}{(\cos 2x + \cos 60^\circ) \cdot \operatorname{tg} (x + 30^\circ)}$$

$$M = \frac{\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2x \right)}{2 \cos (x + 30^\circ) \cdot \cos (x - 30^\circ) \cdot \frac{\sin (x + 30^\circ)}{\cos (x + 30^\circ)}}$$

$$M = \frac{\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2x \right)}{2 \cdot \cos (x - 30^\circ) \cdot \sin (x + 30^\circ)}$$

$$M = \frac{\sqrt{3} (2 \sin (30^\circ + x) \cdot \cos (30^\circ - x))}{2 \cos (x - 30^\circ) \cdot \sin (30^\circ + x)}$$

Finalmente simplificamos:

$$M = \sqrt{3}$$

RPTA: E

4. Reducir:

$$M = \frac{2(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y)}{1 + \cos 2x + \cos 2y + \cos (2x - 2y)}$$

- A. $\operatorname{tg} x$
 B. $\operatorname{tg} y$
 C. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$
 D. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$
 E. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$

RESOLUCIÓN:

Transformando a producto:

$$M = \frac{2[2\operatorname{sen}(x+y) \cdot \cos(x-y)]}{2\cos^2(x-y) + 2\cos(x+y) \cdot \cos(x-y)}$$

Simplificamos:

$$M = \frac{2\cos(x-y) \cdot \operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x-y) [\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

$$M = \frac{2\operatorname{sen}(x+y)}{2\cos x \cdot \cos y}$$

$$M = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$$

RPTA: D

5. Simplificar:

$$W = \frac{2\cos^3 x - \cos 2x \cdot \cos x + \cos x}{8\cos^4 x - 6\cos^2 x}$$

- A. $\sec 3x$
 B. $\csc 3x$
 C. $\sec 2x$
 D. $\csc 2x$
 E. $\sec 4x$

RESOLUCIÓN:

Se sabe que:

$$4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$$

$$2\cos x \cdot \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

Multiplicamos por 2 el numerador y el denominador:

$$W = \frac{4\cos^3 x - 2\cos 2x \cdot \cos x + 2\cos x}{2 \cdot 2\cos x (4\cos^3 x - 3\cos x)}$$

$$W = \frac{3\cos x + \cos 3x - (\cos 3x + \cos x) + 2\cos x}{4\cos x \cdot \cos 3x}$$

Simplificando:

$$W = \frac{4\cos x}{4\cos x \cdot \cos 3x}$$

$$W = \frac{1}{\cos 3x} = \sec 3x$$

RPTA: A

6. Reducir a un monomio la siguiente expresión:

$$W = \operatorname{sen} 3x(3\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 9x + 4\operatorname{sen} 3x \cdot \cos^2 3x)$$

- A. $\operatorname{sen} 3x$
 B. $4\operatorname{sen}^2 3x$
 C. $\operatorname{sen}^2 3x$
 D. $\operatorname{sen}^2 x$
 E. $4\operatorname{sen}^2 x$

RESOLUCIÓN:

Al efectuar y ordenar apropiadamente:

$$W = \frac{3}{2} \left(\underbrace{2\operatorname{sen}^2 3x}_{\text{degradar}} \right) - \frac{1}{2} \left(\underbrace{2\operatorname{sen} 9x \cdot \operatorname{sen} 3x}_{\text{transformar}} \right) + \underbrace{(2\operatorname{sen} 3x \cdot \cos 3x)^2}_{\text{dobles}}$$

$$W = \frac{3}{2} (1 - \cos 6x) - \frac{1}{2} (\cos 6x - \cos 12x) + (\operatorname{sen} 6x)^2$$

$$W = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos 6x - \frac{1}{2} \cos 6x + \frac{1}{2} \cos 12x + \frac{1}{2} (2\cos^2 6x)$$

$$W = \frac{3}{2} - 2\cos 6x + \frac{1}{2} \cos 12x + \frac{1}{2} (1 - \cos 12x)$$

Simplificando:

$$W = \frac{3}{2} - 2 \cos 6x + \frac{1}{2} \cos 12x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 12x$$

$$W = 2 - 2 \cos 6x$$

$$W = 2(1 - \cos 6x)$$

$$w = 2(2\sin^2 3x)$$

$$W = 4\sin^2 3x$$

RPTA: B

7. Reducir a un monomio la siguiente expresión:

$$W = 2\cos x(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos^2 x)$$

A. $\sin^6 3x$

B. $4\sin^4 x$

C. $8\cos^4 x$

D. $16\cos^6 x$

E. $32\cos^6 x$

RESOLUCIÓN:

Al efectuar y ordenar:

$$W = 2\cos 5x \cos x + 5(2 \cos 3x \cos x) + 10(2 \cos^2 x)$$

Transformamos:

$$W = \cos 6x + \cos 4x + 5(\cos 4x + \cos 2x) + 10(1 + \cos 2x)$$

$$W = \cos 6x + \cos 4x + 5 \cos 4x + 5 \cos 2x + 10 + 10 \cos 2x$$

$$W = \cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10$$

Expresamos "W" en función del $\cos 2x$:

$$W = 4\cos^3 2x - 3 \cos 2x + 6(2 \cos^2 2x - 1) + 15 \cos 2x + 10$$

$$W = 4\cos^3 2x + 12\cos^2 2x + 12 \cos 2x + 4$$

Al factorizar:

$$W = 4(\cos^3 2x + 3\cos^2 2x + 3 \cos 2x + 1)$$

$$W = 4(\cos 2x + 1)^2 = 4(2\cos^2 x)^3$$

$$W = 32\cos^6 x$$

8. Simplificar:

$$M = \frac{2\sin 15x \cdot \sin x}{2\cos 10x + 1} + \cos 6x$$

A. $\cos x$

B. $\cos 2x$

C. $\cos 3x$

D. $\cos 4x$

E. $\cos 6x$

RESOLUCIÓN:

Del ejercicio:

$$\frac{2\sin 5x(2 \cos 10x + 1)\sin x}{2 \cos 10x + 1} + \cos 6x$$

Transformamos:

$$\cos 4x - \cos 6x + \cos 6x = \cos 4x$$

RPTA: D

SEPRUNSA
na Nueva Imagen

CAPÍTULO VI

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

La potencia es una operación que implica multiplicar un número por sí mismo un cierto número de veces, mientras que la radicación es la operación inversa, en la cual encontramos el número que, elevado a una potencia específica, produce un resultado dado.

El interés simple, desempeña un papel fundamental en nuestras vidas que a menudo pasamos por alto. Desde la planificación de nuestras finanzas personales hasta la toma de decisiones comerciales inteligentes, el interés simple se encuentra en el núcleo de numerosas aplicaciones prácticas.



6.1 POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

6.1.1 POTENCIACIÓN

Es la forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{\text{"n" veces}} = P$$

Donde:

a : Base

n : Exponente

P : Potencia

6.1.1.1 PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN:

$$a^0 = 1 ; a \neq 0$$

$$a^1 = a$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a \div b)^n = a^n \div b^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

6.1.1.2 CUADRADO PERFECTO

Un cuadrado perfecto es aquel número que resulta de multiplicar por sí mismo, **2** veces otro número.

Ejemplo:

El **169** es cuadrado perfecto, porque resulta de multiplicar a **13** dos

veces por sí mismo.

Es decir:

$$(13)(13) = 13^2 = 169$$

Notación:

Un número cuadrado se denota por: k^2

Condición necesaria para que un número sea k^2

Sea el número: $N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$

Se cumple que: N será $k^2 \rightarrow \alpha, \beta, \gamma$ son $\overset{0}{2}$

Ejemplo:

El **324** es cuadrado perfecto. Descomponiendo en factores primos:

$$324 = 2^2 \cdot 3^4$$

Vemos que los exponentes son pares.

6.1.1.3 CUBO PERFECTO

Un cubo perfecto, es aquel número que resulta de multiplicar 3 veces por sí mismo, otro número.

Ejemplo:

El número **1331** es un cubo perfecto, porque resulta de multiplicar **11**, tres veces por sí mismo:

$$(11)(11)(11) = 11^3 = 1331$$

Notación:

Un número cubo perfecto se denota por: k^3

Condición necesaria para que un número sea k^3

Sea el número: $N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$

Se cumple que: N será $k^3 \leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ son $\overset{0}{3}$

Ejemplo

El **216** es un cubo perfecto. Descomponiendo en factores primos:

$$216 = 2^3 \cdot 3^3$$

Veamos que los exponentes de los factores primos son $\overset{0}{3}$

6.1.2 RADICACIÓN

Es la operación inversa de la potenciación. En concreto, encontrar la raíz enésima de un número consiste en encontrar otro que, elevado a n , nos dé el número original.

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si ocurre que } b^n = a$$

Donde:

a : Radicando

n : Índice de la raíz

b : Raíz

6.1.2.1 PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$800 = 28^2 + 16$$

6.1.2.2 RAÍZ CUADRADA

La raíz de un número entero positivo puede ser exacta o inexacta.

a) Raíz cuadrada exacta: Es aquella, en la que al elevar al cuadrado la raíz, reproduzca exactamente el radicando.

Es decir:

$$q = \sqrt[n]{N} \rightarrow q^2 = N; \quad q \in \mathbb{N}; \quad n = 2$$

Ejemplo:

Vemos que **36** es la raíz cuadrada exacta de **1296**, porque: $36^2 = 1296$

b) Raíz cuadrada inexacta. Es aquella, en la cual existe residuo. Se puede calcular de dos maneras por defecto o por exceso.

- **Por defecto:** Es aquella en la que el cuadrado de la raíz es menor que el radicando.

$$N = q^2 + r$$

Donde:

q: raíz cuadrada por defecto

r: residuo por defecto

Ejemplo:

Expresamos a 800 como una raíz cuadrada por defecto:

- **Por exceso:** Es aquella en la que el cuadrado de la raíz es mayor que el radicando.

$$N = (q + 1)^2 - r'$$

Donde:

q + 1: Raíz cuadrada por exceso

r': Residuo por exceso

Ejemplo:

Expresamos a 800 como una raíz cuadrada por defecto:

$$800 = 29^2 - 41$$

Propiedades

Sea **N** un número entero positivo que no tiene raíz cuadrada exacta.

- El número **N**, se encuentra entre dos números, de raíces consecutivas, que si tienen raíz cuadrada exacta

$$q^2 < N < (q + 1)^2$$

- La suma de los residuos, por defecto y por exceso, siempre es igual al doble de la raíz por defecto más la unidad.

$$r + r' = 2q + 1$$

- El residuo máximo es el doble de la raíz por defecto.

$$r_{\text{máx}} = 2q$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Si capitalizando un negocio se puede duplicar la inversión en cada año. ¿En cuánto se convierte un dólar al cabo de 30 años de iniciado el negocio? Indique la cantidad más aproximada en millones de dólares.

- A. 10
- B. 11
- C. 106
- D. 107
- E. 1074

RESOLUCIÓN:

Invertir un dólar:

- Al final del 1^{er} año: $2(1) = 2$
- Al final del 2^{do} año: $2(2) = 2^2$
- Al final del 3^{er} año: $2(2^2) = 2^3$
- Al final de 30 años: 2^{30}

$$M = 2^{30} = (2^{10})^3$$

$$M = 1024^3 = 1073741824$$

Luego: $M = 1073,74$ millones en aproximada $M = 1074$ millones

RPTA: E

2. Si $(a+1)(a)(a+3)(a+2) = k^2$. Hallar "a.k"

- A. 296
- B. 290
- C. 294
- D. 292
- E. 298

RESOLUCIÓN:

Analizando la última cifra:

la cifra (a

$$+ 2) \text{ puede tener los siguientes valores } \begin{cases} 1 \rightarrow a = -1 \\ 4 \rightarrow a = 2 \\ 5 \rightarrow a = 3 \\ 6 \rightarrow a = 4 \\ 9 \rightarrow a = 7 \end{cases}$$

De los cuales no cumple: $a = -1$ y $a = 7$, reemplazando los valores posibles:

Si $a = 2$:

$$4365 \begin{cases} \text{Es } 2^0 \\ \text{pero no es } 4^0 \\ \rightarrow \text{no es } k^2 \end{cases}$$

Si $a = 3$:

$$4365 \begin{cases} \text{La cifra de decenas no es 2} \\ \rightarrow \text{no es } k^2 \end{cases}$$

Si $a = 4$:

$$5476 = 74^2 \rightarrow k = 74 \\ \therefore a.k = 4(74) = 296$$

RPTA: A

3. Cuántos cubos perfectos posee la serie:

$$24(1); 24(2); 24(3); \dots; 24(250)$$

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

RESOLUCIÓN:

De la serie:

$$24(1); 24(2); 24(3); \dots; 24(250)$$

Su enésimo término es:

$$a_n = 24(n); n = \{1; 2; \dots; 250\}$$

Hallamos los términos, cubos perfectos: $a_n = k^3$

$$24(n) = k^3$$

$$2^3(3)(n) = k^3$$

Los exponentes de los factores del primer miembro son $\overset{0}{3}$, se cumple:

$$n = 3^2 \cdot p^3$$

Tenemos:

$$1 \leq 3^2 \cdot p^3 \leq 250$$

Los valores de p son: $p = \{1; 2; 3\}$

$\therefore$ Son 3 términos cubos perfectos

RPTA: C

4. ¿Cuál es el menor número entero por el que se debe multiplicar a 648 para que su producto sea cuadrado y cubo perfecto a la vez?

- A. 71
- B. 72
- C. 73
- D. 74
- E. 75

RESOLUCIÓN:

Descomponiendo los factores: $648 = 2^3 \cdot 3^4$

Sea N el número, tal que:

$$648 \cdot N = k^2 \text{ y } k^3$$

N debe contener los menores factores posibles, de manera que sus exponentes sean 6°

$$2^3 \cdot 3^4 (2^3 \cdot 3^2) = k^6$$

$$\therefore \text{El menor valor de } N = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

RPTA: B

5. Se multiplican los 3 términos de una raíz cuadrada inexacta cuya raíz es 21 y se ha obtenido 46830. ¿Cuánto se obtendrá si se suman dichos términos?

- A. 471
- B. 472
- C. 473
- D. 474
- E. 475

RESOLUCIÓN:

De una raíz cuadrada inexacta:

$$N = 21^2 + r \dots (1)$$

Por dato:

$$N \cdot 21 \cdot r = 46\,830$$

$$N \cdot r = 2230 \dots (2)$$

Reemplazamos (2) en (1):

$$(441 + r) \cdot r = 2230$$

$$r = 5$$

En (1):

$$N = 472$$

$$\therefore N + q + r = 472$$

RPTA: B

6. En una raíz cuadrada inexacta, donde el residuo por exceso excede en 33 unidades al residuo por defecto, se sabe que la suma de la raíz y el residuo por defecto es 20. Hallar la suma de las cifras del radicando.

- A. 11
- B. 12
- C. 13

D. 14

E. 15

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

Por defecto: $N = q^2 + r$ Por exceso: $N = (q + 1)^2 - r'$

Por dato:

$$r' - r = 33 \dots (1)$$

$$q + r = 20 \dots (2)$$

Propiedad:

$$r + r' = 2q + 1 \dots (3)$$

Reemplazamos (1) y (2) en (3):

$$(20 - q) + (33 - q) = 2q + 1$$

$$q = 13 \wedge r = 7$$

Entonces:

$$N = 13^2 + 7 = 176$$

$$\therefore \text{Suma de cifras es } 14$$

RPTA: D

7. ¿Cuántos números naturales múltiplos de 3 comprendidos entre 10 000 y 1 000 000 son cuadrados y cubos perfectos a la vez?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 5

RESOLUCIÓN:Como: $N = k^2 \wedge N = k^3 \rightarrow N = k^6$

Además:

$$N = 3^o \rightarrow N = (3x)^6$$

También:

$$10^4 < N < 10^6$$

$$10^4 < (3x)^6 < 10^6$$

$$\sqrt[6]{100} < 3x < 10$$

$$4,6 \dots < 3x < 10$$

$$1,5 \dots < x < 3,3 \dots$$

Los números naturales que puede tomar x son {2; 3}

RPTA: B

8. Sean A y B dos enteros positivos y consecutivos tal que entre A y B hay 468 enteros. ¿Cuál es el mayor entero par comprendido entre dichos cubos?

A. 2156

B. 2196

C. 2298

D. 2376

E. 2418

RESOLUCIÓN:

Consideremos, que:

$$A = k \text{ y } B = k + 1$$

$$k^3; \underbrace{\dots\dots\dots}_{468 \text{ números}}; (k + 1)^3$$

Entonces:

$$(k + 1)^3 - k^3 = 469$$

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 469$$

$$k(k + 1) = 12(13)$$

$$k = 12$$

Luego:

$$A = 12^3 = 1728 \text{ y } B = 13^3 = 2197$$

Piden el mayor entero par: 2196

RPTA: B

t : Tiempo

6.2 INTERÉS SIMPLE

Es el que se calcula sobre un capital que permanece invariable o constante en el tiempo y el interés ganado se acumula sólo al término de esta transacción.

Tiempo en años:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Tiempo en meses:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$$

Tiempo en días:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36\,000}$$

Monto:

$$M = C + I$$

$$M = C(1 + r \cdot t)$$

Considerando la tasa de interés anual.

Equivalencia de unidades de tiempo

- **1 bimestre $\leftrightarrow$ 2 meses**
El año tiene 6 bimestres
- **1 trimestre $\leftrightarrow$ 3 meses**
El año tiene 4 trimestres
- **1 cuatrimestre $\leftrightarrow$ 4 meses**
El año tiene 3 cuatrimestres
- **1 semestre $\leftrightarrow$ 6 meses**
El año tiene 2 semestres

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. ¿A qué tasa de interés anual se colocó S/ 150 000, que en 24 días ha producido un interés de S/ 500

- A. 10 %
- B. 3 %
- C. 1 %
- D. 5 %
- E. 18 %

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos:

$$C = S/ 150\,000$$

$$t = 24 \text{ días}$$

Considerar:

 I : Interés r : Tasa de interés o rédito C : Capital

$$I = S/500$$

$$150\,000 \cdot \frac{r}{36\,000} \cdot 24 = 500$$

$$r\% = 5\%$$

RPTA: D

2. Si un capital se duplicase y la tasa de interés se triplicase, el interés en el mismo tiempo sería 200 000 soles mayor. ¿Cuál fue el interés original?

- A. 28 000
- B. 30 000
- C. 45 000
- D. 40 000
- E. 38 000

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos:

$$I = I_1 + I_2$$

$$\frac{2c \cdot 3r \cdot t}{100} = \frac{c \cdot r \cdot t}{100} + 200\,000$$

$$\frac{5c \cdot r \cdot t}{100} = 200\,000$$

$$\frac{c \cdot r \cdot t}{100} = 40\,000$$

Por lo tanto, el interés generado es de 40 000 soles

RPTA: D

3. Jorge vende su PlayStation a S/ 1 500 y deposita cierta cantidad de ese dinero en el banco a una tasa del 6 %. Al cabo de 4 meses, ese dinero se convierte en S/ 510. ¿Cuánto no depositó Jorge en el banco?

- A. S/ 300
- B. S/ 500
- C. S/ 800
- D. S/ 1 000
- E. S/ 1 100

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos:

$$C = \text{capital}$$

$$t = 4 \text{ meses} = \frac{4}{12} \text{ años}$$

$$M = S/510$$

$$r = 6\% \text{ anual}$$

Del monto tenemos:

$$M = C(1 + rt)$$

$$510 = C(1 + \frac{6}{100} \cdot \frac{4}{12})$$

$$C = 500$$

Entonces, no depositó S/ 1000

RPTA: D

4. ¿Qué interés produce un capital de S/ 120 000 durante 2 meses y 10 días, colocado al 12 % trimestral?

- A. S/ 11 000
- B. S/ 11 100
- C. S/ 11 200
- D. S/ 11 300
- E. S/ 11 400

RESOLUCIÓN:

Del ejercicio:

$$C = 120\,000$$

$$t = 2 \text{ meses} + 10 \text{ días} = 2(30) + 10 = 70 \text{ días}$$

$$r = 12\% \text{ trimestral} \rightarrow 12\% \cdot 4 = 48\% \text{ anual}$$

Reemplazamos:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$$

$$I = \frac{120000 \cdot 48.70}{36000}$$

$$I = 11200$$

El interés producido es de s/ 11 200

RPTA: C

5. Por motivos de acercarse la campaña escolar, Kristy está pensando solicitar un préstamo al banco por un importe de S/ 12 000. Si la fecha prevista para que le depositen es el 15 de enero y ella va a pagar el 29 de febrero de este año (2024) a una tasa de interés simple de 8 % cuatrimestral. ¿Cuánto será el interés que deberá pagar?

- A. S/ 180
- B. S/ 200
- C. S/ 240
- D. S/ 360
- E. S/ 420

RESOLUCIÓN:

Sea:

Capital: s/ 12 000

Tasa interés: 8 % *cuatrimestral* $\rightarrow$ 2 % *mensual*

Tiempo: Del 15 de enero a 29 febrero $\rightarrow$ 45 días
45 días $\leftrightarrow$ 1.5 meses

Luego:

$$I = 12000 \cdot 2\% \cdot 1.5$$

$$I = 360$$

El interés a pagar es de s/ 360.

RPTA: D

6. Dionicio se presta 10 500 soles de su amigo Carlos a una tasa de 5 % trimestral, por un periodo de año y medio. ¿Cuánto de interés pagará?

- A. 1 215 soles
- B. 3 150 soles
- C. 5 220 soles
- D. 4 250 soles
- E. 1 800 soles

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos:

Capital: s/ 10 5000

Tasa de interés: 5 % *trimestral* $\leftrightarrow$ 20 % *anual*

Tiempo: $t = 18 \text{ meses}$

Reemplazamos:

$$I = \frac{10500(18)(20)}{1200}$$

$$I = 3150$$

Por lo tanto, pagará s/ 3150 de interés.

RPTA: B

7. Si Fabricio obtuvo de interés la tercera parte del capital en un tiempo cuatrimestral equivalente a un número de dos cifras, una de sus cifras es el número que no es primo ni compuesto, con el primer compuesto. ¿Cuál sería su tasa de interés bimestral?

- A. 1,19 %
- B. 1,22 %

- C. 1,34 %
D. 1,36 %
E. 1,49 %

RESOLUCIÓN:

Del enunciado tenemos:

$$I = \frac{1}{3}C$$

$$t = 14 \text{ cuatrimestral}$$

Reemplazamos:

$$\frac{1}{3}C = C \cdot r \cdot \frac{14}{3}$$

$$r = \frac{1}{14} \text{ anual}$$

$$r = 7.14 \% \text{ anual}$$

Entonces

$$r = \frac{7.14 \%}{6}$$

$$r = 1.19 \% \text{ bimestral}$$

RPTA: A

8. ¿A qué tasa se debe colocar un capital para que en 2 años y medios produzca un interés equivalente a los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{2}{3}$ de la mitad del monto?

- A. 25 %
B. 10 %
C. 12 %
D. 15 %
E. 16 %

RESOLUCIÓN:

Del ejercicio:

$$I = \frac{3}{5} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} (C + I) \right) \right)$$

$$5I = C + I$$

$$4I = C$$

Donde:

$$\frac{C}{4} = \frac{r}{100} \left(\frac{5}{2} C \right)$$

$$r = 10 \%$$

Por lo tanto, se debe colocar a un interés de 10 % anual

RPTA: B

6.3 PRODUCTO CARTESIANO, RELACIONES BINARIAS Y FUNCIONES

6.3.1 PRODUCTO CARTESIANO

Dados dos conjuntos A y B no vacíos, se llama producto cartesiano de A por B , al conjunto formado por todos los pares ordenados $(a; b)$ tales que $a \in A$ y $b \in B$

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo:

Sea:

$$A = \{1; 2\}$$

$$B = \{5; 7\}$$

Hallar:

$$A \times B \text{ y } B \times A$$

Resolución:

$$A \times B = \{(1; 5), (1; 7), (2; 5), (2; 7)\}$$

$$B \times A = \{(5; 1), (5; 2), (7; 1), (7; 2)\}$$

Observación:

$A \times B \neq B \times A$, es decir el producto cartesiano no es conmutativo.

PROPIEDADES:

- I. $A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B$
- II. $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$, si los conjuntos A y B son finitos. $n(A), n(B)$: número de elementos de A o B
- III. $A \times B = \emptyset \leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

Los siguientes teoremas establecen que la operación de producto cartesiano distribuye sobre la unión y la intersección.

TEOREMA:

Si A, B y C son conjuntos, entonces:

- I. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- II. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- III. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- IV. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

6.3.2 RELACIONES BINARIAS:

Dados dos conjuntos A y B no vacíos, se denominará relación R de A en B a todo subconjunto del producto cartesiano $A \times B$

Simbólicamente:

$$R \text{ es una relación de } A \text{ en } B \leftrightarrow R \subset A \times B$$

Ejemplo:

Dados los conjuntos $A = \{1; 3; 5\}$ y $B = \{0; 2\}$, cuyo producto cartesiano es: $A \times B = \{(1; 0); (1; 2); (3; 0); (3; 2); (5; 0); (5; 2)\}$
Se tiene:

$$R_1 = \{(1; 0); (1; 2); (3; 2)\}$$

$$R_2 = \{(1; 2); (3; 0); (5; 0); (5; 2)\}$$

$$R_3 = \{(1; 0); (5; 2)\}$$

$$R_4 = \emptyset$$

Son relaciones de A en B .

Nota:

$$R: A \rightarrow B \vee A \xrightarrow{R} B$$

Se lee:

Relación R de A en B .

6.3.3.1 DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

6.3.3.1.1 DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

6.3.3 FUNCIONES

FUNCIONES

Una función es una relación binaria $f: A \rightarrow B$ que asigna a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B .

Es decir: $f = \{(x; y) / y = f(x)\}$

De donde: $y = f(x)$ es regla de correspondencia

" y " es la variable dependiente

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares ordenados de la función.

$$Dom(f) = \{a \in A / b \in B \wedge (a; b) \in f\}$$

Para poder calcular el dominio de una función debemos tener en cuenta las siguientes restricciones:

- I. El denominador debe ser diferente de cero.
- II. El radicando de una raíz de índice par debe ser mayor o igual que cero.

III. En la función Logaritmo: $f(x) = \log_a x$

$$\forall x > 0; a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

6.3.3.1.2 RANGO DE UNA FUNCIÓN

RANGO DE UNA FUNCIÓN

Es el conjunto formado por las segundas componentes de los pares ordenados de la función.

$$\text{Ran}(f) = \{b \in B / a \in A \wedge (a; b) \in f\}$$

Para la determinación del rango de una función, tenemos tres métodos:

- **Analítico:** Se parte del dominio y se construye la función.
- **Algebraico:** Se despeja la variable “ x ” la cual quedará en términos de la variable “ y ”, luego se analiza los valores que puede asumir la variable “ y ”.
- **Gráfico:** Se analiza el comportamiento de la función en el eje “ y ”.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Una pareja de estudiantes en un momento libre se hicieron la siguiente pregunta, ¿Cuántas relaciones de dos elementos tiene la palabra del conjunto “ A ”?

$$A = \{a; m; o\}$$

- A. 10
- B. 9
- C. 8
- D. 7
- E. 6

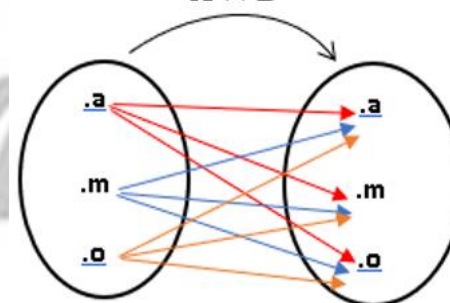
RESOLUCIÓN:

Del conjunto

$$A = \{a; m; o\}$$

Desarrollamos el producto cartesiano “ A^2 ”:

$$A \times B$$



Nos pide encontrar todas las relaciones que tenga dos elementos:

$$R_1 = \{(a; a), (a; m)\}$$

$$R_2 = \{(a; a), (a; o)\}$$

$$R_3 = \{(a; m), (a; o)\}$$

$$R_4 = \{(m; a), (m; m)\}$$

$$R_5 = \{(m; a), (m; o)\}$$

$$R_6 = \{(m; m), (m; o)\}$$

$$R_7 = \{(o; a), (o; m)\}$$

$$R_8 = \{(o; a); (o; o)\}$$

$$R_9 = \{(o; m); (o; o)\}$$

El conjunto "A" tiene 9 relaciones de 2 elementos.

RPTA: B

2. María le pregunta a su papá, a los cuantos años ingresará mi hermanito a la primaria. "Debes hallar la suma de los elementos del dominio de la relación en A":

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times A / x + y \leq 4\} \text{ y hallaras su edad.}$$

¿A los cuántos años estará en primaria?

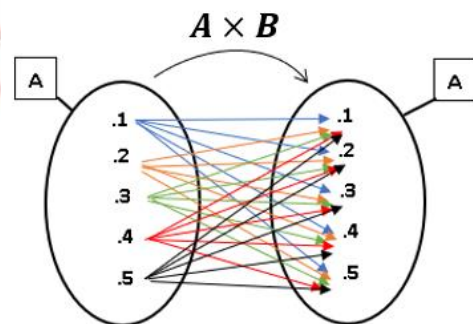
- A. 8 años
- B. 6 años
- C. 10 años
- D. 5 años
- E. 12 años

RESOLUCIÓN:

Del conjunto:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Desarrollamos el producto cartesiano " $A \times A$ ":



$$A^2 = \left\{ \begin{array}{l} (1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 2); \\ (2; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); \\ (3; 5); (4; 1); (4; 2); (4; 3); (4; 4); (4; 5); (5; 1); \\ (5; 2); (5; 3); (5; 4); (5; 5) \end{array} \right\}$$

Obtenemos la relación R_1 :

$$R_1 = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (3; 1)\}$$

Nos pide hallar la suma de los elementos del dominio:

$$Dom(R_1) = \{1; 2; 3\}$$

Por lo tanto:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

El hermanito de María ingresará a los 6 años.

RPTA: B

3. Dados los conjuntos $A = \{-2; 1; 0\}$ y $B = \{-1; 0; 2\}$. Hallar el producto de los números enteros diferentes de cero de la relación $R_1 = \{(x; y) \in B \times A / x^2 - 2y \geq 3\}$, de su dominio y rango:

- A. 1
- B. -2
- C. 2
- D. -1
- E. 4

RESOLUCIÓN:

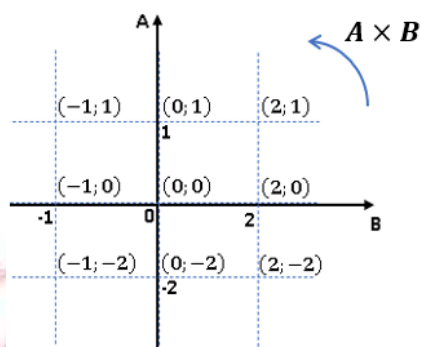
De los conjuntos

$$A = \{-2; 0; 1\} \wedge B = \{-1; 0; 2\}$$

Se tiene:

$$R_1 = \{(x; y) \in B \times A / x^2 - 2y \geq 3\}$$

Desarrollamos el producto cartesiano $B \times A$:



$$B \times A = \left\{ \begin{array}{l} (-1; -2); (-1; 0); (-1; 1); (0; -2); (0; 0); \\ (0; 1); (2; -2); (2; 0); (2; 1) \end{array} \right\}$$

Los pares ordenados que cumple la relación cuya desigualdad " $x^2 - 2y \geq 3$ " son:

$$R_1 = \{(-1; -2); (0; -2); (2; -2); (2; 0)\}$$

Dominio:

$$Dom(R_1) = \{-1; 0; 2\}$$

Rango:

$$Ran(R_1) = \{-2; 0\}$$

El producto de valores es:

$$(-1)(-2)(2) = 4$$

Por lo tanto, el producto de los números enteros diferentes de cero es 4

RPTA: E

4. Determinar el valor de "x" e "y" de tal manera que se cumpla:

$$(5x + 2y; -4) = (-1; 2x - 4)$$

- A. 0 y $\frac{1}{2}$
- B. 5 y 1
- C. 0 y $-\frac{1}{2}$
- D. 0 y 2

E. 0 y $\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN:

Por definición de función tenemos:

$$(5x + 2y; -4) = (-1; 2x - 4)$$

$$5x + 2y = -1 \dots\dots (*)$$

$$-4 = 2x - 4 \dots\dots (**)$$

Desarrollando (**) tenemos:

$$2x - 4 = -4$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Reemplazando $x = 0$ en (*) tenemos:

$$5x + 2y = -1$$

$$0 + 2y = -1$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ Los valores son: $x = 0$ e $y = -\frac{1}{2}$.

RPTA: C

5. Sea la función:

$$f(x) = ax^2 + b, \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

Los pares ordenados $(0; 3)$; $(2; 2)$ y $(3; r)$ son puntos de la función, Calcular el valor de "r"

- A. 2
- B. 3
- C. $\frac{3}{4}$
- D. $-\frac{1}{2}$
- E. -2

RESOLUCIÓN:

A partir de la función:

$$f(x) = ax^2 + b$$

Remplazando los puntos para encontrar "a" y "b" tenemos:

Con (0; 3)

$$\begin{aligned} 3 &= a(0)^2 + b \\ b &= 3 \end{aligned}$$

Con (2; 2)

$$\begin{aligned} 2 &= a(2)^2 + 3 \\ a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Con (3; r)

$$\begin{aligned} r &= -\frac{1}{4}(3)^2 + 3 \\ r &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de: $r = \frac{3}{4}$

RPTA: C

6. Si: $A \subset U$, $B \subset U$

$$U = \{x/x \in \mathbb{N}, 0 < x < 20\}$$

$$A = \{2x/-2 < x < 8\}$$

$$B = \left\{3x/3 < \frac{x+1}{2} < 5\right\}$$

Hallar: $n(A \times B)$.

- A. 12
- B. 25
- C. 36
- D. 46
- E. 60

RESOLUCIÓN:

Dado:

$$U = \{x/x \in \mathbb{N}, 0 < x < 20\}$$

$$U = \{1; 2; 3; \dots; 19\}$$

$$\text{Piden: } n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Obtención de $n(A)$:

Dato:

$$-2 < x < 8$$

$$-4 < 2x < 16$$

$$A \subset U$$

$$A = \{1; 2; 3; \dots; 15\}$$

$$n(A) = 15$$

Obtención de $n(B)$:

$$3 < \frac{x+1}{2} < 5$$

$$6 < x+1 < 10$$

$$5 < x < 9$$

$$15 < 3x < 27$$

$$B = \{16; 17; 18; 19\}$$

$$n(B) = 4$$

Piden:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

$$n(A \times B) = (15)(4) = 60$$

RPTA: C

7. Sea el conjunto $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, se definen las funciones:

$$f = \{(2; 4), (1; 5), (3; m), (2; s), (4; 3), (5; b)\}$$

$$g = \{(x; y) \in A \times A / y = mx + b\}$$

Se cumple: $f(2) = g(1) \wedge f(1) = g(2)$.

Determinar la suma de los elementos del rango de g .

- A. 7
- B. 10

- C. 8
D. 30
E. 2

Pide la suma de los elementos del rango de g .

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$$

RPTA: D

RESOLUCIÓN:

Datos:

$$f = \{(2; 4), (1; 5), (3; m), (2; s), (4; 3), (5; b)\}$$

$$g = \{(x; y) \in A \times A / y = mx + b\}$$

Se cumple:

$$f(2) = g(1)$$

$$4 = m(1) + b$$

$$4 = m + b$$

Se cumple:

$$f(1) = g(2)$$

$$5 = 2m + b$$

Hallamos "m" y "b" con sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} m + b = 4 \\ 2m + b = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -m - b = -4 \\ 2m + b = 5 \end{cases}$$

$$m = 1 \text{ y } b = 3$$

Reemplazamos:

$$g(x) = mx + b$$

$$g(x) = x + 3$$

Por dato:

$$Dom(g) = A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Calculamos el rango:

$$g(1) = 1 + 3 = 4$$

$$g(2) = 2 + 3 = 5$$

$$g(3) = 3 + 3 = 6$$

$$g(4) = 4 + 3 = 7$$

$$g(5) = 5 + 3 = 8$$

$$\therefore Ran(g) = \{4; 5; 6; 7; 8\}$$

8. Si:

$$g(x) = \sqrt{x}, \text{ donde } Dom(g) \subset U \text{ y } Ran(g) \subset \mathbb{Z}$$

$$U = \{-4; -9; -1; 0; 1; 2; 4; 9; 10; 16\}$$

Calcular la suma de los elementos del rango.

- A. 11
B. 10
C. 13
D. 14
E. 15

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$g(x) = \sqrt{x}$$

Por restricción del dominio: $x \geq 0$

Por dato:

$$Dom(g) \subset U$$

$$Ran(g) \subset \mathbb{Z}$$

$$U = \{-4; -9; -1; 0; 1; 2; 4; 9; 10; 16\}$$

Según regla de correspondencia

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$g(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$g(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$g(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$g(9) = \sqrt{9} = 3$$

$$g(16) = \sqrt{16} = 4$$

$$\therefore g = \{(0; 0)(1; 1)(4; 2)(9; 3)(16; 4)\}$$

Por lo tanto:

$$\therefore \text{Dom}(g) = \{0; 1; 4; 9; 16\}$$

$$\text{Ran}(g) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Piden suma elementos del rango:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

RPTA: B

6.4 FUNCIÓN CONSTANTE E IDENTIDAD

FUNCIÓN CONSTANTE

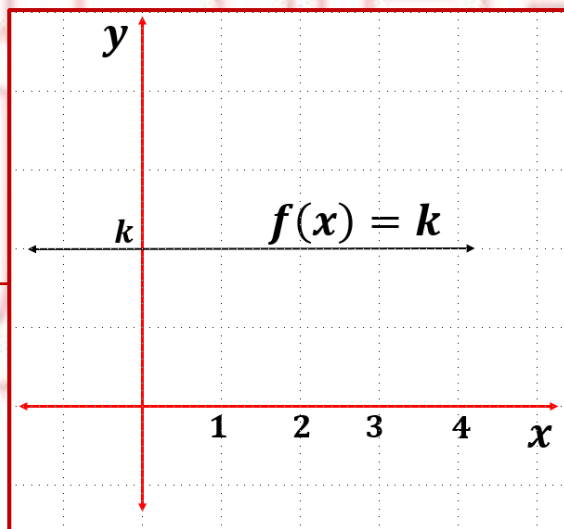
Una función es constante si su regla de correspondencia es $f(x) = k$

donde " k " es una constante, es decir:

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = k\}$$

Su dominio es $\mathbb{R}$

El Rango es $\{k\}$



FUNCIÓN IDENTIDAD

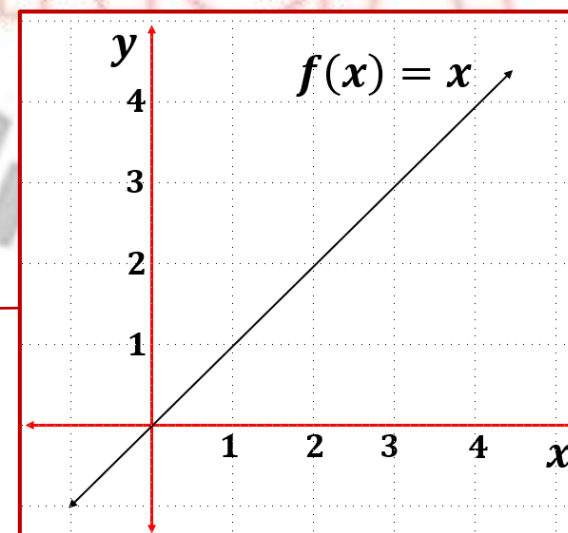
Se llama función identidad a la función que hace corresponder a cada número real el propio número. Se representa por $f(x) = x$.

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x\}$$

Su dominio es $\mathbb{R}$

El Rango es $\mathbb{R}$

Es una función impar (simétrica con relación al origen de coordenadas).



PROBLEMAS Y EJERCICIOS PROPUESTOS:

$$\therefore A = 8u^2$$

RPTA: C

1. Calcular el área de la región formada por las funciones $f(x) = 4 \wedge g(x) = x$ y el eje de ordenadas.

- A. $5u^2$
- B. $10u^2$
- C. $8u^2$
- D. $6u^2$
- E. $12u^2$

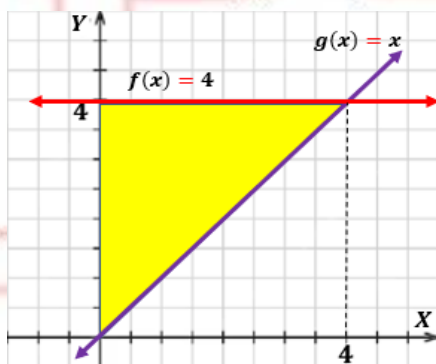
RESOLUCIÓN:

Hallamos la intersección de las funciones f y g :

$$x = 4 \rightarrow g(4) = 4$$

El punto de intersección es: $(4; 4)$

Graficando las funciones y obtenemos:



Al graficar obtenemos un triángulo rectángulo

La base: $b = 4$

La altura: $h = 4$

El área del triángulo rectángulo es:

$$A = \frac{(4)(4)}{2}$$

2. Calcular el área de la región formada por las funciones: $f(x) = -6 \wedge g(x) = x$, y el eje de ordenadas.

- A. $15u^2$
- B. $17u^2$
- C. $18u^2$
- D. $10u^2$
- E. $8u^2$

RESOLUCIÓN:

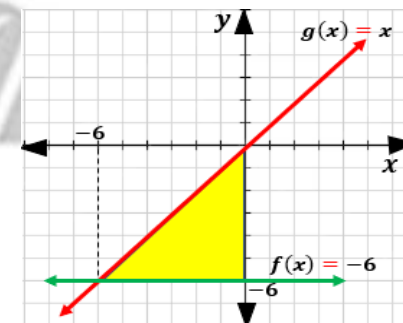
Hallamos la intersección de f y g :

$$g(x) = f(x)$$

$$x = -6 \rightarrow g(-6) = -6$$

El punto de intersección es: $(-6; -6)$

Graficando las funciones y obtenemos:



Al graficar obtenemos un triángulo rectángulo:

La base: $b = 6$

Altura: $h = 6$

El área del triángulo rectángulo es:

$$A = \frac{(6)(6)}{2}$$

$$\therefore A = 18 u^2$$

RPTA: C

3. Carla ha juntado todas sus propinas para comprarle un regalo a su sobrina por navidad, dicho monto está dado por " $4a + 5b$ " soles. Si " a " y " b " se obtienen de la función identidad:

$$f(x) = bx + a(1 - x) - 2x - 3$$

¿Cuánto fue el monto que logró juntar Carla?

- A. 50 soles
- B. 40 soles
- C. 42 soles
- D. 60 soles
- E. 30 soles

RESOLUCIÓN:

Del ejercicio:

$$f(x) = bx + a(1 - x) - 2x - 3$$

$$f(x) = bx + a - ax - 2x - 3$$

$$f(x) = (b - a - 2)x + a - 3$$

Comparando con la función identidad:

$$f(x) = x$$

$$a - 3 = 0 \quad b - a - 2 = 1$$

$$a = 3 \quad b - a = 3$$

$$b - 3 = 3$$

$$b = 6$$

Reemplazamos en: $4a + 5b$

$$4(3) + 5(6) = 42$$

Por lo tanto, el monto que logró juntar Carla es de 42 soles

RPTA: C

4. Carlos compró " $a + b + c + d$ " artículos a 10 soles cada uno, donde a, b, c y d se encuentran en el dominio de la función constante:

$$F = \{(mn; m - n), (m; 2), (m + n; n), (3m; m - 2)\}$$

¿Cuánto gastó Carlos?

- A. 300 soles
- B. 120 soles
- C. 200 soles
- D. 350 soles
- E. 150 soles

RESOLUCIÓN:

Como " F " es función constante entonces igualamos las segundas componentes:

$$m - n = 2 = n = m - 2$$

Igualando obtenemos:

$$n = 2$$

$$m - 2 = 2$$

$$m = 4$$

Reemplazamos en:

$$F = \{(mn; m - n), (m; 2), (m + n; n), (3m; m - 2)\}$$

$$F = \{(8; 2), (4; 2), (6; 2), (12; 2)\}$$

$$Dom(F) = \{4; 6; 8; 12\}$$

Entonces: $a = 4, b = 6, c = 8$ y $d = 12$

La cantidad de artículos que compró Carlos es:

$$a + b + c + d$$

$$4 + 6 + 8 + 12 = 30$$

El gastó por los 30 artículos es:

$$30(10) = 300 \text{ soles}$$

Por lo tanto, Carlos gastó por los 30 artículos 300 soles

RPTA: A

5. A una reunión asistieron " b " hombres y " a " mujeres, en un momento dado todas las mujeres bailan. Si los valores de " a " y " b " se obtienen de la función identidad:

$$f(x) = (x + a)(x - 1) - (x + 2)^2 + b$$

¿Cuántos hombres no bailan?

- A. 3
- B. 6
- C. 5
- D. 4
- E. 2

RESOLUCIÓN:

Del ejercicio:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + a)(x - 1) - (x + 2)^2 + b \\ f(x) &= x^2 - x + ax - a - (x^2 + 4x + 4) + b \\ f(x) &= x^2 - x + ax - a - x^2 - 4x - 4 + b \\ f(x) &= ax - 5x + b - a - 4 \\ f(x) &= (a - 5)x + b - a - 4 \end{aligned}$$

Comparando la función identidad:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ a - 5 &= 1 & b - a - 4 &= 0 \\ a &= 6 & b - 6 - 4 &= 0 \\ & & b &= 10 \end{aligned}$$

Luego: Hombres: 10

Mujeres: 6

Como todas las mujeres bailan

Mujeres bailando = 6

Hombres que bailan = # mujeres bailando

Hombres que bailan = 6

Los hombres que no bailan son:

$$10 - 6 = 4$$

Por lo tanto, 4 hombres no bailan

RPTA: D

6. Un médico observa que la cantidad de pacientes que vienen a su consultorio en un día, está dada por: $f(n - 1) + 4f(n^2 + 1)$. Si " f " es una función constante y se cumple que:

$$f(2n + 1) + f(2n) = 5f(8n) - 18$$

¿Cuántos pacientes por día vinieron a su consultorio?

- A. 20
- B. 48
- C. 30
- D. 15
- E. 40

RESOLUCIÓN:

La regla de correspondencia de función constante es: $f(x) = k$

$$f(2n + 1) = k$$

$$f(2n) = k$$

$$f(8n) = k$$

Reemplazando en:

$$f(2n + 1) + f(2n) = 5f(8n) - 18$$

$$k + k = 5k - 18$$

$$18 = 3k$$

$$k = 6$$

La regla de correspondencia de función constante es: $f(x) = 6$

Nos piden:

$$f(n - 1) + 4f(n^2 + 1)$$

$$6 + 4(6)$$

$$30$$

Por lo tanto, 30 pacientes vinieron al consultorio

RPTA: C

7. En la empresa “TISUR” se observó que las ganancias no aumentaban, ni disminuían en varios años, se logró modelar matemáticamente según la función $g(x)$ que representa la ganancia de cada año en millones de soles; representada por la siguiente igualdad:

$$\frac{g(2019) + 3g(2020)}{g(2021) - 3} = 8$$

Determinar la ganancia en los 3 años consecutivos que no varió.

- A. 20
- B. 17
- C. 18
- D. 10
- E. 12

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado al no haber ganancias, ni pérdidas la función es constante:

$$\begin{aligned} \frac{g(2019) + 3g(2020)}{g(2021) - 3} &= 8 \\ \frac{C + 3C}{C - 3} &= 8 \\ 4C &= 8(C - 3) \\ 4C &= 8C - 24 \\ 6 &= C \end{aligned}$$

Nos piden calcular $g(2019) + g(2020) + g(2021)$

$$6 + 6 + 6 = 18$$

Por lo tanto, la ganancia de los 3 años es 18 millones de soles

RPTA: C

8. Bitel ofrece a sus clientes el servicio de internet ilimitado, por un pago mensual de 35 soles. Si la situación planteada está representada por la siguiente función constante:

$$f(x) = b(1 + x) + a(1 - x) - 2x + 3$$

Calcular: $b^2 - a^2$.

- A. 100
- B. 144
- C. 64
- D. 80
- E. 34

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$\begin{aligned} f(x) &= b(1 + x) + a(1 - x) - 2x + 3 \\ f(x) &= b + bx + a - ax - 2x + 3 \\ f(x) &= (b - a - 2)x + b + a + 3 \end{aligned}$$

Según el enunciado la función es constante:

$$\begin{aligned} f(x) &= k \\ f(x) &= 35 \end{aligned}$$

Comparando:

$$\begin{aligned} b - a - 2 &= 0 \rightarrow b - a = 2 \\ b + a + 3 &= 35 \rightarrow b + a = 32 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} b - a &= 2 \\ b + a &= 32 \\ 2b &= 34 \\ b &= 17 \quad y \quad a = 15 \end{aligned}$$

Nos piden:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= 17^2 - 15^2 \\ b^2 - a^2 &= (17 - 15)(17 + 15) \\ b^2 - a^2 &= (2)(32) = 64 \end{aligned}$$

RPTA: C

6.5 FUNCIONES ESPECIALES

6.5.2 FUNCIÓN AFÍN

6.5.1 FUNCIÓN LINEAL

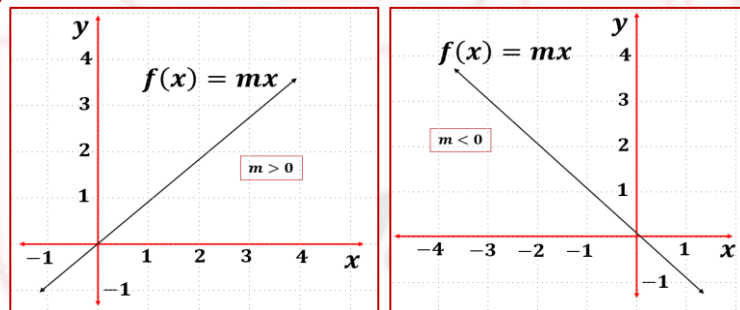
FUNCIÓN LINEAL

Tiene por regla de correspondencia:

$$f(x) = mx$$

donde $m \neq 0$ y m es la pendiente con $(0; 0)$ como punto de corte.

Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R}$ $\wedge$ Rango: $Ran(f) = \mathbb{R}$



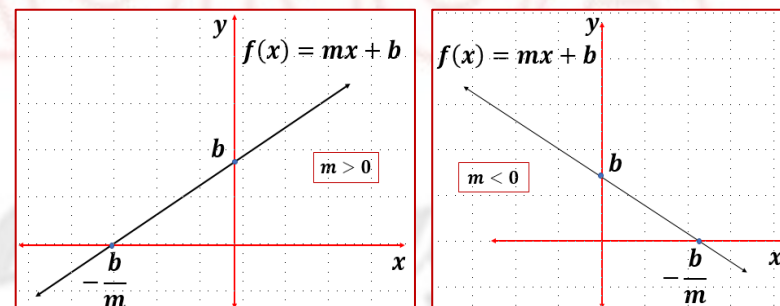
La gráfica de la función f resulta ser una recta oblicua a la derecha si $m > 0$ (creciente); y es oblicua a la izquierda si $m < 0$ (decreciente).

FUNCIÓN LINEAL AFÍN

Tiene por regla de correspondencia:

$$f(x) = mx + b$$

donde $m, b \neq 0$, además m es la pendiente y b es la ordenada al origen y representa la distancia desde el punto donde la gráfica corta el eje "y" hasta el origen de coordenadas.



La gráfica de la función f resulta ser una recta oblicua a la derecha si $m > 0$ (creciente); y es oblicua a la izquierda si $m < 0$ (decreciente).

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. La edad de Leonardo es: $\overline{ab}$. Sabiendo que el rango de: $f(x) = 3x - 2$; si $x \in [1; 3]$ es: $[a; b]$

Determinar la edad de Leonardo.

- A. 15 años
- B. 18 años
- C. 19 años
- D. 20 años
- E. 17 años

RESOLUCIÓN:

A partir de:

$$f(x) = 3x - 2$$

El dominio: $[1; 3]$

Hallamos el rango a partir del dominio:

$$1 \leq x \leq 3$$

Multiplicamos por 3:

$$3 \leq 3x \leq 9$$

Restamos por 2:

$$\begin{aligned} 3 - 2 &\leq 3x - 2 \leq 9 - 2 \\ 1 &\leq 3x - 2 \leq 7 \\ 1 &\leq f(x) \leq 7 \end{aligned}$$

El rango de $f(x)$: $[1; 7]$

Comparando:

$$\begin{aligned} [a; b] &= [1; 7] \\ a &= 1 \\ b &= 7 \end{aligned}$$

$\therefore$ La edad de Leonardo es 17 años

RPTA: E

2. Sea $f(x)$ una función lineal, si $f(4) = 10$, y $f(2) = 8$. Calcular $f(6)$.

- A. 2
- B. 4
- C. 6
- D. 12
- E. 10

RESOLUCIÓN:

Por definición:

$$f(x) = mx + b$$

Reemplazando en $f(4)$:

$$\begin{aligned} f(4) &= m(4) + b \\ 10 &= 4m + b \dots (i) \end{aligned}$$

Reemplazando en $f(2)$:

$$\begin{aligned} f(2) &= m(2) + b \\ 8 &= 2m + b \dots (ii) \end{aligned}$$

Por el método de eliminación:

$$\begin{aligned} 10 &= 4m + b \\ -8 &= -2m - b \\ 2 &= 2m \\ m &= 1 \end{aligned}$$

Reemplazando: $8 = 2(1) + b$

$$6 = b$$

Por lo tanto: $f(x) = x + 6$

Entonces: $f(6) = 6 + 6$

$$f(6) = 12$$

RPTA: E

3. Calcular el área de la región formada por las funciones: $f(x) = 3x - 8$; $g(x) = 4 - x$, con la intersección del eje de las ordenadas.

- A. $9 u^2$
 B. $24 u^2$
 C. $36 u^2$
 D. $18 u^2$
 E. $27 u^2$

RESOLUCIÓN:

Ubicamos los puntos de intersección:

$$f(x) = 3x - 8$$

$$g(x) = 4 - x$$

Igualemos:

$$3x - 8 = 4 - x$$

$$3x + x = 4 + 8$$

$$4x = 12$$

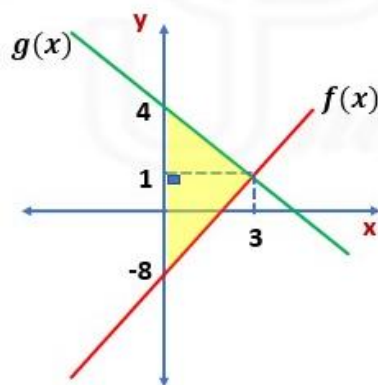
$$x = 3$$

Reemplazando:

$$y = 4 - 3$$

$$y = 1$$

Intersección: entre $f(x) \wedge g(x)$ (3; 1)



La intersección de $f(x)$ con el eje de las ordenadas:

$$y = 3(0) - 8$$

$$y = -8$$

$$g(x) = 4 - 0$$

$$y = 4$$

Hallamos el área:

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$A = \frac{12(3)}{2}$$

$$A = 18$$

∴ El área del triángulo es $18 u^2$.

RPTA: D

4. Una empresa cobra a sus consumidores de energía eléctrica una tarifa base de $s/5$ por mes más $s/0,10$ por cada kilowatt hora. ¿Cuánto se pagará si se consumieron 130 kilowatt en un mes?

- A. $s/18$
 B. $s/25$
 C. $s/15$
 D. $s/12$
 E. $s/28$

RESOLUCIÓN:

La forma de la función lineal:

$$f(x) = ax + b$$

Reemplazando:

$$f(x) = (0,10)x + 5$$

x = Energía consumida

y = Costo mensual

Hallamos el costo de la energía consumida:

$$f(x) = (0,10)(130) + 5$$

$$f(x) = 13 + 5$$

$$f(x) = 18$$

∴ El costo de la energía consumida es S/18

RPTA: D

5. El costo de fabricación de 20 sillas es 600 soles y el costo de producción de 40 sillas es 1000 soles, se sabe que es un modelo de costo lineal, calcular el costo de 50 sillas.

- A. 1 200 soles
- B. 1 400 soles
- C. 1 500 soles
- D. 1 300 soles
- E. 1 100 soles

RESOLUCIÓN:

Del enunciado podemos deducir las coordenadas:

$$(20; 600), (40; 1000)$$

Por definición:

$$f(x) = ax + b$$

Reemplazamos (20; 600)

$$f(20) = a(20) + b$$

$$600 = 20a + b \dots (i)$$

Reemplazamos: (40; 1000)

$$f(40) = a(40) + b$$

$$1000 = 40a + b \dots (ii)$$

Resolvemos (i) y (ii):

$$1000 = 40a + b$$

$$-600 = -20a - b$$

$$400 = 20a$$

$$a = 20$$

Reemplazando "a" en: $600 = 20a + b$

$$600 = 20(20) + b$$

$$600 = 400 + b$$

$$b = 200$$

La función es: $f(x) = 20x + 200$

El costo de 20 sillas: $f(x) = 20(50) + 200$

$$f(x) = 1200 + 200$$

$$f(x) = 1\,200$$

∴ El costo de 50 sillas es 1200 soles

RPTA: A

6. Si la temperatura a nivel del suelo es de 20°C y la temperatura a un kilómetro de altura es de 10°C. ¿Qué temperatura habrá a un kilómetro y medio de altura?

A. 4°C

B. 7°C

C. 8°C

D. 6°C

E. 5°C

RESOLUCIÓN:

Del enunciado podemos deducir las siguientes coordenadas:

$$(0; 20), (1; 10)$$

En la función: $f(x) = mx + b$

$$f(0) = m(0) + b$$

$$20 = b$$

Reemplazando :

$$f(1) = m(1) + b$$

$$10 = m + b$$

$$10 = m + 20$$

$$-10 = m$$

La función es:

$$f(x) = -10x + 20$$

La temperatura a un kilómetro y medio es:

$$f(x) = -10(1,5) + 20$$

$$f(x) = -15 + 20$$

$$f(x) = 5$$

∴ La temperatura a un kilómetro y medio es 5°C.

RPTA: E

7. Francisco le da a su hermanito " $3m - n$ " caramelos. Sabiendo que $f(x - 2) = mx + n$; $f(-1) = 4$; $f(-2) = 2$. ¿Cuántos caramelos le dió Francisco a su hermanito?

- A. 0
- B. 4
- C. 7
- D. 1
- E. 2

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$f(x - 2) = mx + n$$

Hallamos $f(-1)$ reemplazando: $x = 1$, tenemos:

$$f(1 - 2) = m(1) + n$$

$$f(-1) = m + n$$

$$4 = m + n$$

Hallamos $f(-2)$, reemplazando: $x = 0$, tenemos:

$$f(0 - 2) = m(0) + n$$

$$f(-2) = n$$

$$2 = n$$

Reemplazamos: $n = 2$, entonces:

$$4 = m + 2$$

$$2 = m$$

Calculamos: $3m - n$

$$3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

Por lo tanto:

Francisco le da 4 caramelos a su hermanito.

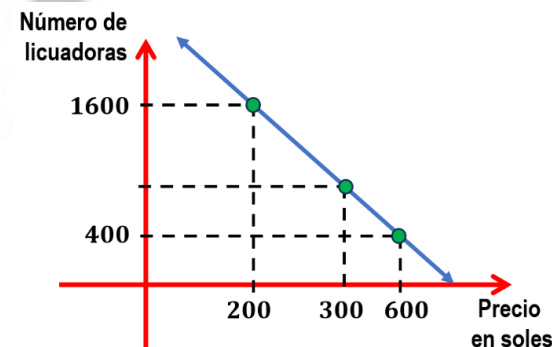
RPTA: B

8. En una tienda de electrodomésticos se vende 400 licuadoras a un precio de 600 soles, debido a la competencia con otras tiendas se decide modificar el precio a 200 soles, por lo cual vendió 1600 licuadoras. Asumiendo que la función de la demanda es lineal. Hallar la demanda cuando el precio es de 300 soles.

- A. 1200
- B. 1300
- C. 1400
- D. 1500
- E. 1600

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, bosquejamos:



Si la demanda es lineal, entonces:

$$f(x) = ax + b$$

Reemplazamos los puntos:

Para (200; 1600)

$$f(200) = a(200) + b = 1600$$

$$b = 1600 - 200a \dots (i)$$

Para (600; 400)

$$f(600) = a(600) + b = 400$$

$$b = 400 - 600a \dots (ii)$$

Igualemos (i) y (ii)

$$1600 - 200a = 400 - 600a$$

$$400a = -1200$$

$$a = -3$$

$$\rightarrow b = 2200$$

Entonces: $f(x) = -3x + 2200$

Luego hallamos $f(300)$:

$$\begin{aligned} f(300) &= -3(300) + 2200 \\ &= 1300 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

La demanda cuando el precio es de 300 soles, es de 1300 licuadoras.

RPTA: B

6.6 FUNCIÓN CUADRÁTICA

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Tiene por regla de correspondencia:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

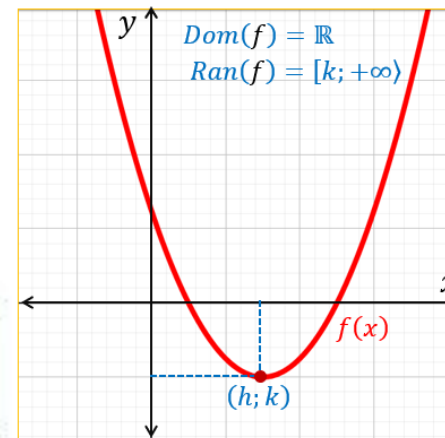
donde $a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$. La gráfica de la función cuadrática es una parábola que corta al eje "y" en la coordenada $(0; c)$. Tiene como vértice el punto $(h; k)$, tal que:

$$V(h; k) = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) \text{ o } \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

Forma Ordinaria: $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Cuando $a > 0$

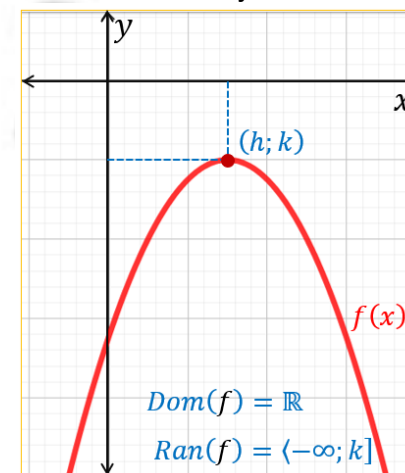
La parábola se abre hacia arriba.



De ahí, se tiene un valor mínimo en k .

Cuando $a < 0$

La parábola se abre hacia abajo.



De ahí, se tiene un valor máximo en k .

6.6.1 ESTRATEGIAS PARA HALLAR EL VÉRTICE DE UNA PARÁBOLA

EJEMPLO: Hallar el vértice de la función:

$$y = -x^2 - 6x + 4$$

Aplicando la Fórmula:

$$V = (h; k) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$$

$$f(x) = y = -x^2 - 6x + 4$$

$$h = \frac{-(-6)}{2(-1)}$$

$$h = -3$$

$$k = f(-3)$$

$$k = -(-3)^2 - 6(-3) + 4$$

$$k = 13$$

$$V = (h; k) = (-3; 13)$$

Convirtiendo a la forma ordinaria (completación de cuadrados):

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

$$f(x) = y = -x^2 - 6x + 4$$

$$f(x) = -(x^2 + 6x) + 4$$

$$f(x) = -(x^2 + 6x + 9 - 9) + 4$$

$$f(x) = -(x^2 + 6x + 9) + 9 + 4$$

$$f(x) = -(x + 3)^2 + 13$$

$$V = (h; k) = (-3; 13)$$

Aplicando derivadas:

$$f(x) = y = -x^2 - 6x + 4$$

Derivamos:

$$f(x) = y = -x^2 - 6x^1 + 4x^0 \dots (I)$$

$$y' = -(2)x^{2-1} - (1)6x^{1-1} + 0(4)$$

Luego:

$$y' = -(2)x^1 - (1)6x^0 + 0(4)$$

$$-2x - 6 = 0$$

$$x = -3$$

$$\rightarrow k = -3$$

Hallamos $f(-2)$ en (I):

$$k = f(-3)$$

$$k = -(-3)^2 - 6(-3) + 4$$

$$k = 13$$

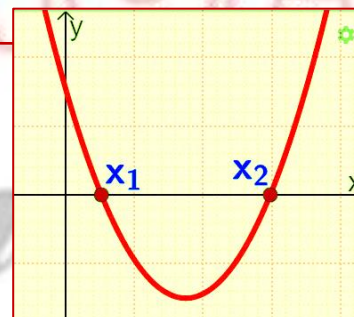
$$V = (h; k) = (-3; 13)$$

6.6.2 ANÁLISIS DE LA DISCRIMINANTE

Se tiene la ecuación: $f(x) = ax^2 + bx + c$ **La discriminante:**

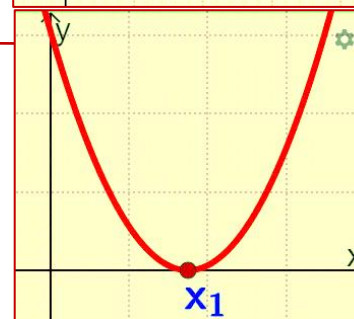
$$\Delta > 0$$

La parábola
corta al eje
"x" en dos
puntos.



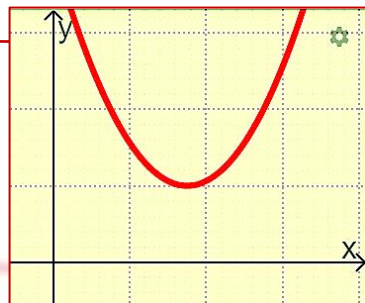
$$\Delta = 0$$

La parábola
corta al eje
"x" en un
punto.



$$\Delta < 0$$

La parábola
no corta al
eje "x".



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Indicar el mayor valor del rango de la función cuadrática:

$$f(x) = -3x^2 + 5x - 4$$

- A. $-\frac{23}{12}$
- B. $-\frac{25}{12}$
- C. $-\frac{23}{6}$
- D. $\frac{23}{12}$
- E. $\frac{23}{6}$

RESOLUCIÓN:

En la función:

$$f(x) = -3x^2 + 5x - 4$$

Determinamos el vértice con la fórmula:

$$V(h; k) = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Donde:

$$a = -3; \quad b = 5; \quad c = -4$$

Reemplazando:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2(-3)} = \frac{5}{6}$$

$$k = f(h) = f\left(\frac{5}{6}\right)$$

Luego:

$$f\left(\frac{5}{6}\right) = -3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{6}\right) - 4$$

$$f\left(\frac{5}{6}\right) = -3\left(\frac{25}{36}\right) + \frac{25}{6} - 4$$

$$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{-25 + 50 - 48}{12} = \frac{-23}{12}$$

$$\therefore V = \left(\frac{5}{6}; \frac{-23}{12}\right)$$

Como: $a = -3 < 0$, es cóncava hacia abajo, posee un máximo.

$$\therefore \text{Ran}(f) = \left]-\infty; \frac{-23}{12}\right]$$

Por lo tanto, el mayor valor del rango es $\frac{-23}{12}$.

RPTA: A

2. Determinar la intersección de los rangos de las funciones cuadráticas:

$$f(x) = -3(x - 1)^2 + 6$$

$$g(x) = 2(x - 1)^2 - 3$$

- A. $[3; 6[$
- B. $[-3; 6]$
- C. $[3; -6[$
- D. $[3; 6]$
- E. $[3; -6]$

RESOLUCIÓN:

Reconocemos que ambas funciones tienen la forma ordinaria:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

En la función:

$$f(x) = -3(x - 1)^2 + 6$$

Determinamos el vértice:

Donde:

$$h = 1 ; k = 6$$

$$\therefore V(h; k) = (1; 6)$$

El factor de forma es: $a = -3$

Como " $a < 0$ ", es cóncava hacia abajo y posee un máximo.

El rango será:

$$Ran(f) =]-\infty; k]$$

Reemplazando:

$$\therefore Ran(f) =]-\infty; 6]$$

En la función:

$$g(x) = 2(x - 1)^2 - 3$$

Determinamos el vértice:

Donde:

$$h = 1 ; k = -3$$

$$\therefore V = (h; k) = (1; -3)$$

El factor de forma es: $a = 2$

Como " $a > 0$ ", es cóncava hacia arriba y posee un mínimo.

El rango será:

$$Ran(g) = [k; +\infty[$$

Reemplazando:

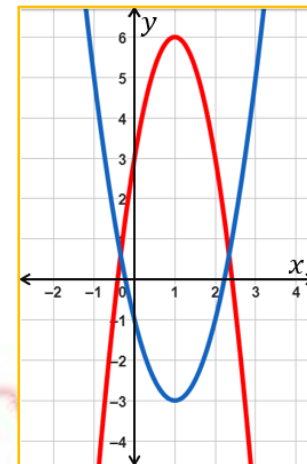
$$\therefore Ran(g) = [-3; +\infty[$$

No pide:

$$Ran(f) \cap Ran(g) =]-\infty; 6] \cap [-3; +\infty[$$

$$Ran(f) \cap Ran(g) = [-3; 6]$$

Graficando:



RPTA: B

3. La función cuadrática $f(x) = x^2 + 3x + 3$ alcanza su valor mínimo en " b " cuando $x = a$. Calcular " $a + b$ ".

- A. $\frac{3}{4}$
- B. $-\frac{3}{4}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{1}{2}$
- E. 1

RESOLUCIÓN:

De la función:

$$f(x) = x^2 + 3x + 3$$

Determinamos el vértice, completando cuadrados:

$$f(x) = x^2 + 3x + 3$$

$$f(x) = x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3$$

$$f(x) = \left[x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3$$

$$f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3$$

$$f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Determinamos el vértice:

$$V(h; k) = \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

El factor de forma es: $a = 1$

Como " $a > 0$ ", es cóncava hacia arriba y posee un mínimo.

El mínimo valor es " k ", cuando " $x = h$ ":

$$k = \frac{3}{4}; \quad x = -\frac{3}{2}$$

Del enunciado, el mínimo valor es " b ", cuando " $x = a$ ":

Por lo tanto:

$$a = \frac{3}{4}; \quad b = -\frac{3}{2}$$

Nos pide calcular:

$$a + b = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}$$

$$\therefore a + b = -\frac{3}{4}$$

RPTA: B

4. Determinar el rango de la función cuadrática: $f(x) = ax^2 + 4$, si $f(4) = -12$.

- A. $[4; +\infty[$
- B. $] -\infty; -4]$
- C. $] -\infty; 4]$
- D. $] -\infty; 0]$
- E. $] -\infty; 0[$

RESOLUCIÓN:

Por dato:

$$f(4) = -12$$

Reemplazando en la función:

$$f(4) = a(4)^2 + 4 = -12$$

$$16a + 4 = -12$$

$$16a = -16$$

$$\therefore a = -1$$

Reemplazamos en la función:

$$f(x) = ax^2 + 4$$

$$f(x) = -x^2 + 4$$

Determinamos el vértice:

$$V(h; k) = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Donde:

$$a = -1; \quad b = 0; \quad c = 4$$

$$h = -\frac{0}{2(-1)} = 0$$

$$k = f(0) = -(0)^2 + 4 = 4$$

$$\therefore V(0; 4)$$

Como $a = -1 < 0$, es cóncava hacia abajo, posee un máximo.

$$\therefore \text{Ran}(f) =]-\infty; 4]$$

RPTA: C

5. La temperatura de una sustancia a la que se le aplicó una reacción química esta modelada por la función $F(t) = 0,25t^2 - 4t + 30$, donde " F " se mide en grados centígrados y " t " es el tiempo en horas. Determinar la variación de la temperatura en las primeras 8 horas. (Examen Ordinario I fase 2024 – Biomédicas)

- A. Disminuyó en 16°C
 B. Aumentó en 14°C
 C. Aumentó en 16°C
 D. Disminuyó en 30°C
 E. Disminuyó en 14°C

RESOLUCIÓN:

Del dato:

$$F(t) = 0,25t^2 - 4t + 30$$

Donde:

$y = F(t)$: temperatura en $^{\circ}\text{C}$.
 t : tiempo en horas.

Para: $t = 0$

$$F(0) = 0,25(0)^2 - 4(0) + 30$$

$$F(0) = 30$$

Para: $t = 8$

$$F(8) = 0,25(8)^2 - 4(8) + 30$$

$$F(8) = 14$$

Por lo tanto, disminuyó en:

$$30 - 14 = 16^{\circ}\text{C}$$

RPTA: A

6. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde una cierta altura, llega a un punto donde alcanza una máxima altura y cae sobre el suelo, su trayectoria es la función: $f(x) = -(x - 3)^2 + 16$, hallar la altura inicial y la distancia desde el punto $(0; 0)$ hasta impactar el suelo.

- A. 7 m y 7 m
 B. 4 m y 7 m

- C. 23 m y 2 m
 D. 5 m y 12 m
 E. 8 m y 8 m

RESOLUCIÓN:

Del dato:

$$f(x) = -(x - 3)^2 + 16$$

Hallando la altura inicial:

Para: $x = 0$

$$f(x) = -(x - 3)^2 + 16$$

$$f(0) = -(0 - 3)^2 + 16$$

$$f(0) = -(-3)^2 + 16$$

$$f(0) = -9 + 16$$

$$f(0) = 7 \text{ m}$$

Entonces, la altura desde donde fue lanzado la piedra es de 7 m.

Cuando la piedra impacta al suelo:

$$f(x) = -(x - 3)^2 + 16$$

$$0 = -(x - 3)^2 + 16$$

$$(x - 3)^2 = 16$$

$$x - 3 = \pm 4$$

$$x = 3 \pm 4$$

$$x_1 = 3 + 4 \quad \checkmark \quad x_2 = 3 - 4$$

$$x_1 = 7 \quad \checkmark \quad x_2 = -1$$

Se descarta " $x_2 = -1$ ", porque la distancia no puede ser negativa

Por lo tanto, la distancia hasta impactar el suelo es de 7m.

RPTA: A

7. En un laboratorio clínico se introdujeron en un tamiz 399 ácaros que comenzaron a reproducirse. Al cabo de cierto tiempo se modificó el medio y el número de ácaros comenzó a disminuir. Sabiendo que

la cantidad de dichos ácaros, al cabo de " t " minutos está dado por la siguiente función: $f(t) = -t^2 + 2t + 399$. Determinar el tiempo en que se extinguió la población de ácaros.

- A. 15 u
- B. 20 u
- C. 21 u
- D. 41 u
- E. 25 u

RESOLUCIÓN:

Del enunciado se deduce:

La población se extingue cuando la cantidad de ácaros es cero.

$$f(t) = 0$$

Reemplazando:

$$f(t) = -t^2 + 2t + 399$$

$$0 = -t^2 + 2t + 399$$

$$0 = (t + 19)(t - 21)$$

$$t + 19 = 0 \quad \checkmark \quad t - 21 = 0$$

$$t_1 = -19 \quad \checkmark \quad t_2 = 21$$

Se descarta " $t_1 = -19$ ", porque el tiempo no puede ser negativa

Por lo tanto, a los 21 minutos se extinguió la población de ácaros.

RPTA: C

8. Una compañía americana fabricante de baterías para vehículos 100% eléctricos, tienen costos semanales de producción expresados por: $C(x) = 3000 - 30x + 0,25x^2$.

Donde " $C(x)$ " es el costo total en dólares y " x " es el número de unidades producidas. Determinar número de baterías producidas cada semana para dar un costo mínimo.

- A. 40 baterías.

- B. 60 baterías.
- C. 11 baterías.
- D. 30 baterías.
- E. 52 baterías.

RESOLUCIÓN:

Sea la función costo semanal de producción:

$$C(x) = 3000 - 30x + 0,25x^2$$

Ordenamos:

$$C(x) = 0,25x^2 - 30x + 3000$$

En el vértice se la cantidad de baterías para que el costo mínimo.

Calculamos el vértice, con la fórmula:

$$V = (h; k) = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$$

Reconocemos:

$$a = 0,25; \quad b = -30; \quad c = 3000$$

Reemplazando:

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-30)}{2(0,25)}$$

$$h = 60$$

Calculamos " k ":

$$k = C(h)$$

$$k = 3000 - 30(60) + 0,25(60)^2$$

$$k = 3000 - 1800 + 0,25(3600)$$

$$k = 3000 - 1800 + 900$$

$$k = 2100$$

Entonces:

$$V = (h; k) = (60; 2100)$$

Por lo tanto, se deben fabricar 60 baterías para su costo sea mínimo.

RPTA: B

6.7 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO Y FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

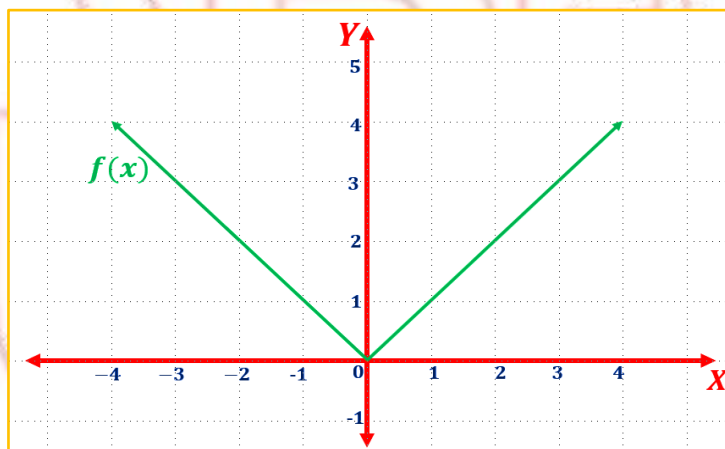
6.7.1 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La función valor absoluto $f(x) = |x|$, cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Su gráfica es una función a trozos dada por dos funciones lineales tal que:



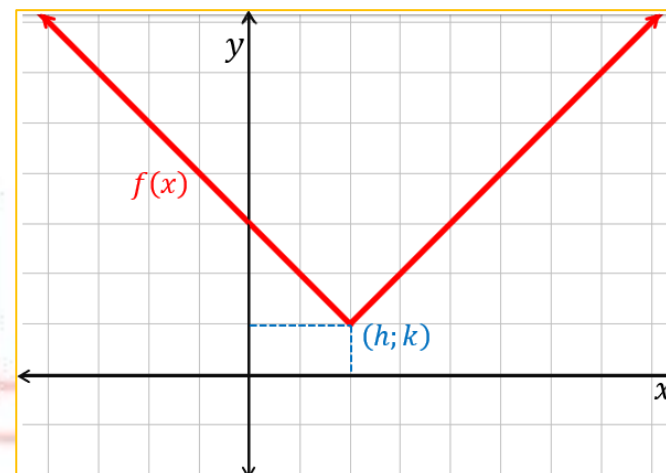
$$\text{Dom}(f): x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}(f): y \in [0; +\infty)$$

Cuando la gráfica se traslada a la forma:

$$f(x) = a|x - h| + k; a \neq 0$$

$(h; k)$ es el vértice o inicio de la gráfica
 “ a ” indica la extensión y dirección de la gráfica.



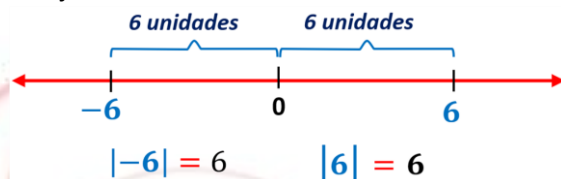
$$\text{Dom}(f): x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}(f): y \in [k; +\infty)$$

RECUERDA QUE



El valor absoluto de un número, nos indica que tan lejos está el número del cero.



Transformaciones de la función valor absoluto:

Desplazamiento Vertical

$y = f(x) + c$ La gráfica sube “c” unidades

$y = f(x) - c$ La gráfica baja “c” unidades

Desplazamiento Horizontal

$y = f(x + c)$ La gráfica se mueve a la izquierda “c” unidades

$y = f(x - c)$ La gráfica se mueve a la derecha “c” unidades

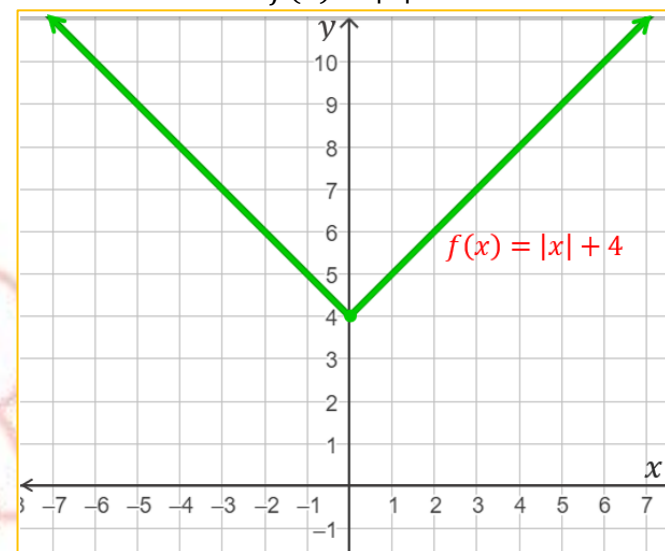
Reflexiones

Horizontal (eje “x”) Vertical (eje “y”)

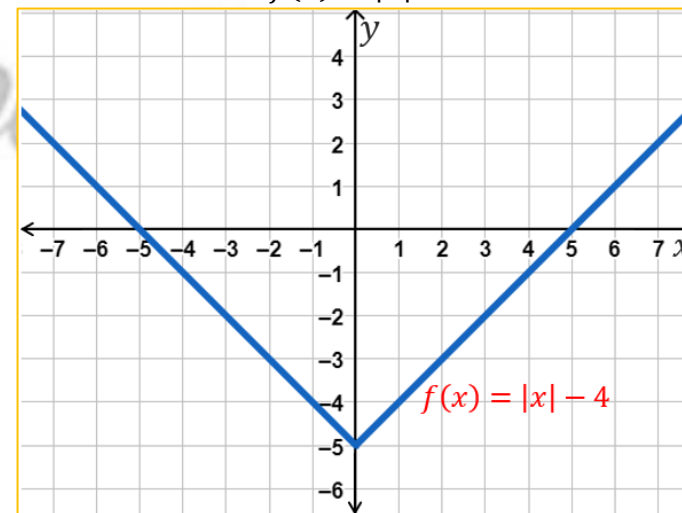
$y = -f(x)$ $y = f(-x)$

Ejemplos

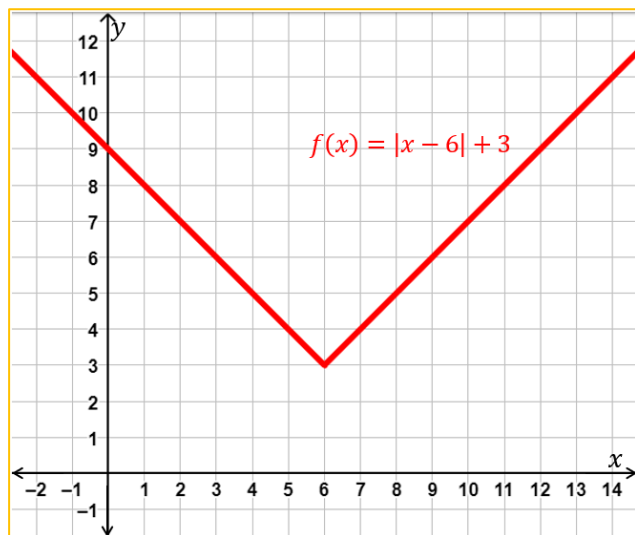
1. Graficar la función: $f(x) = |x| + 4$



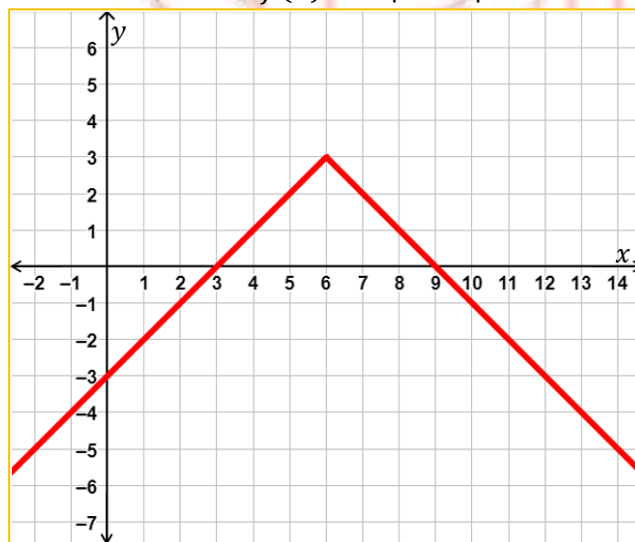
2. Graficar la función: $f(x) = |x| - 5$



3. Graficar la función: $f(x) = |x - 6| + 3$

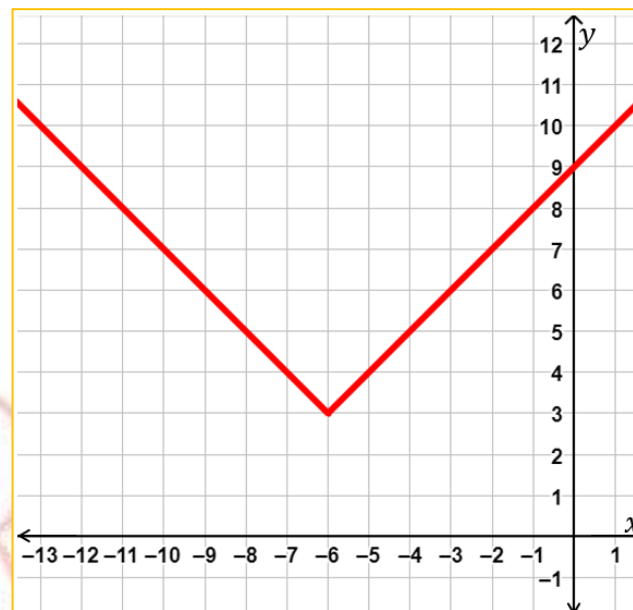


4. Graficar la función: $f(x) = -|x - 6| + 3$

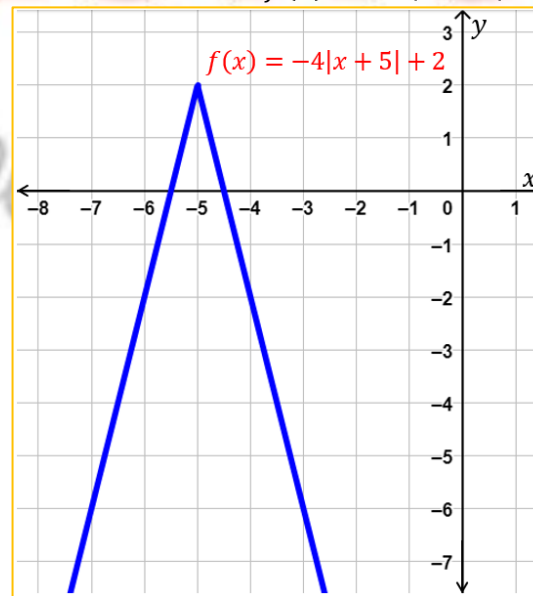


5.

6. Graficar la función: $f(x) = |-x - 6| + 3 = |x + 6| + 3$



7. Graficar la función: $f(x) = -4|x + 5| + 2$



Para resolver situaciones y ejercicios con la función valor absoluto es necesario considerar a las ecuaciones con valor absoluto, las cuales se tratarán a continuación:

6.7.1.1 ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Son aquellas ecuaciones en donde la incógnita se encuentra afectada por el valor absoluto. (UNI, 2020)

Propiedades:

- $|x| \geq 0$
- $|-x| = |x|$
- $|x|^2 = |x^2| = x^2$
- $|xy| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

TEOREMA 01

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a; a \geq 0$$

TEOREMA 02

$$|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

EJEMPLOS:

1. Si α es la solución de la ecuación $|2x - 4| = 3x$. ¿Cuál es el valor que toma α^2 ?

- A. $\frac{1}{4}$
- B. $\frac{3}{5}$
- C. $\frac{16}{25}$

- D. $\frac{1}{2}$
- E. 1

RESOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} |2x - 4| &= 3x \\ 3x &\geq 0 \rightarrow x \geq 0 \\ 2x - 4 &= 3x \quad \vee \quad 2x - 4 = -3x \\ x &= -4 \quad \vee \quad x = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Luego, sólo cumple:

$$\alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \alpha^2 = \frac{16}{25}$$

RPTA: C

2. Resuelva la ecuación: $x^2 - 8|x| + 12 = 0$

- A. $CS = \{2; 6; -6\}$
- B. $CS = \{-2; -6; 2; 6\}$
- C. $CS = \{3; 4\}$
- D. $CS = \{-1; -2; 1; 2\}$
- E. $CS = \{1; 2; 3; 4\}$

RESOLUCIÓN:

Recuerda que: $x^2 = |x|^2$

$$|x|^2 - 8|x| + 12 = 0$$

Por aspa simple, tenemos:

$$(|x| - 2)(|x| - 6) = 0$$

$$|x| = 2 \quad \vee \quad |x| = 6$$

$$x = -2; 2 \quad \vee \quad x = -6; 6$$

$$\therefore CS = \{-2; -6; 2; 6\}$$

RPTA: B

3. Resolver: $|2x + 3| = |x - 12|$

- A. $CS = \{-2; 4\}$

- B. $CS = \{-3; 4\}$
 C. $CS = \{-15; -4\}$
 D. $CS = \{-15; 3\}$
 E. $CS = \{1; 3; 4\}$

RESOLUCIÓN:

Tenemos:

$$|2x + 3| = |x - 12|$$

$$\begin{array}{ll} 2x + 3 = x - 12 & \vee \quad 2x + 3 = -(x - 12) \\ 2x - x = -12 - 3 & \vee \quad 2x + x = 12 - 3 \\ x = -15 & \vee \quad x = 3 \\ CS = \{-15; 3\} \end{array}$$

RPTA: D

MÉTODO POR ZONAS:

4. Resolver: $|x| + |x - 3| = 5$

- A. $CS = \{-1; 4\}$
 B. $CS = \{3; 4\}$
 C. $CS = \{3; -4\}$
 D. $CS = \{-1; -2\}$
 E. $CS = \{2; 3; 4\}$

RESOLUCIÓN:

Analizando zonas, tenemos:

	$ x $	$ x - 3 $	$ x + x - 3 $
$x \leq 0$	$-x$	$-x + 3$	$2x + 3$
$0 \leq x \leq 3$	x	$-x + 3$	3
$3 \leq x$	x	$x - 3$	$2x - 3$

Luego:

$$|x| + |x - 3| = \begin{cases} -2x + 3 & ; x \leq 0 \\ 3 & ; 0 \leq x \leq 3 \\ 2x - 3 & ; 3 \leq x \end{cases}$$

$$\text{Luego: } |x| + |x - 3| = 5$$

$$\text{Si: } x \leq 0 \rightarrow -2x + 3 = 5 \rightarrow x = -1$$

$$\text{Si: } 0 \leq x \leq 3 \rightarrow 3 \neq 5 \rightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{Si: } 3 \leq x \rightarrow 2x - 3 = 5 \rightarrow x = 4$$

Entonces:

$$CS = \{-1; 4\}$$

RPTA: A

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Hallar el dominio y rango de la siguiente función:

$$f(x) = |x + 2|$$

- A. $Dom(f) = [0; +\infty)$; $Ran(f) = [-1; +\infty)$
 B. $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Ran(f) = [0; +\infty)$
 C. $Dom(f) = [-\infty; 0)$; $Ran(f) = [0; +\infty)$
 D. $Dom(f) = [-\infty; -1)$; $Ran(f) = [-1; +\infty)$
 E. $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Ran(f) = \mathbb{R}$

RESOLUCIÓN:

La función:

$$f(x) = |x + 2|$$

Tiene la forma:

$$f(x) = a|x - h| + k ; a \neq 0$$

Determinamos el vértice:

$$f(x) = |x + 2| + 0$$

$$x + 2 = 0$$

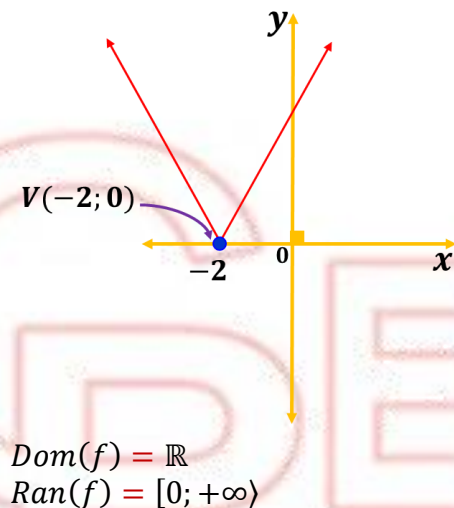
$$x = -2 \rightarrow h = -2$$

El vértice:

$$V(h; k) \rightarrow V(-2; 0)$$

Graficamos:

$a = 1 \rightarrow a > 0$, por lo tanto, la gráfica se abre hacia arriba.



RPTA: A

2. El número de lagunas en el Perú está dado por:

$$M = (b + 4)3(b + 1)5$$

Si se sabe que las funciones:

$$f(x) = \left| \frac{x+3}{x-3} \right| \quad ; \quad g(x) = 7$$

tienen como un punto en común a $(b; y)$. Hallar el número de lagunas.

- A. 1335
- B. 2835
- C. 3855
- D. 8355
- E. 2579

RESOLUCIÓN:

Encontramos los puntos en común:

$$f(x) = g(x)$$

$$\left| \frac{x+3}{x-3} \right| = 7$$

$$x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$$

Por definición de valor absoluto:

$$\begin{array}{ll} \frac{x+3}{x-3} = 7 & \checkmark \\ x+3 = 7(x-3) & \checkmark \\ x+3 = 7x-21 & \checkmark \\ -6x = -24 & \checkmark \\ x_1 = 4 & \checkmark \\ (4; 7) & \checkmark \end{array} \quad \begin{array}{ll} \frac{x+3}{x-3} = -7 & \\ x+3 = -7(x-3) & \checkmark \\ x+3 = -7x+21 & \checkmark \\ 8x = 18 & \\ x_2 = \frac{9}{4} & \\ \left(\frac{9}{4}; 7\right) & \checkmark \end{array}$$

Por dato, el punto en común es: $(b; y)$

Descartamos $\left(\frac{9}{4}; 7\right)$, porque "b", debe ser entero.

El punto en común es $(4; 7)$.

Comparando:

$$b = 4$$

Reemplazando:

$$M = (b + 4)3(b + 1)5$$

$$M = (4 + 4)3(4 + 1)5$$

$$M = 8355$$

Por lo tanto, el número de lagunas es 8355.

RPTA: D

3. Si la nieta del Prof. Adolfo cumple " $b + d$ " años, donde $(b; 0)$ y $(d; 0)$ son los puntos de intersección de la función

$h(x) = (x - 2)^2 - 3|x - 2| - 4$ y el eje "x". ¿Cuántos años cumple la nieta del Prof. Adolfo?

- A. 3 años

- B. 4 años
C. 5 años
D. 6 años
E. 7 años

RESOLUCIÓN:

Del enunciado igualamos a cero por ser puntos de intersección con el eje de las abscisas:

$$\begin{aligned}h(x) &= (x-2)^2 - 3|x-2| - 4 = 0 \\(x-2)^2 - 3|x-2| - 4 &= 0 \\|x-2|^2 - 3|x-2| - 4 &= 0\end{aligned}$$

Factorizamos:

$$\begin{aligned}(|x-2|-4)(|x-2|+1) &= 0 \\|x-2|+1 &= 0\end{aligned}$$

No cumple, porque $|x-2|$, al ser positivo, no verifica la igualdad.

$$|x-2|-4 = 0$$

Aplicando propiedad de valor absoluto:

$$\begin{aligned}|x-2| &= 4 \\x-2 &= 4 \quad \checkmark \quad x-2 = -4 \\x_1 &= 6 \quad \checkmark \quad x_2 = -2 \\(6; 0) &\quad \checkmark \quad (-2; 0)\end{aligned}$$

Comparando los pares ordenados obtenidos: $(b; 0)$ y $(d; 0)$

$$\begin{aligned}b &= 6 \\d &= -2\end{aligned}$$

La nieta del profesor Adolfo cumple " $b + d$ " años

$$6 - 2 = 4$$

Por lo tanto, la nieta del profesor Adolfo tiene 4 años.

RPTA: D

4. Dos estudiantes destacados del Instituto Honorio Delgado Espinoza de Arequipa, obtuvieron los siguientes puntajes en un concurso de matemática: " $a + 10$ " puntos y " $b + 1$ " puntos.

Si: $f(x) = -|x-1| + 48$, donde $x \in [0; 9]$ y el rango de la función es $Ran(f) = [a; b]$. Hallar los puntajes obtenidos.

- A. 40 y 48
B. 30 y 47
C. 40 y 47
D. 30 y 48
E. 50 y 49

RESOLUCIÓN:

Sea la función:

$$f(x) = -|x-1| + 48$$

Determinamos el vértice:

$$\begin{aligned}x &= 1 \\x-1 &= 0 \\V(h; k) &= (1; 48)\end{aligned}$$

Se observa que: $a = -1$

Como $a < 0$, la gráfica se abre hacia arriba.

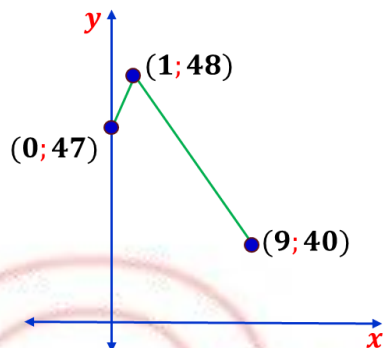
En la función:

$$g(x) = x + 6$$

Evaluando para: $x = 0; 1; 9$

$$\begin{aligned}(0) &= -|0-1| + 48 = 47 \\&\rightarrow (0; 47) \\f(1) &= -|1-1| + 48 = 48 \\&\rightarrow (1; 48) \\f(9) &= -|9-1| + 48 = 40 \\&\rightarrow (9; 40)\end{aligned}$$

Graficamos:



El rango es:

$$\text{Ran}(f) = [40; 48]$$

Por dato:

$$\text{Ran}(f) = [40; 48] = [a; b]$$

$$a = 40 \text{ y } b = 48$$

Puntaje 1:

$$a + 10$$

$$40 + 10 = 50$$

Puntaje 2:

$$b + 1$$

$$48 + 1 = 49$$

Por lo tanto, los puntajes obtenidos son 50 y 49 puntos.

RPTA: E

5. El recorrido (en centímetros) que realiza una hormiga en “ t ” segundos está representada por la función: $f(t) = 6 + |t - 2|$, con $t \in [0; 5]$. Hallar la longitud de dicho recorrido de la hormiga cuando lo hace una sola vez.

- A. $8\sqrt{3} \text{ cm}$
- B. $3\sqrt{2} \text{ cm}$
- C. $2\sqrt{5} \text{ cm}$
- D. $\sqrt{13} \text{ cm}$

E. $5\sqrt{2} \text{ cm}$

RESOLUCIÓN:

En la función: $f(t) = 6 + |t - 2|$

Determinamos el vértice: $V(2; 6) \in IC$

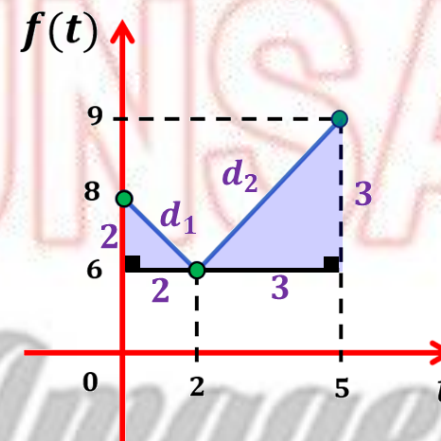
Entonces, sólo existe puntos de corte con el eje vertical:

$$f(0) = 8$$

Determinamos el punto:

$$f(5) = 9$$

Graficamos:



Calculamos las distancias:

$$d_1 = 2^2 + 2^2$$

$$d_1 = 8$$

$$d_1 = 2\sqrt{2}$$

$$d_2 = 3^2 + 3^2$$

$$d_2 = 18$$

$$d_2 = 3\sqrt{2}$$

Finalmente, sumamos las distancias:

$$d_1 + d_2 = 5\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el recorrido es: $(5\sqrt{2}) \text{ cm}$.

RPTA: E

$$\text{Ran}(f) = \{0; 2\}$$

Por lo tanto:

$$0 + 2 = 2$$

RPTA: B

6. Hallar la suma de los elementos del rango de la función:

$$f(x) = \frac{x + |x|}{x}$$

- A. 4
- B. 2
- C. 1
- D. 3
- E. 5

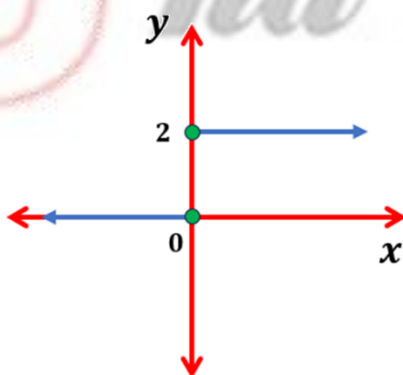
RESOLUCIÓN:

Del enunciado

$$f(x) = \frac{x + |x|}{x}$$

Aplicamos la definición del valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+x}{x} = 2; & x > 0 \\ \frac{x-x}{x} = 0; & x < 0 \end{cases}$$



Entonces, el rango es:

7. Si la diferencia de los valores del rango de $g(x)$, es la cantidad de cursos que lleva un estudiante desaprobado de ingeniería eléctrica de la UNSA. ¿Cuántos cursos llevará Margarita, si salió desaprobada? Sabiendo que:

$$g(x) = \frac{4x - |x|}{x}$$

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

RESOLUCIÓN:

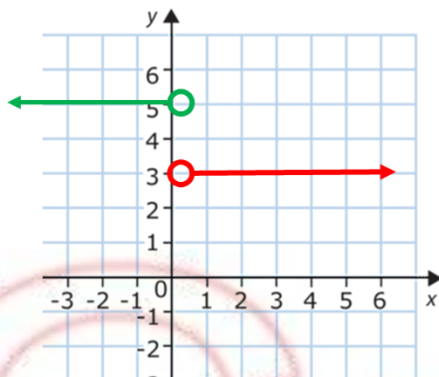
Sea la función:

$$f(x) = \frac{4x - |x|}{x} ; x \neq 0$$

Por definición de valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x-x}{x}, & \text{si } x > 0 \\ \frac{4x-(-x)}{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x > 0 \\ 5, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Determinamos el $Dom(f)$:

$$Dom(f) = \langle -\infty; 0 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Determinamos el $Ran(f)$:

$$Ran(f) = \{3; 5\}$$

Nos pide la diferencia de valores del $Ran(f)$:

$$5 - 3 = 2$$

Por lo tanto, Margarita llevará 2 cursos.

RPTA: B

8. Efraín es un agricultor y desea sembrar hortalizas en una porción de terreno limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = |2x|$$

$$g(x) = \frac{x}{2} + 5$$

Calcular el área de la región a sembrar.

- A. 16 m^2
- B. 12 m^2
- C. 14 m^2
- D. 13 m^2
- E. 20 m^2

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$f(x) = |2x|$$

$$2x = 0 \rightarrow x = 0$$

El vértice es: $\rightarrow V(0; 0)$

$a > 0$ se abre hacia arriba

$$g(x) = \frac{x}{2} + 5$$

Intersecciones con los ejes:

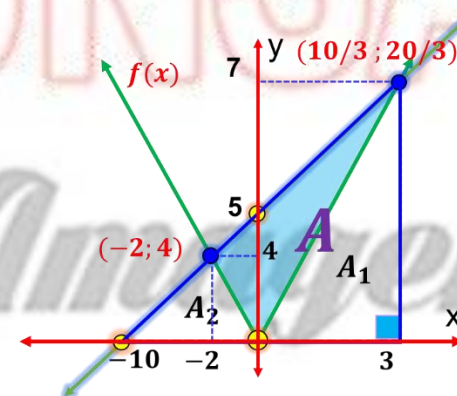
$$x = 0 \rightarrow y = 0 + 5$$

$$y = 5 \rightarrow (0; 5)$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = \frac{x}{2} + 5$$

$$x = -10 \rightarrow (-10; 0)$$

Graficamos:



Intersecciones entre las gráficas:

$$g(x) = f(x)$$

$$\frac{x}{2} + 5 = |2x|$$

$$2x = \frac{x}{2} + 5 \vee 2x = -\frac{x}{2} - 5$$

$$x = \frac{10}{3} \vee x = -2$$

$$y = \left| 2 \left(\frac{10}{3} \right) \right| = \frac{20}{3} \rightarrow \left(\frac{10}{3}; \frac{20}{3} \right)$$

$$y = |2(-2)| = 4 \rightarrow (-2; 4)$$

Para hallar el área a sembrar, hallaremos 3 áreas:

$$A = \frac{\frac{40}{3} \left(\frac{20}{3} \right)}{2} \approx 44 u^2$$

$$A_1 = \frac{\frac{10}{3} \left(\frac{20}{3} \right)}{2} \approx 11 u^2$$

$$A_2 = \frac{10(4)}{2} = 20 u^2$$

El área a sembrar:

$$A - (A_1 + A_2)$$

$$44 - (11 + 20) \approx 13 u^2$$

El área de la región sembrada es , aproximadamente $13 m^2$.

RPTA: D

6.7.2 FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

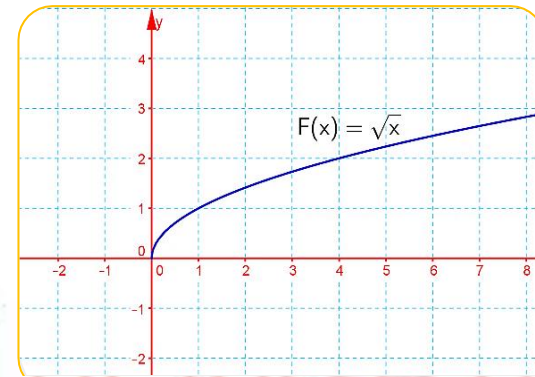
FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

A la función F , le llamaremos raíz cuadrada si su regla de correspondencia es:

$$F(x) = \sqrt{x}$$

Su dominio es $x \geq 0$

Gráfica de la función:



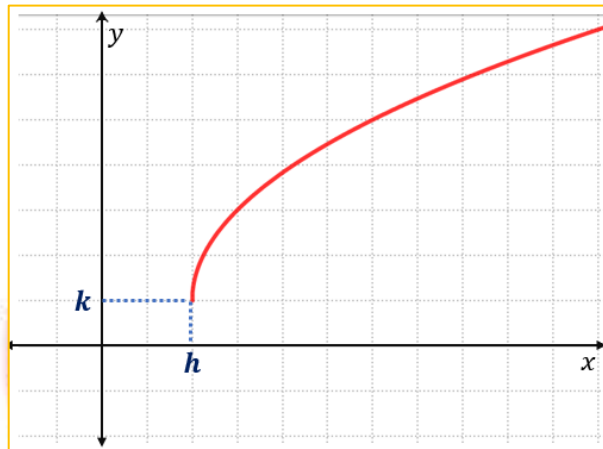
Ecuación General:

$$F(x) = a\sqrt{x-h} + k$$

$(h; k)$ es el vértice o inicio de la gráfica

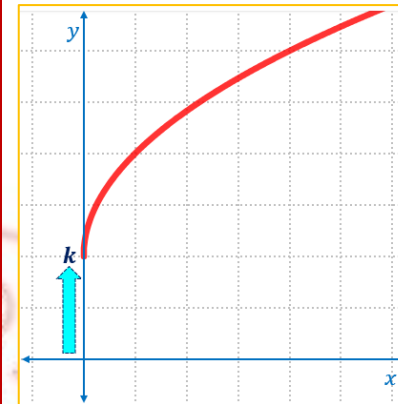
"a" indica la extensión y dirección de la gráfica. (MINEDU, 2015)

Gráfica de la función:

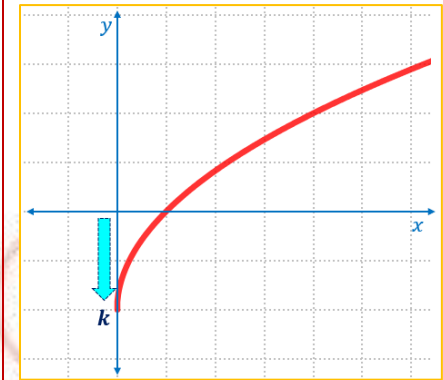


b) Verticales:

$$f(x) = \sqrt{x} + k$$



$$f(x) = \sqrt{x} - k$$

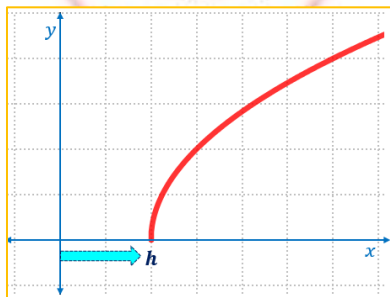


6.7.2.2 REFLEJOS SOBRE LOS EJES.

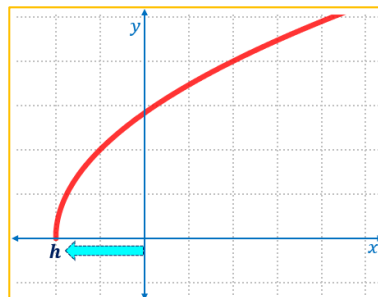
6.7.2.1 DESPLAZAMIENTOS:

a) Horizontales:

$$f(x) = \sqrt{x - h}$$

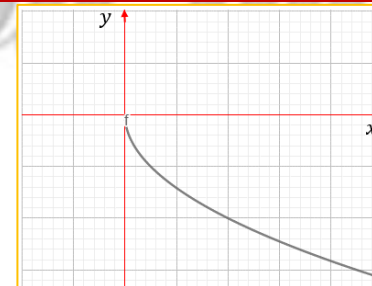


$$f(x) = \sqrt{x + h}$$



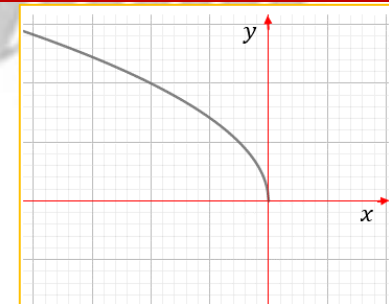
Sobre el eje x

$$f(x) = -\sqrt{x}$$



Sobre el eje y

$$f(x) = \sqrt{-x}$$



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

RPTA: C

1. Determinar el dominio de la función "f":

$$f(x) = \sqrt{\frac{16}{x^2} - 1} + 25$$

- A. $[-4; 4]$
- B. $]0; 1]$
- C. $[-4; 0[\cup]0; 4]$
- D. $] -\infty; 4]$
- E. $] -4; 4[$

RESOLUCIÓN:

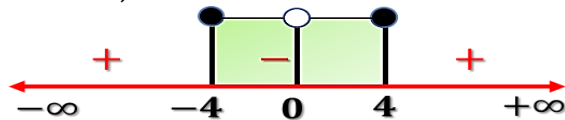
Del enunciado:

$$f(x) = \sqrt{\frac{16}{x^2} - 1} + 25$$

Analizamos el dominio:

$$\begin{aligned} \frac{16}{x^2} - 1 &\geq 0 & \wedge & & x^2 &\neq 0 \\ \frac{16}{x^2} &\geq 1 & \wedge & & x &\neq 0 \\ 16 &\geq x^2 \\ 16 - x^2 &\geq 0 \\ x^2 - 16 &\leq 0 \\ (x - 4)(x + 4) &\leq 0 \end{aligned}$$

Puntos críticos: $x = 4$; $x = -4$



$$\therefore \text{Dom}(f) = [-4; 4] - \{0\}$$

Otra forma:

$$\text{Dom}(f) = [-4; 0[\cup]0; 4]$$

2. Calcular la suma de los valores enteros que presenta el dominio de la función:

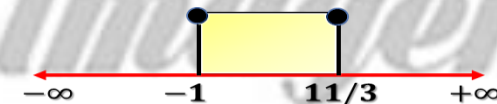
$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{11-3x} - x^2$$

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6
- E. 8

RESOLUCIÓN:

Hallemos el dominio de "f":

$$\begin{aligned} x+1 &\geq 0 & \wedge & & 11-3x &\geq 0 \\ x &\geq -1 & \wedge & & -3x &\geq -11 \\ & & & & 3x &\leq 11 \\ x &\geq -1 & \wedge & & x &\leq \frac{11}{3} \\ & & & & -1 &\leq x \leq \frac{11}{3} \end{aligned}$$



$$\therefore \text{Dom}(f) = \left[-1; \frac{11}{3}\right]$$

Por lo tanto, la suma de valores es:

$$-1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$$

RPTA: C

3. Hallar el dominio de la función:

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 15} + \sqrt[3]{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$$

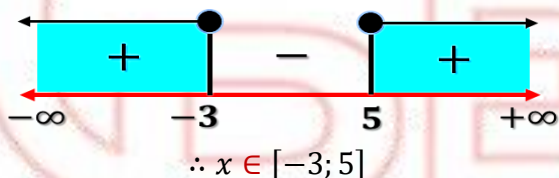
- A. $] -4; -3]$
 B. $[-3; 4[$
 C. $] -4; 5]$
 D. $[-3; 5] - \{4\}$
 E. $] -\infty; -3] \cup [5; +\infty[$

RESOLUCIÓN:

Por definición:

$$x^2 - 2x - 15 \geq 0$$

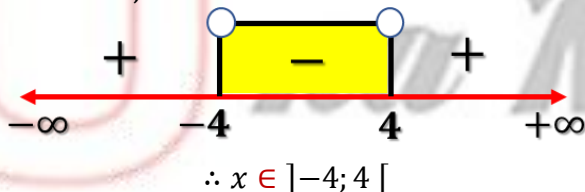
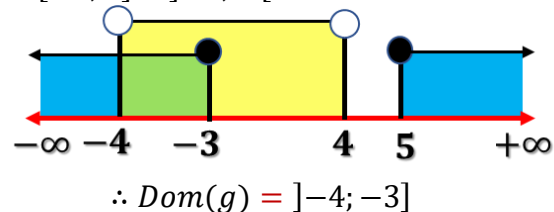
$$(x - 5)(x + 3) \geq 0$$

Puntos críticos: $x = 5$; $x = -3$ 

Por definición:

$$16 - x^2 > 0$$

$$(x - 4)(x + 4) < 0$$

Puntos críticos: $x = 4$; $x = -4$ La intersección: $[-3; 5] \cap] -4; 4 [$ 

4. Hallar el rango de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$$

- A. $] 0; 1[$
 B. $] -\infty; 1]$
 C. $[0; 1]$
 D. $[0; 1[$
 E. $] 1/2; 1]$

RESOLUCIÓN:

De la función:

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$$

Analizando el dominio:

$$1 - \sqrt{1 - x} \geq 0 \quad \wedge \quad 1 - x \geq 0$$

$$1 \geq \sqrt{1 - x} \quad \wedge \quad 1 \geq x$$

$$x \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 1$$

$$Dom(f) = [0; 1]$$

Determinamos el rango a partir del dominio:

$$0 \leq x \leq 1$$

Multiplicamos por (-1) :

$$-1 \leq -x \leq 0$$

Sumamos (1):

$$0 \leq 1 - x \leq 1$$

Extraemos $(\sqrt{\quad})$:

$$0 \leq \sqrt{1 - x} \leq 1$$

Multiplicamos (-1) :

$$-1 \leq -\sqrt{1 - x} \leq 0$$

Sumamos (1):

$$0 \leq 1 - \sqrt{1 - x} \leq 1$$

Extraemos $(\sqrt{\quad})$:**RPTA: A**

$$0 \leq \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}} \leq 1$$

Tenemos:

$$0 \leq f(x) \leq 1 \\ \therefore \text{Ran}(f) = [0; 1]$$

RPTA: C**5. Al determinar el dominio de la función "g", definida por:**

$$g(x) = \frac{4}{\sqrt{x-3}-1} - \frac{\sqrt{7-x}}{x^2-25} + \sqrt[3]{x-6}$$

Se obtuvo: $\text{Dom}(g) = [a; 4[\cup]b; 5[\cup]c; d]$ Calcular: $T = a + b + c + d$.

- A. 17
B. 19
C. 21
D. 23
E. 29

RESOLUCIÓN:

De la función:

$$g(x) = \frac{4}{\sqrt{x-3}-1} - \frac{\sqrt{7-x}}{x^2-25} + \sqrt[3]{x-6}$$

Analizamos el dominio:

$$\begin{aligned} x-3 &\geq 0 & \wedge & \sqrt{x-3} \neq 1 \\ 7-x &\geq 0 & \wedge & x^5 - 25 \neq 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x &\geq 3 & \wedge & x-3 \neq 1 & \wedge & x \leq 7 & \wedge & x \neq 5 & \wedge & x \neq -5 \\ x &\geq 3 & \wedge & x \neq 4 & \wedge & x \leq 7 & \wedge & x \neq 5 & \wedge & x \neq -5 \end{aligned}$$

De aquí:

$$\begin{aligned} 3 &\leq x \leq 7 & \wedge & x \neq 4; 5 \\ \text{Dom}(g) &= [3; 7] - \{4; 5\} \end{aligned}$$

Le damos la forma:

$$\text{Dom}(g) = [3; 4[\cup]4; 5[\cup]5; 7]$$

Del dato:

$$\text{Dom}(g) = [a; 4[\cup]b; 5[\cup]c; d]$$

Comparando:

$$a = 3; \quad b = 4; \quad c = 5; \quad d = 7$$

Nos pide:

$$T = a + b + c + d = 3 + 4 + 5 + 7 = 19$$

RPTA B**6. Si el rango de la función "g", es $[a; b[\cup]b; +\infty[$; calcular el valor de $b^2 - a^2$.**

$$g(x) = \frac{x - 2023}{\sqrt{x - 2022} - 1}$$

- A. 0
B. 1
C. 3
D. -1
E. -2

RESOLUCIÓN:

De la función:

$$g(x) = \frac{x - 2023}{\sqrt{x - 2022} - 1}$$

Determinamos el dominio:

$$\begin{aligned} x - 2022 &\geq 0 & \wedge & \sqrt{x - 2022} - 1 \neq 0 \\ x &\geq 2022 & \wedge & x \neq 2023 \\ \text{Dom}(g) &= [2022; +\infty) - \{2023\} \end{aligned}$$

Acomodamos la función:

$$g(x) = \frac{x - 2023}{\sqrt{x - 2022} - 1}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x-2022}^2 - 1}{\sqrt{x-2022} - 1}$$

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x-2022} + 1)(\sqrt{x-2022} - 1)}{\sqrt{x-2022} - 1}$$

Simplificando:

$$g(x) = \sqrt{x-2022} + 1$$

Obtenemos el rango a partir del dominio:

$$\begin{array}{ll} x \geq 2022 & \wedge \quad x \neq 2023 \\ x - 2022 \geq 0 & \wedge \quad x - 2022 \neq 1 \\ \sqrt{x-2022} \geq 0 & \wedge \quad \sqrt{x-2022} \neq 1 \\ \underbrace{\sqrt{x-2022} + 1}_{g(x)} \geq 1 & \wedge \quad \underbrace{\sqrt{x-2022} + 1}_{g(x)} \neq 2 \\ g(x) \geq 1 & \wedge \quad g(x) \neq 2 \\ \text{Ran}(g) = [1; +\infty[- \{2\} \end{array}$$

Acomodamos:

$$\text{Ran}(g) = [1; 2[\cup]2; +\infty[$$

Luego, comparamos con el dato:

$$\text{Ran}(g) = [a; b[\cup]b; +\infty[$$

Entonces:

$$a = 1 \quad \wedge \quad b = 2$$

Nos pide:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= 2^2 - 1^2 \\ \therefore b^2 - a^2 &= 3 \end{aligned}$$

RPTA: C**7. Señalar el complemento del dominio de la función "f", tal que:**

$$f(x) = \sqrt[4]{(x^6 + x^4 + x^2 + 6) - (x^5 + x^3 + x + 2)}$$

- A. $[0; +\infty[$
 B. $] -1; 1[$
 C. $] -\infty; 0[$
 D. $\mathbb{R}$
 E. $\emptyset$

RESOLUCIÓN:

Del dato:

$$f(x) = \sqrt[4]{(x^6 + x^4 + x^2 + 6) - (x^5 + x^3 + x + 2)}$$

Hacemos que: $A = (x^6 + x^4 + x^2 + 6) - (x^5 + x^3 + x + 2)$ Por definición de función de raíz cuadrada: $A \geq 0$

Acomodamos:

$$A = (x^6 + x^4 + x^2 + 6) - (x^5 + x^3 + x + 2)$$

$$A = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 4$$

Multiplicamos por dos para completar cuadrados:

$$2A = 2x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 8$$

Factorizamos:

$$2A = \underbrace{x^6 - 2x^5 + x^4}_{TCP} + \underbrace{x^4 - 2x^3 + x^2}_{TCP} + \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{TCP} + x^4 + x^2 + 6$$

$$2A = (x^3 - x^2)^2 + (x^3 - 1)^2 + (x - 1)^2 + x^4 + x^2 + 6$$

$$A = \frac{(x^3 - x^2)^2 + (x^3 - 1)^2 + (x - 1)^2 + x^4 + x^2 + 6}{2}$$

Observamos y concluimos que: $A > 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Por definición de raíz cuadrada: $A \geq 0 \quad ; \quad f(x) \in \mathbb{R}$

$$\therefore \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Por lo tanto, el complemento del dominio es $\emptyset$.**RPTA: D****8. La función:**

$$v(t) = -2\sqrt{t+4} + 12,$$

modela la depreciación (pérdida del valor con el paso del tiempo) de un equipo de cómputo, donde "v" está en miles de soles y el tiempo "t" en meses. Determinar el precio de compra del equipo y el tiempo en el que estará totalmente depreciado.

(CEPRUNSA I FASE 2024- INGENIERÍAS)

A. 4 mil soles; en 12 meses.

- B. 6 mil soles; en 32 meses.
- C. 8 mil soles; en 32 meses.
- D. 8 mil soles; en 36 meses.
- E. 12 mil soles; en 40 meses.

RESOLUCIÓN:

Determinamos el precio de compra del equipo:

Para: $t = 0$

$$v(t) = -2\sqrt{t+4} + 12$$

$$v(0) = -2\sqrt{0+4} + 12$$

$$v(0) = -2\sqrt{4} + 12$$

$$v(0) = -2(2) + 12$$

$$v(0) = -4 + 12$$

$$v(0) = 8$$

Por lo tanto, el precio de compra del equipo es de 8 mil soles.

Determinamos el tiempo en el que estará totalmente depreciado:

Para: $v(t) = 0$

$$v(t) = -2\sqrt{t+4} + 12$$

$$0 = -2\sqrt{t+4} + 12$$

$$-12 = -2\sqrt{t+4}$$

$$6 = \sqrt{t+4}$$

$$36 = t+4$$

$$t = 32$$

Por lo tanto, estará totalmente depreciado en 32 meses.

RPTA: C

CAPÍTULO VII

ÁLGEBRA

Los conceptos como los de relación y función han adquirido un alto grado de desarrollo tanto para la enseñanza como para la aplicación, en particular para estudiantes universitarios en los primeros semestres de programas con amplio contenido matemático, debido a que su asimilación y percepción se facilita a través de algunos de los sentidos y el ejercicio de la razón: las relaciones y funciones las pueden ver sobre el plano cartesiano



7 ÁLGEBRA

7.1 FUNCIÓN RACIONAL E IRRACIONAL

7.1.1 FUNCIÓN RACIONAL

FUNCIÓN RACIONAL

Es aquella donde la variable aparece en el denominador. La gráfica que se genera se denomina hipérbola, es expresada de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

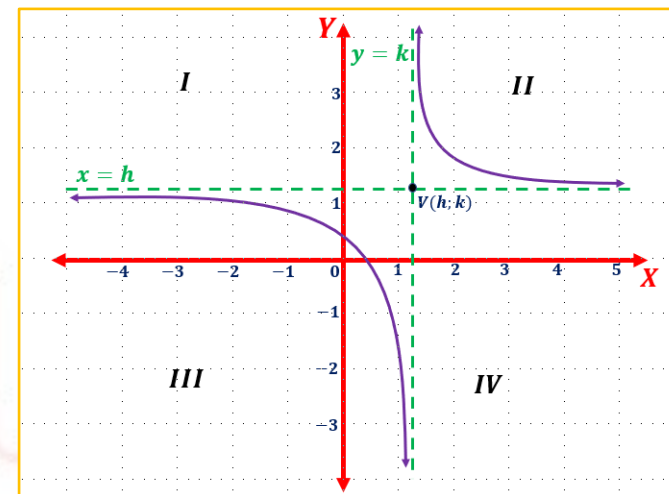
- El dominio de definición son todos los números reales menos las raíces del denominador.
- Tienen asíntotas verticales en cada raíz del denominador que no lo sea del numerador.
- Tiene asíntotas horizontales si el grado del numerador es menor o igual que el denominador.

También conocemos esta forma de la función:

$$f(x) = \frac{c}{x - h} + k$$

Donde $V = (h; k)$; corresponde al punto de intersección de las asíntotas.

$$\text{Si: } \begin{cases} c (+), \text{ IC y III C} \\ c (-), \text{ IIC y IV C} \end{cases}$$



Gráfica:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{h\}$$

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R} - \{k\}$$

Asíntotas:

$$x = h$$

$$y = k$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Calcular el rango de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$

A. $\text{Ran}(f) = \langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle 0; \infty + \rangle$

B. $\text{Ran}(f) = \langle -7; -3 \rangle \cup \langle 0; \infty + \rangle$

C. $\text{Ran}(f) = \langle \infty; -3 \rangle \cup \langle 0; \infty + \rangle$

D. $\text{Ran}(f) = \langle -\infty; 3 \rangle \cup \langle 0; 2 \rangle$

E. $\text{Ran}(f) = \langle -\infty; 2] \cup \langle 2; \infty + \rangle$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

Hallamos el rango de la función:

$$y = \frac{3}{x^2 - 1}$$

$$yx^2 - y = 3$$

$$yx^2 = 3 + y$$

$$x = \sqrt{\frac{3+y}{y}}$$

Aplicamos la restricción:

$$\frac{3+y}{y} \geq 0$$

Puntos Críticos:

$$3+y=0 \quad ; \quad y \neq 0$$

$$y=-3 \quad ; \quad y \neq 0$$



Por lo tanto:

$$\text{Ran}(f) = \langle -\infty; -3] \cup \langle 0; +\infty \rangle$$

RPTA: C

2. Calcular el dominio y rango de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$$

A. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ y $\text{Ran}(f) = \langle -\infty; -3] \cup \langle 0; \infty + \rangle$

B. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ y $\text{Ran}(f) = \langle -\infty; -6] \cup \langle -2; \infty + \rangle$

C. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ y $\text{Ran}(f) = \langle \infty; -3] \cup \langle 0; \infty + \rangle$

D. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$ y $\text{Ran}(f) = \langle -\infty; 3] \cup \langle 0; 2 \rangle$

E. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ y $\text{Ran}(f) = \langle -\infty; 6] \cup \langle 2; \infty + \rangle$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado se tiene:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$$

Calculando el dominio:

$$x + 2 \neq 0$$

$$x \neq -2$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

Calculando el Rango:

$$y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$$

Despejamos "x":

$$yx + 2y = x^2 - 3$$

$$x^2 - yx - 2y - 3 = 0$$

$$\Delta \geq 0$$

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

$$a = 1 \quad ; \quad b = -y \quad ; \quad c = -2y - 3$$

$$(-y)^2 - 4(1)(-2y - 3) \geq 0$$

Puntos Críticos:

$$y + 8y + 12 \geq 0$$

$$(y + 6)(y + 2) \geq 0$$

$$y = -6 \quad ; \quad y = -2$$



$$\text{Ran}(f) = \langle -\infty; -6] \cup \langle -2; \infty + \rangle$$

RPTA: B

$$\begin{aligned} \frac{-1}{5} &< \frac{1}{x^2 - 9} < \frac{-1}{9} & +1 \\ \frac{4}{5} &< \frac{1}{x^2 - 9} < \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\left] \frac{4}{5}; \frac{8}{9} \right[$$

RPTA: D

3. Dada la función real:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{x^2 - 9}$$

cuyo dominio es $] -3; 2[$ determine el rango de la función "f".

- F. $\left[\frac{4}{5}; \frac{8}{9} \right]$
- G. $\langle \frac{4}{5}; 2 \rangle$
- H. $\left[\frac{6}{5}; 3 \right[$
- I. $\left] \frac{4}{5}; \frac{8}{9} \right[$
- J. $\left[\frac{4}{5}; -\frac{8}{9} \right]$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{x^2 - 9}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 8 - 1 + 1}{x^2 - 9}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 9} + \frac{1}{x^2 - 9}$$

$$y = 1 + \frac{1}{x^2 - 9}$$

Dominio: $] -3; 2[$

$$-3 < x < 2 \quad ()^2$$

$$0 < x^2 < 4 \quad -9$$

$$-9 < x^2 - 9 < -5 \quad \text{invertimos}$$

4. Hallar el rango de la siguiente función:

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

- A. $[3; 8]$
- B. $\langle 6; 2 \rangle$
- C. $[-7; 3[$
- D. $] -2; 3[$
- E. $[-1; 1]$

RESOLUCIÓN:

Tenemos:

$$y = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Despejamos "x":

$$yx^2 - y = 2x$$

$$yx^2 - 2x + y = 0$$

$$a = y, \quad b = -2, \quad c = y$$

Para que las raíces estén en el campo de los reales

$$\Delta \geq 0$$

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

$$a = 1; \quad b = -y; \quad c = -2y - 3$$

$$(-2)^2 - 4(y)(y) \geq 0$$

$$4 - 4y^2 \geq 0$$

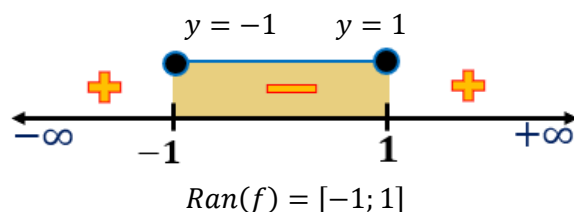
$$4(1 - y^2) \geq 0$$

$$1 - y^2 \geq 0$$

$$y^2 - 1 \leq 0$$

$$(y + 1)(y - 1) \leq 0$$

Puntos Críticos:



RPTA: E

5. Si "x" varones están disponibles para realizar una obra que cuatro varones realizan en 5 días. ¿Cuál es la función del tiempo que realizarán dependiendo del valor de "x"? ¿Qué tiempo le llevará a 10 varones realizar la misma obra?

- A. $t(x) = \frac{20}{x}$ y 3 días
- B. $t(x) = \frac{10}{x}$ y 1 día
- C. $t(x) = \frac{20}{x}$ y 2 días
- D. $t(x) = \frac{25}{x}$ y 5 días
- E. $t(x) = \frac{20}{x}$ y 9 días

RESOLUCIÓN:

Si la variación inversa entre "t" y "x":

$$t(x) = \frac{k}{x}$$

Condiciones:

$$5 = \frac{k}{4}$$

Entonces

$$k = 20$$

Sustituyendo en la variación inversa.

$$t(x) = \frac{20}{x}$$

El tiempo que tardarán 10 varones es:

$$t(x) = \frac{20}{10}$$

$$t(x) = 2 \text{ días}$$

RPTA: C

5. Si $M = \text{Dom}(f) \wedge J = \text{Ran}(f)$, siendo

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$$

Calcular $M - J$

- A. $\{-4; 1\}$
- B. $\{-5; 1\}$
- C. $\{-3; -2\}$
- D. $\{-3; 1\}$
- E. $\{-7; 1\}$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)}{(x+3)}$$

$$x \neq -2; x \neq -3$$

Entonces el $\text{Dom}(f) = R - \{-3; -2\}$

Hallando el rango:

$$y = \frac{(x-2)}{(x+3)}$$

$$x \neq -2; x \neq -3$$

$$xy + 3y = x - 2$$

$$xy - x = -3y - 2$$

$$(y-1)x = -3y-2$$

$$x = \frac{-3y-2}{y-1}$$

RPTA: A

$$x \neq -2; x \neq -3$$

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R} - \{-4; 1\}$$

Por condición:

$$M = \mathbb{R} - \{-3; -2\}$$

$$A = \langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle -3; -2 \rangle \cup \langle -2; \infty \rangle$$

$$J = \mathbb{R} - \{-4; 1\}$$

$$B = \langle -\infty; -4 \rangle \cup \langle -4; 1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$$

$$M - J = \{-4; 1\}$$

RPTA: C

6. El cambio de posición en metros de un objeto respecto al tiempo del movimiento " t ", está dado por la expresión $S(t) = 2t^2 - 5t + 2$. Determina la función de su velocidad. ¿Qué velocidad tendrá el objeto a los 10 segundos de iniciado su movimiento?

- A. $v(t) = \frac{2t^2 - 5t + 2}{t}$ y 15,2 m/s
- B. $v(t) = \frac{2t^2 - 5t + 2}{t}$ y 10,2 m/s
- C. $v(t) = \frac{2t^2 - 5t + 2}{t}$ y 5,2 m/s
- D. $v(t) = \frac{2t^2 - 5t + 2}{t}$ y 13 m/s
- E. $v(t) = \frac{2t^2 - 5t + 2}{t}$ y 12 m/s

RESOLUCIÓN:

Para encontrar la función velocidad:

$$v = \frac{d}{t}$$

Sustituyendo $S(t)$ en la función:

$$v = \frac{2t^2 - 5t + 2}{t}$$

Velocidad del objeto en 10 segundos:

$$v = \frac{2(10)^2 - 5(10) + 2}{10}$$

$$v = 15,2 \text{ m/s}$$

7. Si el rango de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 3}; \quad 1 \leq x \leq 3$$

es: $[m; n]$, entonces $m - n$ es igual a:

- A. $\frac{164}{205}$
- B. $\frac{13}{325}$
- C. $\frac{16}{168}$
- D. $\frac{64}{105}$
- E. $\frac{169}{124}$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 3}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3 - 3 - 1}{2x^2 + 3}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 3} + \frac{-4}{2x^2 + 3}$$

$$f(x) = 1 - \frac{4}{2x^2 + 3}$$

Entonces:

$$1 \leq x \leq 3 \quad ()^2$$

$$1 \leq x^2 \leq 9 \quad \text{por}(2)$$

$$2 \leq 2x^2 \leq 18 \quad +3$$

$$5 \leq 2x^2 + 3 \leq 21 \quad \text{Invertimos}$$

$$\frac{1}{21} \leq \frac{1}{2x^2 + 3} \leq \frac{1}{5} \quad \text{por}(-4)$$

$$\frac{-4}{21} \geq \frac{-4}{2x^2 + 3} \geq \frac{-4}{5} \quad +1$$

$$\frac{17}{21} \leq 1 - \frac{4}{2x^2 + 3} \leq \frac{1}{5}$$

$$\frac{17}{21} \leq f(x) \leq \frac{1}{5}$$

$$\text{El Rango : } \left[\frac{17}{21}; \frac{1}{5} \right] = [m; n]$$

Por tanto:

$$m - n = \frac{17}{21} - \frac{1}{5}$$

$$m - n = \frac{64}{105}$$

RPTA: D

8. Una persona que trabaja para una empresa eléctrica, está haciendo una instalación y se encuentra a una altura de "10b" metros. Si:

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 8x + 21}$$

Donde; $f(x) \leq b$. Hallar dicha altura.

- A. m
- B. $4m$
- C. $3m$
- D. $5m$
- E. $8m$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 8x + 21}$$

Reduciendo:

$$f(x) = \frac{2}{(x - 4)^2 + 5}$$

Luego:

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 &\geq 0 \\ (x - 4)^2 + 5 &\geq 5 \\ \frac{1}{(x - 4)^2 + 5} &\leq \frac{1}{5} \\ \frac{2}{(x - 4)^2 + 5} &\leq \frac{2}{5} \\ f(x) &\leq \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Entonces:

$$b = \frac{2}{5}$$

Calculamos la altura:

$$10 \left(\frac{2}{5} \right) = 4m$$

RPTA: B

7.1.2 FUNCIÓN IRRACIONAL

FUNCIÓN IRRACIONAL

Es una función en cuya estructura la variable independiente "x" aparece debajo del símbolo de raíz. Es decir, la variable forma parte de la cantidad subradical.

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

Donde:

n: es un número natural $\mathbb{N}$ mayor que dos, $n > 2$

g(x): es una función racional.

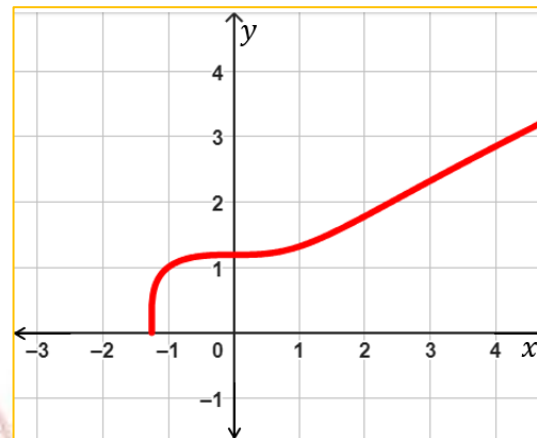
- Son habitualmente llamadas funciones radicales
- El dominio de una función racional depende del índice de la raíz, así:
Si "**n**" es par, el dominio está definido para $g(x) \geq 0$
Si "**n**" es impar, el dominio es $\mathbb{R}$ (todos los números reales). $\text{Dom}(f) = \langle -\infty; +\infty \rangle$

ANÁLISIS DE LOS GRÁFICOS DE LA FUNCIÓN IRRACIONAL: DOMINIO Y RANGO

Veamos cómo son los gráficos de la función irracional analizando el índice de la raíz y el exponente del radicando.

Ejemplos:

1. $f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 2}$



Hallando el dominio de la función:

Como se trata de una función de índice par, entonces tiene la restricción:

$$x^3 + 2 \geq 0$$

$$x^3 \geq -2$$

$$x \geq -\sqrt[3]{2}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f) = [-\sqrt[3]{2}; +\infty)$$

Hallando el rango de la función, despejando "x" y posteriormente aplicando restricciones si las hubiera:

$$y = \sqrt[4]{x^3 + 2}$$

$$y^4 = x^3 + 2$$

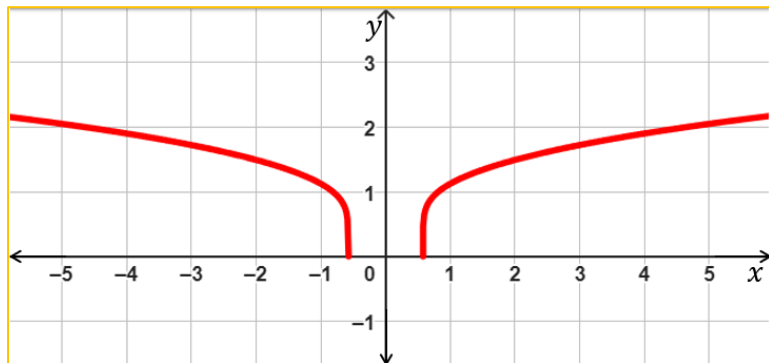
$$y^4 - 2 = x^3$$

$$\sqrt[3]{y^4 - 2} = x$$

Se observa que el índice es impar, entonces no se dan restricciones para "y", sin embargo, en la función: $y = \sqrt[4]{x^3 + 2}$, para cualquier valor del dominio, el valor de "y", siempre es positivo. Entonces:

$$\rightarrow \text{Ran}(f) = [0; +\infty)$$

2. $g(x) = \sqrt[6]{3x^2 - 1}$



Hallando el dominio de la función:

Como se trata de una función de índice par, entonces tiene la restricción:

$$3x^2 - 1 \geq 0$$

Resolvemos la inecuación cuadrática con puntos críticos:

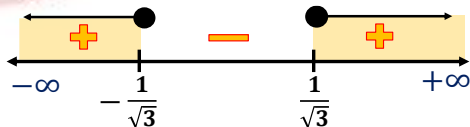
$$3x^2 - 1 = 0$$

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} ; x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\text{Dom}(g) = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$$

Hallando el rango de la función, despejando “x” y posteriormente aplicando restricciones si las hubiera:

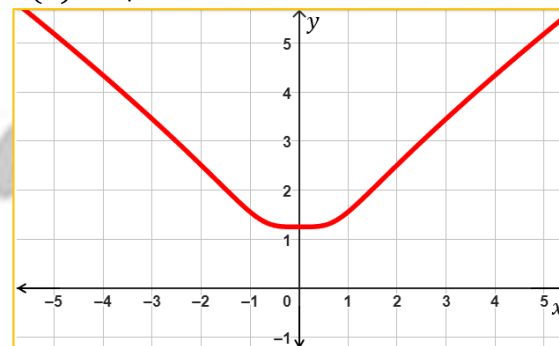
$$\begin{aligned} y &= \sqrt[6]{3x^2 - 1} \\ y^6 &= 3x^2 - 1 \\ y^6 + 1 &= 3x^2 \\ \frac{y^6 + 1}{3} &= x^2 \\ \sqrt{\frac{y^6 + 1}{3}} &= x \end{aligned}$$

Se observa que no hay restricciones, debido a que en el numerador está el polinomio positivo, es decir, que todos los valores del radicando son positivos. Sin embargo, en la función: $y = \sqrt[6]{3x^2 - 1}$, para cualquier valor del dominio, el valor de “y”, siempre es positivo.

Entonces:

$$\rightarrow \text{Ran}(g) = [0; +\infty)$$

$$3. \quad h(x) = \sqrt[5]{6x^4 + 3}$$



Hallando el dominio de la función:

Como se trata de una función de índice impar, entonces NO presenta restricciones

$$\rightarrow \text{Dom}(h) = \mathbb{R}$$

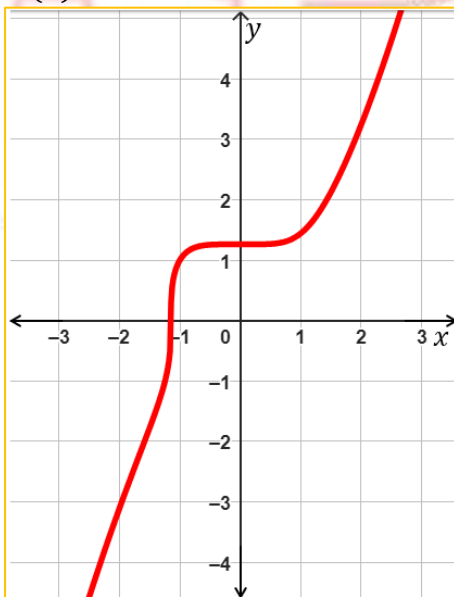
Hallando el rango de la función, despejando “x” y posteriormente aplicando restricciones si las hubiera:

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt[5]{6x^4 + 3} \\
 y^5 &= 6x^4 + 3 \\
 y^5 - 3 &= 6x^4 \\
 \frac{y^5 - 3}{6} &= x^4 \\
 \sqrt[4]{\frac{y^5 - 3}{6}} &= x
 \end{aligned}$$

Se aplica la restricción por tener índice par:

$$\begin{aligned}
 \frac{y^5 - 3}{6} &\geq 0 \\
 y^5 - 3 &\geq 0 \\
 y &\geq \sqrt[5]{3} \\
 \rightarrow \text{Ran}(h) &= [\sqrt[5]{3}; +\infty)
 \end{aligned}$$

4. $m(x) = \sqrt[3]{x^5 + 2}$



Hallando el dominio de la función:

Como se trata de una función de índice impar, entonces NO presenta restricciones:

$$\rightarrow \text{Dom}(m) = \mathbb{R}$$

Hallando el rango de la función, despejando “x” y posteriormente aplicando restricciones si las hubiera:

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt[3]{x^5 + 2} \\
 y^3 &= x^5 + 2 \\
 \sqrt[5]{y^3 - 2} &= x
 \end{aligned}$$

Se observa que el índice es impar, entonces no se dan restricciones para “y”, así mismo, en la función: $y = \sqrt[3]{x^5 + 2}$, para cualquier valor del dominio, el valor de “y”, puede ser positivo o negativo.

Entonces:

$$\rightarrow \text{Ran}(m) = \mathbb{R}$$

IMPORTANTE

Se observa que:

- Cuando el índice es “par” el dominio y el rango de la función NO son todos los reales (ejemplos 1 y 2), es decir se tienen dominios y rangos restringidos.
- Cuando el índice es impar el dominio de la función son todos los reales (ejemplos 3 y 4)
- Cuando el índice es impar y el grado del radicando es impar, tanto el dominio como el rango son todos los reales (ejemplo 4)

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:**1. Hallar el dominio y rango de la función:**

$$f(x) = \sqrt[6]{x^2 - 9}$$

- A. $Dom(f) = \langle -\infty; -9 \rangle \cup [9; +\infty)$; $Ran(f) = [0; +\infty)$
 B. $Dom(f) = [3; +\infty)$; $Ran(f) = [0; +\infty)$
 C. $Dom(f) = \langle -\infty; -3 \rangle \cup [3; +\infty)$; $Ran(f) = [3; +\infty)$
 D. $Dom(f) = \langle -\infty; -3 \rangle \cup [3; +\infty)$; $Ran(f) = [0; +\infty)$
 E. $Dom(f) = \langle -\infty; -1 \rangle \cup [1; +\infty)$; $Ran(f) = [1; +\infty)$

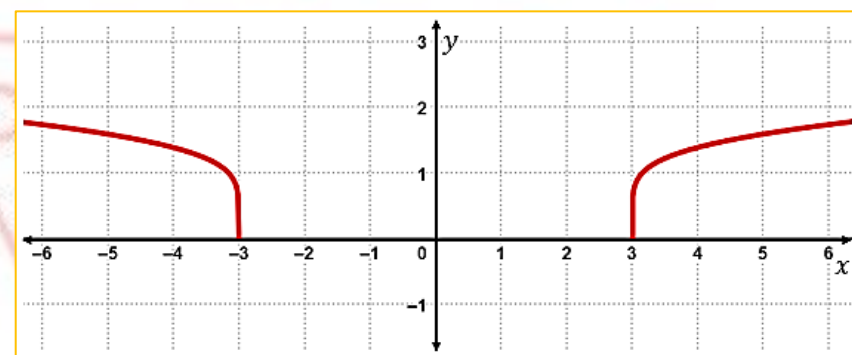
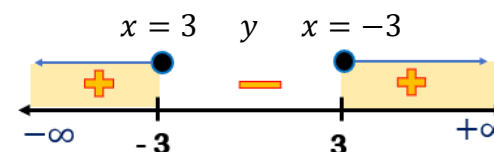
RESOLUCIÓN:

El dominio de la función está definido para:

$$x^2 - 9 \geq 0$$

$$(x - 3)(x + 3) \geq 0$$

Puntos críticos:



Entonces:

$$Dom(f) = \langle -\infty; -3 \rangle \cup [3; +\infty)$$

Observamos que en la gráfica el rango se define así:

$$Ran(f) = [0; +\infty)$$

Hallando el rango algebraicamente:

$$f(x) = \sqrt[6]{x^2 - 9}$$

Se observa que los valores que puede asumir "y" son positivos

$$f(x) = y = \sqrt[6]{x^2 - 9}$$

$$\Rightarrow y \geq 0$$

$$y \in [0; +\infty) \dots (I)$$

Despejamos "x"

$$y^6 = x^2 - 9$$

$$y^6 + 9 = x^2$$

$$\sqrt{y^6 + 9} = x$$

Observamos que el radicando siempre va a resultar un número positivo para cualquier valor de “y”, por lo tanto:

$$y \in \mathbb{R}$$

$$\langle -\infty; +\infty \rangle \dots (II)$$

Entonces el rango de la función queda definido así: $(I) \cap (II)$

$$[0; +\infty) \cap \langle -\infty; +\infty \rangle$$

$$\text{Ran}(f) = [0; +\infty)$$

RPTA: D

2. Hallar el dominio y rango de la función de índice impar:

$$g(x) = \sqrt[5]{x^2 - 1}$$

- A. $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$; $\text{Ran}(g) = [-1; +\infty)$
 B. $\text{Dom}(g) = [0; +\infty)$; $\text{Ran}(g) = [1; +\infty)$
 C. $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$; $\text{Ran}(g) = [0; +\infty)$
 D. $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}^+$; $\text{Ran}(g) = [-1; +\infty)$
 E. $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$; $\text{Ran}(g) = \mathbb{R}$

RESOLUCIÓN:

El dominio de la función está definido para todo valor real, ya que siendo una raíz de índice impar $n = 5$, no presenta alguna restricción. Entonces:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Hallando el rango de la función:

$$g(x) = y = \sqrt[5]{x^2 - 1}$$

Despejamos “x”

$$y^5 = x^2 - 1$$

$$y^5 + 1 = x^2$$

$$\sqrt{y^5 + 1} = x$$

Luego aplicamos la restricción para el radicando:

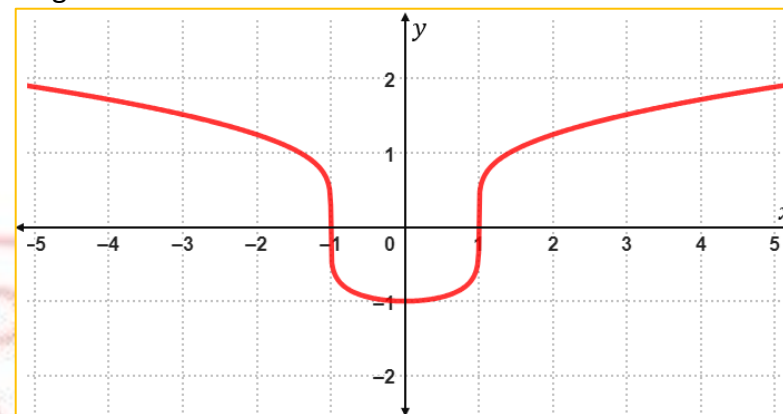
$$y^5 + 1 \geq 0$$

$$y^5 \geq -1$$

$$y \geq -1$$

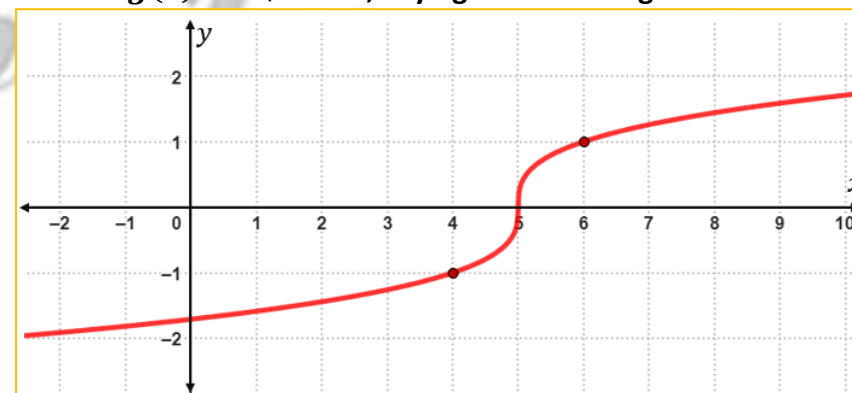
$$\text{Ran}(f) = [-1; +\infty)$$

Su gráfico es:



RPTA: A

3. Un tramo del circuito del examen de manejo en la Gerencia Regional de Transportes Arequipa, presenta la forma de la función irracional: $g(x) = a\sqrt[3]{x + m}$, cuyo gráfico es el siguiente:



Hallar el valor de “a + m”

- A. -5

- B. -4
C. -1
D. 4
E. 5

RESOLUCIÓN:

Tenemos la función irracional $g(x) = a^3\sqrt{x+m}$

Además, se observa en el gráfico que la función pasa por los puntos

$(4; -1)$ y $(6; 1)$

Reemplazamos:

En $(4; -1)$

$$-1 = a^3\sqrt{4+m}$$

$$\left(-\frac{1}{a}\right)^3 = 4+m$$

$$-\frac{1}{a^3} = 4+m$$

$$-\frac{1}{a^3} - m = 4 \dots (I)$$

En $(6; 1)$

$$1 = a^3\sqrt{6+m}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^3 = 6+m$$

$$\frac{1}{a^3} = 6+m$$

$$\frac{1}{a^3} - m = 6 \dots (II)$$

Resolvemos el sistema sumando $(I) + (II)$

$$\begin{cases} -\frac{1}{a^3} - m = 4 \\ \frac{1}{a^3} - m = 6 \\ \hline -2m = 10 \\ m = -5 \end{cases}$$

Reemplazando en (I)

$$-\frac{1}{a^3} - (-5) = 4$$

$$-\frac{1}{a^3} + 5 = 4$$

$$-\frac{1}{a^3} = -1$$

$$a = 1$$

Entonces el valor de " $a + m$ " es:

$$1 + (-5) = -4$$

RPTA: B

4. El dominio de la función irracional $f(x) = n^{2n}\sqrt{nx - 2n - 1}$ es $Dom(f) = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$, hallar el mínimo valor de " n ". ($n \geq 1; n \in \mathbb{N}$)

- A. -2
B. -1
C. 4
D. 5
E. 2

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado tenemos la función: $f(x) = n^{2n}\sqrt{nx - 2n - 1}$

Como se trata de una función de índice par, se cumple la restricción

$$nx - 2n - 1 \geq 0$$

$$nx \geq 2n + 1$$

$$x \geq \frac{2n + 1}{n}$$

$$Dom(f) = \left[\frac{2n + 1}{n}; +\infty\right)$$

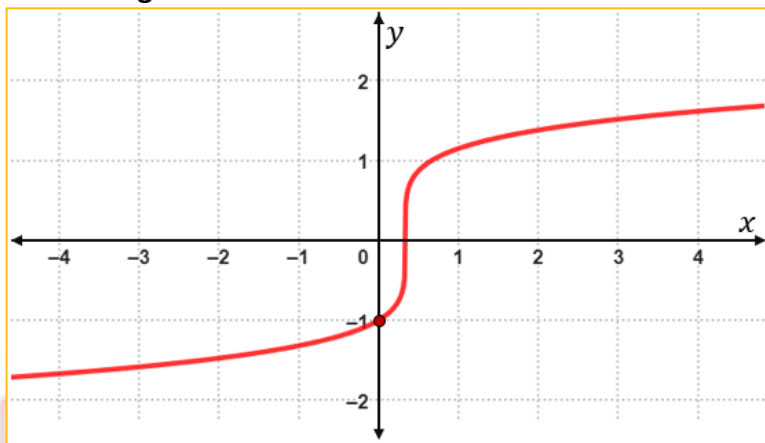
Comparamos con los datos del enunciado: $Dom(f) = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$

$$\frac{2n + 1}{n} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} 4n + 2 &= 5n \\ n &= 2 \end{aligned}$$

RPTA: E

5. Hallar el valor de “a” de índice impar: $g(x) = \sqrt[5]{x - 3a}$, si su representación gráfica es:



- A. $a = \frac{1}{3}$
- B. $a = -\frac{1}{3}$
- C. $a = 3$
- D. $a = -1$
- E. $a = 1$

RESOLUCIÓN:

En la gráfica, se observa que la función pasa por el punto $(0; -1)$
Reemplazamos:

$$\begin{aligned} \text{En } (0; -1) \quad -1 &= \sqrt[5]{x - 3a} \\ -1 &= \sqrt[5]{0 - 3a} \\ -1 &= \sqrt[5]{-3a} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} = a$$

RPTA: A

6. Hallar el dominio de la función de índice par:

$$f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 5}$$

- A. $\text{Dom}(f) = [-1; +\infty)$
- B. $\text{Dom}(f) = [5; +\infty)$
- C. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- D. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$
- E. $\text{Dom}(f) = \langle -\infty; -5] \cup [5; +\infty)$

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado tenemos la función: $f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 5}$

Observamos que la función es de índice par, por lo que su radicando debe ser mayor o igual que cero:

$$x^2 + 5 \geq 0$$

Lo cual se cumple para cualquier valor real de “x” por ser el polinomio positivo $\Delta < 0$.

$$\text{Entonces } \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

RPTA: C

7. Hallar el dominio y rango de la función:

$$f(x) = 3 - \sqrt[6]{64 - x^2}$$

- A. $\text{Dom}(f) = [-8; 8]; \text{Ran}(f) = [8; +\infty)$
- B. $\text{Dom}(f) = [8; +\infty); \text{Ran}(f) = [1; 3]$
- C. $\text{Dom}(f) = \langle -\infty; -8] \cup [8; +\infty); \text{Ran}(f) = [1; 3]$
- D. $\text{Dom}(f) = [-8; 8]; \text{Ran}(f) = [1; 3]$
- E. $\text{Dom}(f) = [-8; 8]; \text{Ran}(f) = \mathbb{R}$

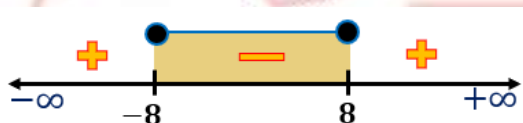
RESOLUCIÓN:

Según el enunciado tenemos la función: $f(x) = 3 - \sqrt[6]{64 - x^2}$
 Observamos que la función es de índice par, por lo que su radicando debe ser mayor o igual que cero:

$$\begin{aligned} 64 - x^2 &\geq 0 \\ 8^2 - x^2 &\geq 0 \\ x^2 - 8^2 &\leq 0 \\ (x + 8)(x - 8) &\leq 0 \end{aligned}$$

Puntos críticos:

$$x = -8 \quad y \quad x = 8$$



Entonces $Dom(f) = [-8; 8]$

Para hallar el rango reemplazamos en el dominio:

Cuando $x = 8$

$$\begin{aligned} f(8) &= 3 - \sqrt[6]{64 - 8^2} \\ f(8) &= 3 \end{aligned}$$

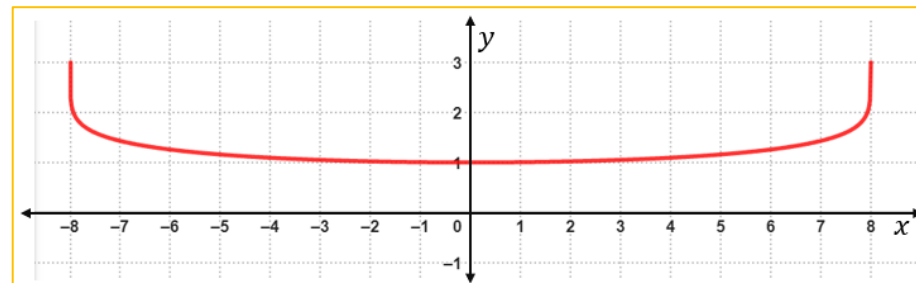
Cuando $x = -8$

$$\begin{aligned} f(-8) &= 3 - \sqrt[6]{64 - (-8)^2} \\ f(-8) &= 3 \\ \Rightarrow (8; 3) \quad y \quad (-8; 3) \end{aligned}$$

Cuando $x = 0$

$$\begin{aligned} y &= 3 - \sqrt[6]{64 - 0^2} \\ y &= 3 - \sqrt[6]{2^6} \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Graficando:



El rango será: $Ran(f) = [1; 3]$

RPTA: D

8. Hallar el dominio de la función de índice par:

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 + 4}{x - 3}}$$

- A. $Dom(f) = \langle 3; +\infty \rangle$
- B. $Dom(f) = \langle -3; +\infty \rangle$
- C. $Dom(f) = \langle 0; +\infty \rangle$
- D. $Dom(f) = \langle 1; +\infty \rangle$
- E. $Dom(f) = \langle 4; +\infty \rangle$

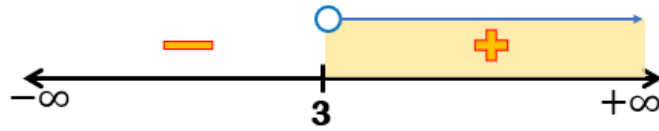
RESOLUCIÓN:

Por tratarse de una función de índice par:

$$\frac{x^2 + 4}{x - 3} \geq 0$$

Puntos críticos:

$$\begin{aligned} x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$



$$\text{Dom}(f) = \langle 3; +\infty \rangle$$

RPTA: A

SEPRUNSA
na Nueva Imagen

7.2 OPERACIONES CON FUNCIONES Y FUNCIÓN COMPUESTA

7.2.1 OPERACIONES CON FUNCIONES

OPERACIÓN CON FUNCIONES

Dadas dos funciones reales f y g cuyas reglas de correspondencia son:
 $f(x) \wedge g(x)$ se definen cuatro operaciones:

Adición:

$$f + g: \begin{cases} \text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{cases}$$

Sustracción:

$$f - g: \begin{cases} \text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \\ (f - g)(x) = f(x) - g(x) \end{cases}$$

Multiplicación:

$$f \cdot g: \begin{cases} \text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \end{cases}$$

División:

$$\frac{f}{g}: \begin{cases} \text{Dom}(f/g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \wedge g(x) \neq 0 \\ (f/g)(x) = f(x)/g(x) \end{cases}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Si: $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = x+2$

Hallar: $(f+g)(14) + \left(\frac{g}{f}\right)(23)$

A. 24

B. 25

C. 26

D. 27

E. 28

RESOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} & (f+g)(14) + \left(\frac{g}{f}\right)(23) \\ & \rightarrow f(14) + g(14) + \frac{g(23)}{f(23)} \\ & \rightarrow \sqrt{14+2} + (14+2) + \frac{23+2}{\sqrt{23+2}} \\ & \rightarrow 4 + 16 + \frac{25}{5} \\ & \therefore 20 + 5 = 25 \end{aligned}$$

RPTA: B

2. Sean las funciones $f(x) = \sqrt{5-x}$ y $g(x) = x^2 - 1$.
 Hallar $(f+g)(x)$ y el dominio de esta operación.

A. $\sqrt{5-x} + x^2 - 1; \text{Dom}(f+g) =]-5; 5]$ B. $\sqrt{5-x} + x^2 + 1; \text{Dom}(f+g) =]5; 11]$ C. $\sqrt{5-x} + x^2 - 1; \text{Dom}(f+g) =]-\infty; 5]$ D. $\sqrt{5-x} + x^2 - 1; \text{Dom}(f+g) =]-\infty; 4]$ E. $\sqrt{4-x} + x^2; \text{Dom}(f+g) =]-5; 5]$

RESOLUCIÓN:

Tenemos: $f(x) = \sqrt{5-x}$ y $g(x) = x^2 - 1$

Sumamos:

$$f(x) + g(x) = \sqrt{5-x} + x^2 - 1$$

Hallamos el dominio de f

$$\begin{aligned} 5 - x &\geq 0 \\ x &\leq 5 \\ \text{Dom}(f) &=]-\infty; 5] \end{aligned}$$

Hallamos el dominio de g

$$\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

$$\text{Luego: } \text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) =]-\infty; 5]$$

RPTA: C

3. Sea $f = \{(1; 0), (2; 3), (0; 5)\}$ y $g = \{(0; 3), (2; 0), (5; 2)\}$. Hallar " f/g " y dar como respuesta el rango de " f/g ".

- A. $\left\{\frac{3}{5}\right\}$
- B. $\left\{\frac{5}{3}; 2\right\}$
- C. $\left\{\frac{5}{3}\right\}$
- D. $\left\{1; \frac{1}{2}\right\}$
- E. $\left\{\frac{2}{5}\right\}$

RESOLUCIÓN:

$$\text{Tenemos: } f = \{(1; 0), (2; 3), (0; 5)\} \text{ y } g = \{(0; 3), (2; 0), (5; 2)\}$$

$$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$\text{Dom}(f) = \{1; 2; 0\} \quad ; \quad \text{Dom}(g) = \{0; 2; 5\}$$

$$\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{0; 2\}$$

Solamente tomaremos los pares ordenados que tienen como dominio a $\{0; 2\}$

$$f = \{(1; 0), (2; 3), (0; 5)\} \text{ y } g = \{(0; 3), (2; 0), (5; 2)\}$$

Para $(2; 3)$ y $(2; 0)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{3}{0} = \text{Indeterminado}$$

Para $(0; 5)$ y $(0; 3)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Por lo tanto: } \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

RPTA: C

$$4. \text{ Si: } f = \{(2; 9), (3; 5), (7; 1), (9; -5)\}$$

$$g = \{(-2; 9), (3; 6), (7; 8), (-9; -5)\}$$

Hallar: $3f + 2g$

- A. $\{(3; 27), (7; 19)\}$
- B. $\{(3; 26), (7; 24)\}$
- C. $\{(2; 12), (6; 12)\}$
- D. $\{(2; 12), (6; 24)\}$
- E. $\{(3; 26), (7; 21)\}$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$f = \{(2; 9), (3; 5), (7; 1), (9; -5)\}$$

$$g = \{(-2; 9), (3; 6), (7; 8), (-9; -5)\}$$

Nos pide:

$$3f + 2g$$

Hallamos la intersección de dominios:

$$Df \cap Dg = \{3; 7\}$$

Serán también:

$$D(3f + 2g) = \{3; 7\}$$

Entonces:

$$3f + 2g = \{(3; 3(5) + 2(6)), (7; 3(1) + 2(8))\}$$

$$\therefore 3f + 2g = \{(3; 27), (7; 19)\}$$

RPTA: B

5. El número de toneladas de pescado que extrae una embarcación en el océano pacífico está dado por: $(f \cdot g)(3)$ Además, se sabe que:

$$f(x) = 3x^5 + 2$$

$$g(x) = 9x^4 - 8$$

Calcular el número de toneladas de pescado que a extraído la embarcación.

- A. 252 501
- B. 255 000
- C. 525 200
- D. 527 051
- E. 250 200

RESOLUCIÓN:

Se sabe que: $(f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3)$
Hallamos $f(3)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^5 + 2 \\ f(3) &= 3 \cdot 3^5 + 2 \\ f(3) &= 731 \end{aligned}$$

Hallamos $g(3)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= 9x^4 - 8 \\ g(3) &= 9 \cdot 3^4 - 8 \\ g(3) &= 721 \end{aligned}$$

Remplazamos:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(3) &= f(3) \cdot g(3) \\ (f \cdot g)(3) &= 731(721) \\ \therefore (f \cdot g)(3) &= 527\,051 \end{aligned}$$

6. Siendo: $f(\sqrt[3]{x^3 + 19}) = 5x - 2$
 $g(\sqrt[4]{x^2 + 17}) = 2x^2 - 1$.

Considerar las soluciones de las raíces los valores positivos. Calcular:

$$(f \cdot g)(3)$$

- A. 4000
- B. 2200
- C. 2500

- D. 1000
- E. 1016

RESOLUCIÓN:

Se sabe que: $(f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3) \dots (I)$

Hallamos: $f(3)$

$$\begin{aligned} f(\sqrt[3]{x^3 + 19}) &= 5x - 2 \\ f(\sqrt[3]{2^3 + 19}) &= 5(2) - 2 \\ f(3) &= 8 \end{aligned}$$

Hallamos $g(3)$:

$$\begin{aligned} g(\sqrt[4]{x^2 + 17}) &= 2x^2 - 1 \\ g(\sqrt[4]{8^2 + 17}) &= 2(8)^2 - 1 \\ g(3) &= 127 \end{aligned}$$

Reemplazando en (I):

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(3) &= 8(127) \\ \therefore (f \cdot g)(3) &= 1016 \end{aligned}$$

RPTA: E

7. El grupo musical "X Dinero", tuvo un concierto en el "Mall Ventura", obteniendo una ganancia (en dólares), cuyo valor es el resultado de $(f + g)(200)$, si:

$$f(x) = \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)} + 1$$

$$g(x) = \{(200; -601)\}$$

¿Cuál es la ganancia del grupo "X Dinero"?

- A. 42 000
- B. 40 000
- C. 45 000
- D. 44 000
- E. 46 000

RESOLUCIÓN:

Se sabe que:

$$(f + g)(200) = f(200) + g(200)$$

Hallamos: $f(200)$

$$f(x) = \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)} + 1$$

Ordenando:

$$f(200) = \sqrt{x(x+3)(x+1)(x+2)} + 1$$

$$f(200) = \sqrt{(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2)} + 1$$

Cambio de variable por: $m = x^2 + 3x$.

$$f(200) = \sqrt{(m)(m+2)} + 1 = \sqrt{m^2 + 2m + 1}$$

$$f(200) = \sqrt{(m+1)^2}$$

$$f(200) = m + 1$$

$$f(200) = x^2 + 3x + 1$$

Reemplazando:

$$f(200) = 200^2 + 3(200) + 1$$

$$f(200) = 40\,601$$

Hallamos $g(200)$: $g = \{(200; -601)\}$

$$g(200) = -601$$

Remplazamos:

$$(f + g)(200) = f(200) + g(200)$$

$$(f + g)(200) = 40\,601 - 601$$

$$\therefore (f + g)(200) = 40\,000$$

RPTA: B**8. Siendo:** $f(\sqrt{x}) = 5x - 7$, $g(8x - 3) = 9x - 2$ **Calcular:** $(10f + 5g)(5)$

- A. 1112
- B. 1155
- C. 1215
- D. 1260
- E. 1100

RESOLUCIÓN:

Se sabe que:

$$(10f + 5g)(5) = 10f(5) + 5g(5)$$

Hallamos $f(5)$:

$$f(\sqrt{x}) = 5x - 7$$

$$f(\sqrt{25}) = 5(25) - 7$$

$$f(5) = 118$$

Entonces: $10f(5) = 1180$ Hallamos $g(9)$:

$$g(8x - 3) = 9x - 2$$

$$g(8(1) - 3) = 9(1) - 2$$

$$g(5) = 7$$

Entonces: $5g(5) = 35$

Reemplazamos en:

$$(10f + 5g)(5) = 10f(5) + 5g(5)$$

$$(10f + 5g)(5) = 1180 + 35$$

$$\therefore (10f + 5g)(5) = 1215$$

RPTA: C**7.2.2 FUNCIÓN COMPUESTA**

FUNCIÓN COMPUESTA

Dadas dos funciones " f " y " g ", se define la función compuesta f con g , denotada por $f \circ g$, como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

También " $f \circ g$ " se llama función " f compuesta con g ", o "la composición entre f y g ".

El dominio de $(f \circ g)$ es el conjunto de todos los valores de " x " del dominio de g tales que $g(x)$ pertenece al dominio de f .

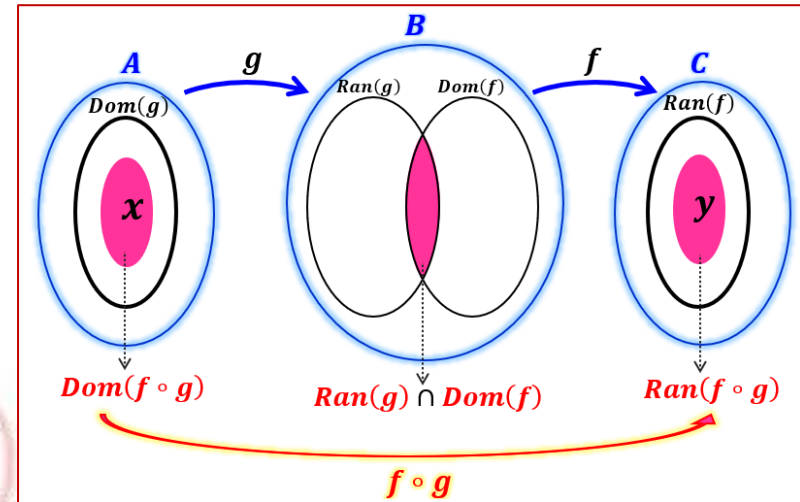
$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x/x \in \text{Dom}(g) \text{ y } g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

Para que exista la composición de funciones $f \circ g$ es necesario que:

$$\text{Ran}(g) \cap \text{Dom}(f) \neq \emptyset$$

Esquema que representa la composición de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Considerando que las funciones, $g: A \rightarrow B$ y $f: B \rightarrow C$



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Sean f y g funciones tales que:

$$f(x) = x^2 - 2x; \quad g(x) = x + 3$$

Halle suma de coeficientes de: $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x)$

- A. 30
- B. 70
- C. 80
- D. 10
- E. 20

RESOLUCIÓN:

Hallamos $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = (x + 3)^2 - 2(x + 3)$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 6x + 9 - 2x - 6$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 3$$

Hallamos $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 3$$

Nos pide la suma de coeficientes:

$$1 + 4 + 3 + 1 - 2 + 3 = 10$$

RPTA: D

2. Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 2x + 3$; $g(x) = x - 5$

Hallar:

$$\left[\frac{(g \circ f)(1) + (f \circ g)(2)(f \circ g)(3) - (g \circ g)(2)}{(f \circ g)(2)} \right]^{-2}$$

- A. 2/45
- B. 36/121
- C. 1/16
- D. 4/5
- E. 3/52

RESOLUCIÓN:

Tenemos: $f(x) = x^2 + 2x + 3$; $g(x) = x - 5$

Nos piden hallar:

$$\left[\frac{(g \circ f)(1) + (f \circ g)(2)(f \circ g)(3) - (g \circ g)(2)}{(f \circ g)(2)} \right]^{-2}$$

Hallamos $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 5$$

$$g(f(x)) = x^2 + 2x + 3 - 5$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 2x - 2$$

Hallamos $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 2g(x) + 3$$

$$f(g(x)) = (x - 5)^2 + 2(x - 5) + 3$$

$$(f \circ g)(x) = (x - 5)^2 + 2(x - 5) + 3$$

Hallamos $(g \circ g)(x)$

$$(g \circ g)(x) = g(x) - 5$$

$$(g \circ g)(x) = x - 5 - 5$$

$$(g \circ g)(x) = x - 10$$

Luego:

$$(g \circ f)(1) = 1^2 + 2(1) - 2$$

$$(g \circ f)(1) = 1$$

$$(f \circ g)(2) = (2 - 5)^2 + 2(2 - 5) + 3$$

$$(f \circ g)(2) = 9 - 6 + 3$$

$$(f \circ g)(2) = 6$$

$$(f \circ g)(3) = (3 - 5)^2 + 2(3 - 5) + 3$$

$$(f \circ g)(3) = 4 - 4 + 3$$

$$(f \circ g)(3) = 3$$

$$(g \circ g)(2) = 2 - 10$$

$$(g \circ g)(2) = -8$$

Reemplazamos en:

$$\left[\frac{(g \circ f)(1) + (f \circ g)(2)(f \circ g)(3) - (g \circ g)(2)}{(f \circ g)(2)} \right]^{-2}$$

$$\left[\frac{1 + (6)(3) + 8}{6} \right]^{-2}$$

$$\left[\frac{9}{2} \right]^{-2} = \frac{4}{81}$$

RPTA: D

3. Sean las funciones definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x - 1}; x \in [-1; 3]$$

$$g(x) = x^2 + 2x; x \in [0; 5]$$

Entonces el dominio de $f \circ g$ es:

- A. $\langle 0; 1 \rangle$
- B. $[0; 1]$
- C. $[-1; 1]$
- D. $\langle -2; 5 \rangle$
- E. $\langle -1; 1 \rangle$

RESOLUCIÓN:

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x/x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x/x \in [0; 5] \wedge x^2 + 2x \in [-1; 3]\}$$

Pero: $x^2 + 2x \in [-1; 3] \rightarrow -1 \leq x^2 + 2x \leq 3$

Completando cuadrados

$$-1 + 1 \leq x^2 + 2x + 1 \leq 3 + 1$$

$$0 \leq (x + 1)^2 \leq 4$$

$$-2 \leq (x + 1) \leq 2$$

$$-2 - 1 \leq x \leq 2 - 1$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x/x \in [0; 5] \wedge x \in [0; 1]\}$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = [0; 1]$$

RPTA: B

4. Sean $f(x) = \sqrt{1+x}$ y $g(x) = 2x - 1$. Hallar $f \circ g$ y determinar su dominio.

A. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x}$; $\text{Dom}(f \circ g) = [0; +\infty)$

B. $(f \circ g)(x) = \sqrt{2x}$; $\text{Dom}(f \circ g) = [0; +\infty)$

C. $(f \circ g)(x) = -\sqrt{2x}$; $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$

D. $(f \circ g)(x) = 2 - \sqrt{1+x}$; $\text{Dom}(f \circ g) = [0; +\infty)$

E. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x}$; $\text{Dom}(f \circ g) = [-1; +\infty)$

RESOLUCIÓN:

Para f observamos que: $1 + x \geq 0$

$$x \geq -1$$

$$\text{Dom}(f) = [-1; +\infty)$$

Para g observamos que: $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$

Hallamos $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 + g(x)}$$

$$f(g(x)) = \sqrt{1 + 2x - 1}$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{2x}$$

Para calcular el dominio de $f \circ g$ tomamos en cuenta el $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ y nos restringimos a aquellas "x" tales que $g(x)$ está en $[-1; +\infty) = \text{Dom}(f)$, esto es:

$$g(x) \geq -1$$

$$2x - 1 \geq -1$$

$$x \geq 0$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = [0; +\infty)$$

RPTA: B

5. Si $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = x + a$; determinar el valor de "a" de modo que:

$$(f \circ g)(3) = (g \circ f)(a - 1)$$

A. -8

B. -8/7

C. 8/7

D. 1/7

E. -1/8

RESOLUCIÓN:

Hallamos las funciones compuestas:

$$(f \circ g)(x) = (x + a)^2 + 2$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 2 + a$$

Tenemos:

$$(f \circ g)(3) = (g \circ f)(a - 1)$$

$$(3 + a)^2 + 2 = (a - 1)^2 + 2 + a$$

$$9 + 6a + a^2 = a^2 - 2a + 1 + a$$

$$7a = -8$$

$$a = -\frac{8}{7}$$

RPTA: B

6. Hallar las funciones lineales $f(x)$ que verifiquen la condición

$$(f \circ f)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{9-4x}{x}; \forall x \neq 0$$

dar como respuesta la suma de coeficientes de las funciones lineales obtenidas.

- A. 0
- B. -3
- C. -2
- D. 3
- E. 1

RESOLUCIÓN:

Tenemos $(f \circ f)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{9-4x}{x}; \forall x \neq 0$

Separamos los denominadores:

$$(f \circ f)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{9}{x} - 4$$

$$(f \circ f)\left(\frac{1}{x}\right) = 9\left(\frac{1}{x}\right) - 4$$

$$(f \circ f)(x) = 9x - 4$$

Como $f(x)$ es lineal, sea $f(x) = ax + b$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b$$

$$(f \circ f)(x) = a^2x + ab + b$$

Luego:

$$9x - 4 = a^2x + ab + b$$

Por comparación:

- $9x = a^2x$ $a^2 = 9$ $\rightarrow a = 3 \vee a = -3$
- $-4 = ab + b$
- $-4 = 3b + b$
- $-4 = 4b$
- $-1 = b$
- $-4 = ab + b$
- $-4 = -3b + b$
- $-4 = -2b$

$$2 = b$$

Entonces las funciones lineales son:

- $a = 3 \wedge b = -1$
 $\Rightarrow f(x) = 3x - 1$
- $a = -3 \wedge b = 2$
 $\Rightarrow f(x) = -3x + 2$

Suma de coeficientes de ambas funciones:

$$3 - 3 - 1 + 2 = 1$$

RPTA: E

7. Sean f y g funciones tales que:

$$f(x) = x^2 - 2x; \quad g(x) = x + 3$$

Hallar $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x)$

- A. $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = x^2 + 2x + 6$
- B. $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = 2x^2 + 2x + 6$
- C. $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = 2x^2 + x + 6$
- D. $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = x^2 + 4x + 3$
- E. $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 6$

RESOLUCIÓN:

Hallamos la función compuesta $(f \circ g)(x)$:

$$(f \circ g)(x) = (x + 3)^2 - 2(x + 3)$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 6x + 9 - 2x - 6$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 3$$

Hallamos la función compuesta $(g \circ f)(x)$:

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 3$$

Nos piden hallar:

$$(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = x^2 + 4x + 3 + x^2 - 2x + 3$$

$$(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = 2x^2 + 2x + 6$$

RPTA: B

8. Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{25 - x}$; $g(x) = x^2 + 9$, obtener $(f \circ g)(x)$ y su dominio.

- A. $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $Dom(f \circ g) = [-4; 4]$
 B. $(f \circ g)(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $Dom(f \circ g) = [-4; 0]$
 C. $(f \circ g)(x) = \sqrt{4 - x}$; $Dom(f \circ g) = [-4; 4]$
 D. $(f \circ g)(x) = \sqrt{16 - x^2}$; $Dom(f \circ g) = [-4; 4]$
 E. $(f \circ g)(x) = \sqrt{16 - x^2}$; $Dom(f \circ g) = [0; 4]$

RESOLUCIÓN:

Tenemos: $f(x) = \sqrt{25 - x}$; $g(x) = x^2 + 9$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{25 - (x^2 + 9)}$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{25 - x^2 - 9}$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

Hallando el dominio $f \circ g$

$$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) / g(x) \in Dom(f)\}$$

$$Dom(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 9 \leq 25\}$$

$$Dom(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 16\}$$

$$Dom(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x^2} \leq \sqrt{16}\}$$

$$Dom(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 4\}$$

$$Dom(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x \leq 4\}$$

$$Dom(f \circ g) = [-4; 4]$$

RPTA: D

7.3 TIPOS DE FUNCIONES: INYECTIVA, SURYECTIVA Y BIYECTIVA

7.3.1 FUNCIÓN INYECTIVA O FUNCIÓN UNIVALENTE

FUNCIÓN INYECTIVA

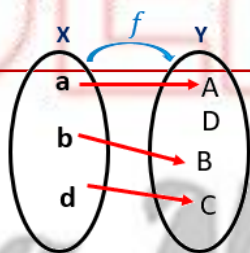
Una función es inyectiva si y solo si a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas, es decir:

$$\text{Si: } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

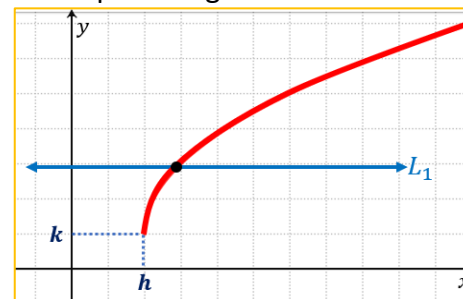
En forma equivalente:

$$\text{Si: } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Se observa en el gráfico siguiente como todos los elementos del conjunto X , tienen diferente imagen en el conjunto Y .



En toda función inyectiva se cumple que cualquier recta horizontal intercepta a su gráfica en no más de un punto.



RECUERDA QUE



La función " f " es inyectiva si cuando cada elemento del rango está relacionado con un solo elemento del dominio, es decir:

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1; x_2 \in \text{Dom}(f)$$

EJEMPLO:

Indica si la siguiente función es inyectiva:

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x + 3}$$

RESOLUCIÓN:

Para determinar la inyectividad de la función " f " en todo su dominio

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$, se tiene que cumplir:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{2x_1 - 3}{x_1 + 3} = \frac{2x_2 - 3}{x_2 + 3}$$

$$\frac{2x_1 - 3}{x_1 + 3} - 2 = \frac{2x_2 - 3}{x_2 + 3} - 2$$

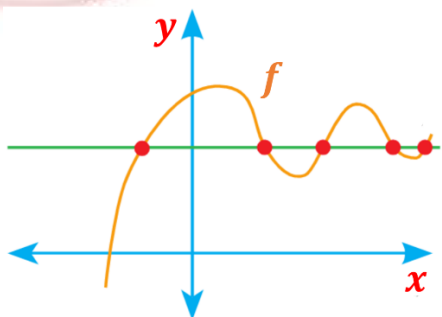
$$\frac{-9}{x_1 + 3} = \frac{-9}{x_2 + 3}$$

$$x_1 + 3 = x_2 + 3 \rightarrow x_1 = x_2$$

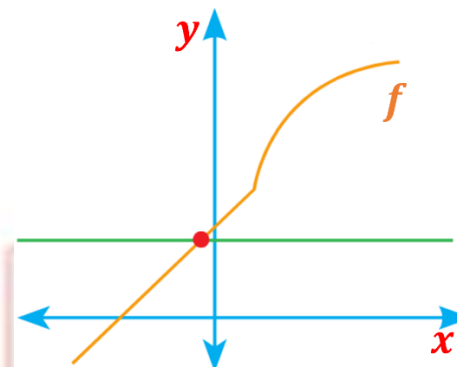
Por lo tanto, la función " f " es inyectiva.

Prueba de la recta horizontal: Se utiliza para determinar de manera gráfica si una función es inyectiva.

Si una recta horizontal trazada corta a la gráfica en más de un punto, la función no es inyectiva.



Si una recta horizontal trazada corta a la gráfica en solo un punto, la función es inyectiva.



7.3.2 FUNCIÓN SURYECTIVA

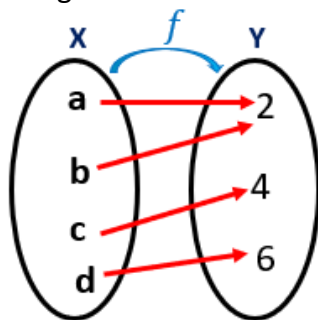
FUNCIÓN SURYECTIVA

Es aquella donde cada elemento del conjunto de llegada (Rango) es imagen de algún elemento del conjunto de partida (Dominio). Es decir, el conjunto de llegada e imagen son iguales.

Sea $f: A \rightarrow B$ una función. La función f es suryectiva o sobreyectiva si para todo $y \in B$, existe $x \in A$, tal que $f(x) = y$. Es decir, f es suryectiva si:

$$Ran(f) = B.$$

En el gráfico siguiente se observa como todos los elementos del conjunto Y, son imagen de los elementos del conjunto X.



Entonces la $f: X \rightarrow Y$ es sobreyectiva

EJEMPLO:

Indica si la función $f: [2; 5) \rightarrow [7; 13)$, dada por $f(x) = 2x + 3$, es sobreyectiva.

RESOLUCIÓN:

Por doble inclusión se demuestra que:

$$Ran(f) = [7; 13)$$

($\subseteq$) Sea " y " $\in Ran(f) \rightarrow \exists x \in \mathbb{R} / y = 2x + 3$

$$x \in [2; 5) \rightarrow 2 \leq x < 5$$

$$4 \leq 2x < 10$$

$$7 \leq 2x + 3 < 13 \rightarrow y \in [7; 13)$$

$$\therefore Ran(f) \subseteq [7; 13) \dots (I)$$

($\supseteq$) Sea " y " $\in [7; 13)$, considera $x = \frac{y-3}{2}$, desde que:

$$7 \leq y < 13$$

$$4 \leq y - 3 < 10$$

$$2 \leq \frac{y-3}{2} < 5 \rightarrow x \in [2; 5)$$

Desde que $f(x) = 2\left(\frac{y-3}{2}\right) + 3 = y$, se tiene que

$$y = Ran(f) \rightarrow [7; 13) \subseteq Ran(f) \dots (II)$$

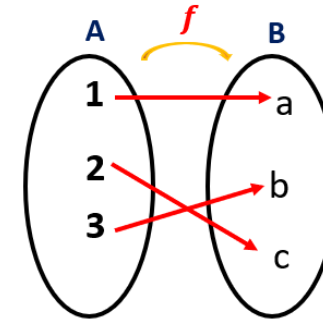
De (I) y (II) se tiene $Ran(f) = [7; 13)$

Por lo tanto, " f " es sobreyectiva.

7.3.3 FUNCIÓN BIYECTIVA

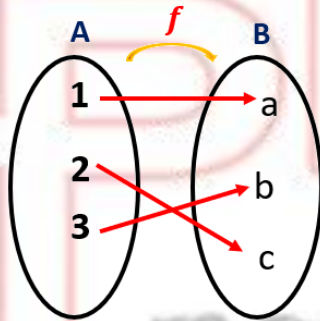
FUNCIÓN BIYECTIVA

Sea $f: A \rightarrow B$ una función. La función f es biyectiva si y solo si es inyectiva y suryectiva.



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Dada la función $f: A \rightarrow B$ definida por el diagrama sagital. Indicar si es verdadero o falso



- I. Es inyectiva
- II. Es suryectiva
- III. Es biyectiva

- A. VVF
- B. VVV
- C. FVV
- D. FFV
- E. FFF

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

- I. Es inyectiva
VERDADERO, porque para cada elemento del primer conjunto le corresponde una imagen única
- II. Es suryectiva
VERDADERO, porque el rango de la función comprende a todos los elementos del conjunto de llegada.
- III. Es biyectiva
VERDADERO, porque cumple con ser inyectiva y sobreyectiva

RPTA: B

2. Hallar el valor de $x^2 - y^2$ sabiendo que la función f es inyectiva $f = \{(5; -1), (-3; 2), (2x - y; -1), (y - x; 2), (x; 6)\}$

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$f = \{(5; -1), (-3; 2), (2x - y; -1), (y - x; 2), (x; 6)\}$$

Como se trata de una función inyectiva la segunda componente de cada par ordenado no se puede repetir, entonces:

- $(-3; 2) = (y - x; 2)$
 $y - x = -3 \dots (I)$
- $(5; -1) = (2x - y; -1)$
 $2x - y = 5 \dots (II)$

Resolvemos el sistema, ordenando y sumando MAM

$$\begin{cases} y - x = -3 \\ -y + 2x = 5 \end{cases}$$

$$\underline{\quad \quad \quad} \quad x = 2 \quad y = -1$$

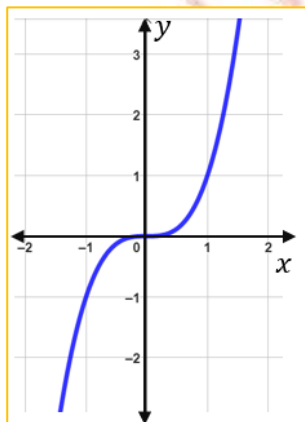
Entonces hallamos: $x^2 - y^2$

$$(2)^2 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$$

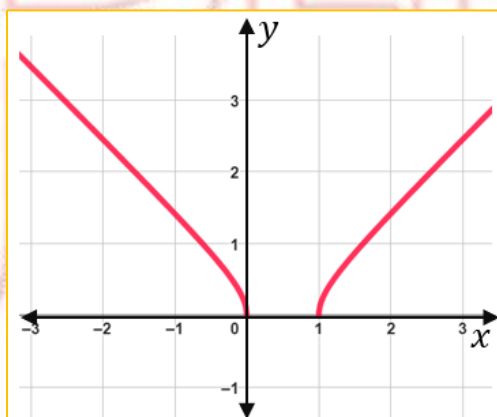
RPTA: B

3. Indicar cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones inyectivas

I.

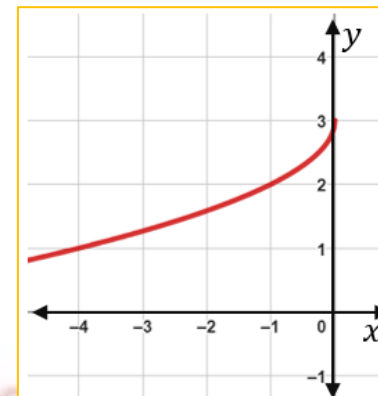
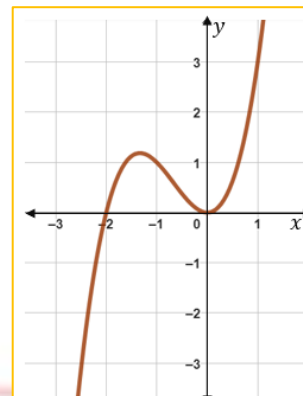


II.



III.

IV.



RESOLUCIÓN:

De acuerdo a la afirmación: "En toda función inyectiva se cumple que cualquier recta horizontal intercepta a su gráfica en no más de un punto". Observamos que:

- I. Si es inyectiva
- II. No es inyectiva
- III. No es inyectiva
- IV. Si es inyectiva

4. Identificar cuáles de las siguientes funciones son sobreyectivas

I. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{x+1}{4x}$

II. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; g(x) = x^2 + 6x + 9$

- A. $f(x)$ es sobreyectiva; $g(x)$ no es sobreyectiva
- B. $f(x)$ no es sobreyectiva; $g(x)$ es sobreyectiva
- C. $f(x)$ es sobreyectiva; $g(x)$ es sobreyectiva
- D. $f(x)$ no es sobreyectiva; $g(x)$ no es sobreyectiva
- E. $f(x)$ es sobreyectiva; $g(x)$ es inyectiva

RESOLUCIÓN:

Analizando la función $f(x)$:

$$y = \frac{x+1}{4x}$$

$$4xy = x+1$$

$$4xy - x = 1$$

$$x(4y-1) = 1$$

$$x = \frac{1}{4y-1}$$

$$4y-1 \neq 0$$

$$y \neq \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \text{Ran}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

Como el $\text{Ran}(f) \neq \mathbb{R}$

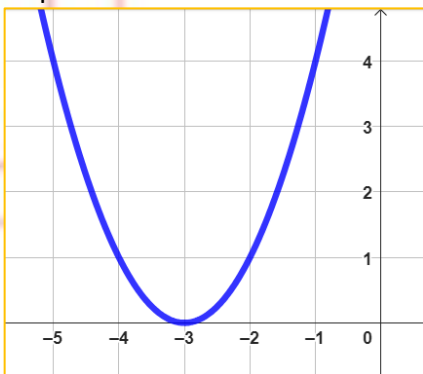
Entonces, no es una función sobreyectiva.

Analizando la función $g(x)$:

$$g(x) = x^2 + 6x + 9$$

$$g(x) = (x+3)^2$$

Vértice: $V(-3; 0)$ y la parábola es cóncava hacia arriba:



$$\rightarrow \text{Ran}(f) = [0; +\infty)$$

Como el $\text{Ran}(f) = \mathbb{R}^+$

Entonces, si es una función sobreyectiva.

5. Hallar el conjunto de llegada, para que la función sea sobreyectiva sabiendo que la función es $f(x) = 3x^2 + 2$.

- A. $[3; +\infty)$
- B. $[0; +\infty)$
- C. $[2; +\infty)$
- D. $[9; +\infty)$
- E. $[-2; +\infty)$

RESOLUCIÓN:

Para que una función sea sobreyectiva el conjunto de llegada debe ser el rango de la función.

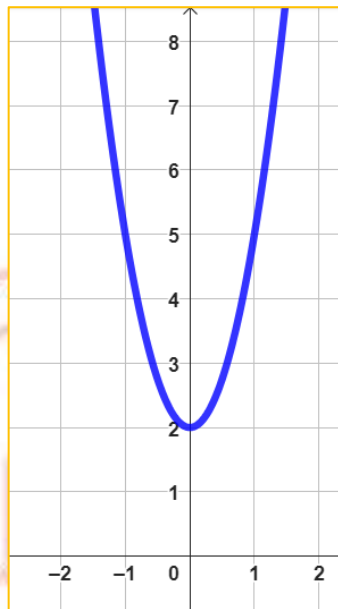
Del enunciado: $f(x) = 3x^2 + 2$

Hallamos el rango de la función

Hallamos el vértice: $f(x) = 3(x+0)^2 + 2$
 $V(0; 2)$

Graficamos:

RPTA: B



Se observa que el rango es $\rightarrow \text{Ran}(f) = [-20; +\infty)$
 Entonces: $f: \mathbb{R} \rightarrow [2; +\infty)$

6. Dada la función $f: [a; 10] \rightarrow [-20; b]$ con regla de correspondencia $f(x) = x^2 - 4x - 32$, hallar $2a + b$ para que f sea biyectiva.

- A. 20
- B. 40
- C. 34
- D. 10
- E. 28

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$f(x) = x^2 - 4x - 32$
 Hallamos el vértice completando cuadrados:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 - 32$$

$$f(x) = (x - 2)^2 - 36$$

$$V(2; -36)$$

Sabemos que la función está definida así: $f: [a; 10] \rightarrow [-20; b]$

Para que la función sea inyectiva el $\text{Dom}(f) = [a; 10]$ no debe contener a la abscisa del vértice: h

Evaluamos los extremos del dominio: $(a; -20)$

$$-20 = (a - 2)^2 - 36$$

$$36 - 20 = (a - 2)^2$$

$$\pm\sqrt{16} = (a - 2)$$

$$4 = a - 2 \quad \vee \quad -4 = a - 2$$

$$6 = a \quad \vee \quad -2 = a$$

Entonces: $a = 6$

Evaluamos los extremos del dominio: $(10; b)$

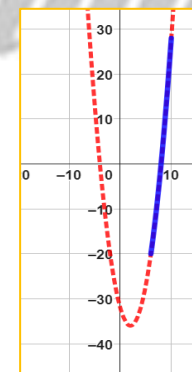
$$f(10) = (10 - 2)^2 - 36$$

$$f(10) = 64 - 36$$

$$f(10) = 28$$

Entonces: $b = 28$

Por lo tanto la función queda definida así: $f: [6; 10] \rightarrow [-20; 28]$



Observamos que el rango de la función coincide con el conjunto de llegada $[-20; 28]$, entonces la función es sobreyectiva.

Nos piden hallar: $2a + b = 2(6) + 28 = 40$

RPTA: B

7. Si f es una función inyectiva definida por

$f = \{(x; x^2 - 2x)/x \in \langle -\infty; k - 5 \rangle\}$, entonces se cumple:

- A. $k \leq 5$
- B. $k \geq 6$
- C. $k \leq -6$
- D. $k \leq 6$
- E. $k \leq -5$

RESOLUCIÓN:

Para que la función sea inyectiva el $Dom(f)$ no debe contener a la abscisa del vértice: h

Hallando el vértice de $f(x) = x^2 - 2x$

Completando cuadrados:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1$$

$$f(x) = (x - 1)^2 - 1$$

$$V(1; -1)$$

Tenemos que $h = 1$

El dominio podría ser:

$$x \in \langle -\infty; 1 \rangle \quad \text{o también} \quad x \in [1; +\infty)$$

Del enunciado:

$$x \in \langle -\infty; k - 5 \rangle$$

$$\text{Entonces: } x \in \langle -\infty; 1 \rangle = x \in \langle -\infty; k - 5 \rangle$$

$$\rightarrow k - 5 \leq 1$$

$$k \leq 6$$

RPTA: D

8. Dada la función biyectiva $f: [a; b] \rightarrow [-1; 5]$ con regla de correspondencia $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$. Señalar el valor de $a - b$

- A. -120
- B. 0
- C. -136
- D. 126
- E. -126

RESOLUCIÓN:

Del enunciado: $f: [a; b] \rightarrow [-1; 5]$

Reemplazamos $(a; -1)$ en la regla de correspondencia $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

$$-1 = \sqrt[3]{a - 1}$$

$$(-1)^3 = a - 1$$

$$a = 0$$

Reemplazamos $(b; 5)$ en la regla de correspondencia $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

$$5 = \sqrt[3]{b - 1}$$

$$(5)^3 = b - 1$$

$$126 = b$$

Nos piden hallar $a - b = 0 - 126 = -126$

RPTA: E

7.4 FUNCIÓN INVERSA

Sea la función $f = \{(x; y) / x \in \text{Dom}(f) \wedge y = f(x)\}$ una función inyectiva; se define la inversa de “ f ”, que se denota por f^{-1} como:

$$f^{-1} = \{(y; x) / x \in \text{Dom}(f) \wedge y = f(x)\}$$

EJEMPLO:

Dada la función “ f ” biyectiva, indica la función inversa de “ f ”, si $f = \{(1; 2), (3; 4), (5; 6), (7; 8)\}$

RESOLUCIÓN:

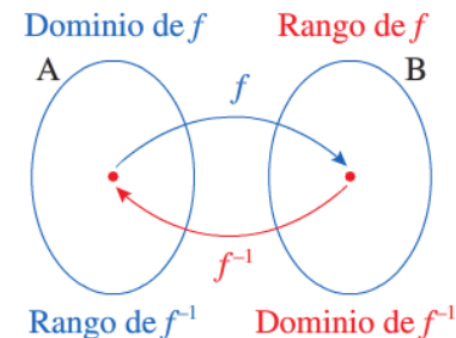
Para determinar la función inversa, basta intercambiar los componentes:

$$f^{-1} = \{(2; 1), (4; 3), (6; 5), (8; 7)\}$$

7.4.1.1 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea “ f ” biyectiva, su inversa “ f^{-1} ”, cumplirá las siguientes propiedades:

- $\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f)$
- $\text{Ran}(f^{-1}) = \text{Dom}(f)$



- $(f^{-1})^{-1} = f$
- f es inyectiva
- f^{-1} es inyectiva
- $y = f(x)$ equivale a $x = f^{-1}(y)$



Si la función “ f ” está definida solo por su dominio y regla de correspondencia, entonces “ f ” es obviamente suryectiva. En consecuencia, para que “ f ” sea biyectiva bastará que “ f ” sea inyectiva y, por lo tanto, existirá “ f^{-1} ” solo con esta condición.

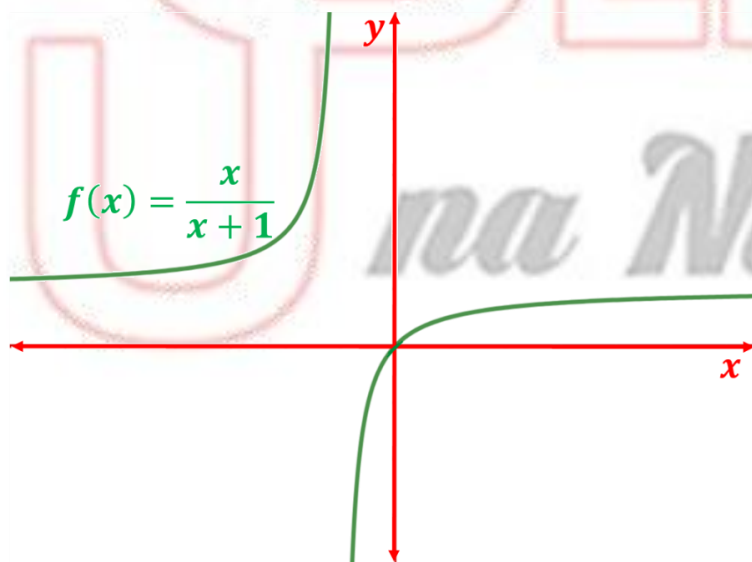
7.4.1.1.1 DETERMINACIÓN ALGEBRAICA DE UNA FUNCIÓN INVERSA

Si " f " es una función inyectiva, $y = f(x)$

- I. Se despeja " x " en función de " y ".
- II. Se reemplaza " y " por " x ", y a la función " y " se le llama inversa de " f " y se denota por " f^{-1} ".

EJEMPLO:

Determine una ecuación para $f^{-1}(x)$, si $f(x) = \frac{x}{x+1}$, considere la siguiente gráfica de la función " f ".

**RESOLUCIÓN:**

La gráfica de la función sugiere que " f " es inyectiva (uno a uno).

Si " f " en realidad es inyectiva, la función inversa " f^{-1} " satisfará la

$$\text{ecuación } x = \frac{y}{y+1}$$

Si despejamos " y " en esta nueva ecuación, tendremos la regla de correspondencia para f^{-1} .

$$x = \frac{y}{y+1}$$

$$x(y+1) = y$$

Multiplicar por $(y+1)$

$$xy + x = y$$

Propiedad distributiva

$$xy - y = -x$$

Aislar los términos en " y "

$$y(x-1) = -x$$

Factorizar " y "

$$y = \frac{-x}{x-1}$$

Dividir entre $(x-1)$

$$y = \frac{x}{1-x}$$

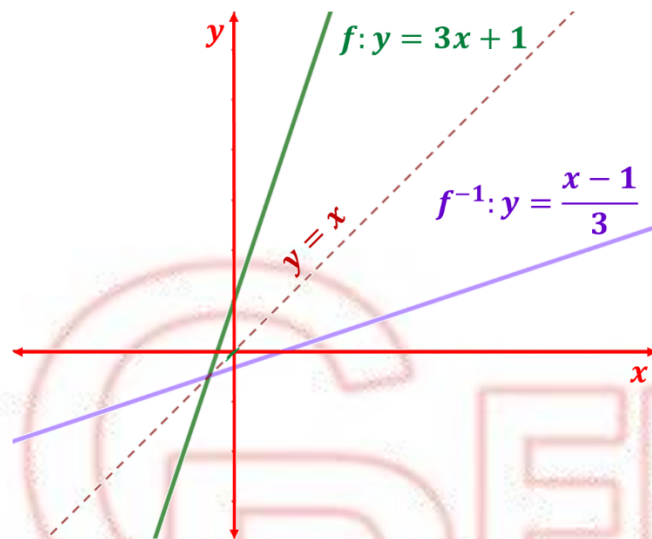
Multiplicar numerador y denominador por (-1)

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

7.4.1.1.2 EL PRINCIPIO DE LA REFLEXIÓN INVERSA

Cada uno de los puntos de la función $f: y = 3x + 1$ y de $f^{-1}: y = \frac{x-1}{3}$

son simétricos con respecto a la recta $y = x$.



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. La edad de Jimena está determinada por " $18A$ "; si el valor de " A " es el único valor que no pertenece al rango de la función inversa de

$$y = f(x) = \frac{4x+1}{3x-2}$$

Calcular la edad de Jimena

- A. 17 años
- B. 12 años
- C. 9 años
- D. 36 años
- E. 18 años

RESOLUCIÓN:

Como $\text{Ran}(f^{-1}) = \text{Dom}(f)$, entonces hallamos el dominio de f .

$$\text{Así; } f(x) \in \mathbb{R} \leftrightarrow 3x - 2 \neq 0$$

$$\leftrightarrow 3x \neq 2$$

$$\leftrightarrow x \neq \frac{2}{3}$$

$$\text{Luego, } \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$\text{Entonces, } A = \frac{2}{3}.$$

Por lo tanto; la edad de Jimena es $18A = 18\left(\frac{2}{3}\right) = 12$ años.

RPTA: B

2. Si $f(x) = \frac{ax+1-2a}{x+2} x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, hallar el valor de " a " para que $f^{-1} = f$

- A. 2
- B. 3
- C. -2
- D. -3
- E. 1

RESOLUCIÓN:

Se tiene la función:

$$f(x) = \frac{ax+1-2a}{x+2}; x \in \mathbb{R} - \{-2\},$$

$$y(x+2) = ax+1-2a$$

$$yx+2y = ax+1-2a$$

$$yx-ax = 1-2a-2y$$

$$x(y-a) = 1-2a-2y$$

$$x = \frac{1-2a-2y}{y-a} = f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1-2a-2x}{x-a}$$

$$\frac{-2x + 1 - 2a}{x - a} = \frac{ax + 1 - 2a}{x + 2}$$

$$a = -2$$

RPTA: C

3. Dada la función " f " definida por $f(x) = x^2 - 2x + 4$, determinar f^{-1} sabiendo que ésta función existe y que, además $(0; 4) \in f$ y el $Ran(f) = [3; +\infty)$

- F. $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x - 3}; x \geq 3$
 G. $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 3}; x \geq 3$
 H. $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x - 3}; x \geq 3$
 I. $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x + 3}; x \geq -3$
 J. $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x + 3}; x \geq -3$

RESOLUCIÓN:

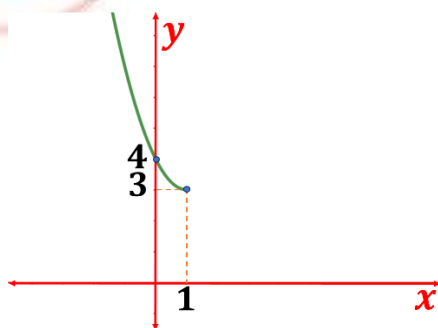
$$De f(x) = x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3.$$

Por dato:

- Como se menciona que f tiene inversa; entonces, f es inyectiva.

- $Ran(f) = [3; +\infty)$ y $(0; 4) \in f$

Graficando:



Como $Ran(f) = [3; +\infty) = Dom(f^{-1})$

Sea $y = (x - 1)^2 + 3$:

$$\rightarrow (x - 1)^2 = y - 3 \rightarrow |x - 1| = \sqrt{y - 3}$$

Como $x \leq 1 \rightarrow |x - 1| = 1 - x$

$$\rightarrow 1 - x = \sqrt{y - 3} \rightarrow x = 1 - \sqrt{y - 3}$$

Intercambiando " x " por " y "

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x - 3}; x \geq 3$$

RPTA: A

4. Si " f " es una función definida por: $f(x) = x + 6\sqrt{x - 1} - 1, x \in [1; 2]$. Determinar f^{-1}

K. $f^{-1}(x) = x + 19 - 6\sqrt{x + 9}; x \in [1; 2]$

L. $f^{-1}(x) = x - 9 - 6\sqrt{x + 19}; x \in [0; 7]$

M. $f^{-1}(x) = x + 19 - 6\sqrt{x + 9}; x \in [0; 7]$

N. $f^{-1}(x) = x + 19 + 6\sqrt{x + 9}; x \in [0; 7]$

O. $f^{-1}(x) = x + 9 + 6\sqrt{x + 9}; x \in [0; 7]$

RESOLUCIÓN:

$$f(x) = x + 6\sqrt{x - 1} - 1, x \in [1; 2]$$

$$f(x) = \underbrace{(x - 1) + 6\sqrt{x - 1} + 9 - 9}$$

$$f(x) = (\sqrt{x - 1} + 3)^2 - 9$$

$$\rightarrow Si 1 \leq x \leq 2 \rightarrow 0 \leq x - 1 \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{x - 1} \leq 1$$

$$3 \leq \sqrt{x - 1} + 3 \leq 4$$

$$9 \leq (\sqrt{x - 1} + 3)^2 \leq 16$$

$$0 \leq (\sqrt{x - 1} + 3)^2 - 9 \leq 7$$

$$Ran(f) = [0; 7] = Dom(f^{-1})$$

Sea: $y = (\sqrt{x-1} + 3)^2 - 9$

$$y + 9 = (\sqrt{x-1} + 3)^2$$

$$\sqrt{y+9} = \sqrt{x-1} + 3$$

De aquí: $x - 1 = (\sqrt{y+9} - 3)^2$

$$x = (\sqrt{y+9} - 3)^2 + 1$$

Intercambiando "x" por "y":

$$f^{-1}(x) = (\sqrt{x+9} - 3)^2 + 1$$

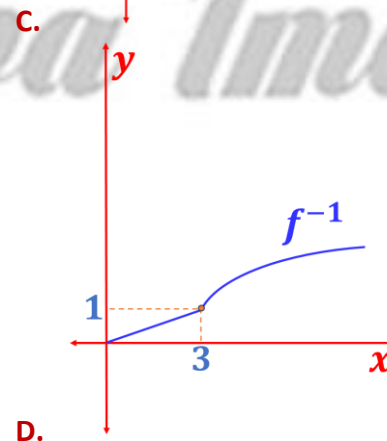
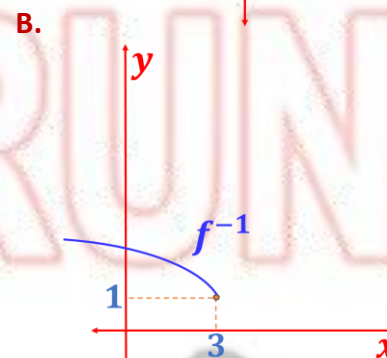
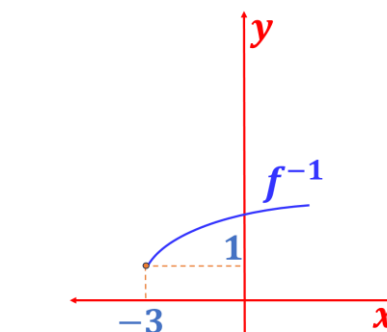
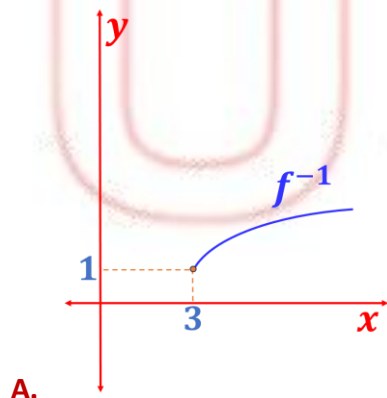
$$f^{-1}(x) = x + 19 - 6\sqrt{x+9}; x \in [0; 7]$$

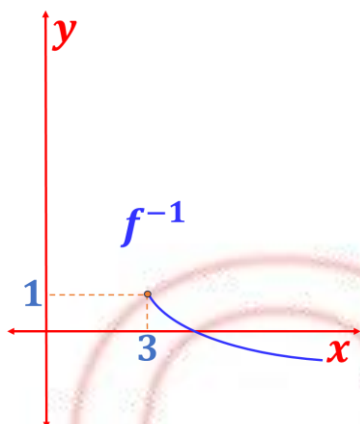
RPTA: C

5. Sea la función "f" definida por:

$$f = \{(x; x^2 - 2x + 4) / \sqrt{x-1} \geq 0\}$$

La figura que mejor representa a la gráfica de f^{-1} es:



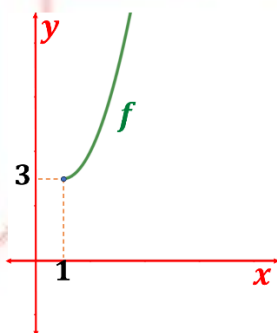


E.

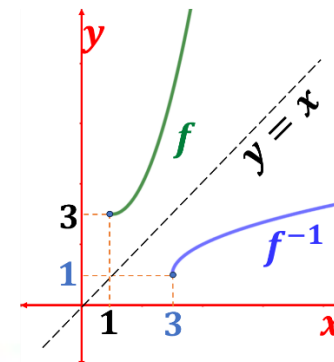
RESOLUCIÓN:De $f = \{(x; x^2 - 2x + 4) / \sqrt{x} - 1 \geq 0\}$ Se tiene: $f(x) = x^2 - 2x + 4; \sqrt{x} - 1 \geq 0$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 3; x \geq 1$$

Su gráfica:



Luego, simetrizando la gráfica anterior respecto a la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de f^{-1} :



Por lo tanto, la gráfica que mejor representa f^{-1} es la primera gráfica en las alternativas.

RPTA: A

6. La cantidad de preguntas que se equivocó Carlos en su examen de admisión equivale a 4 veces la suma de términos de la regla de correspondencia de la función inversa de " f ". Si:

$$f = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{x-1}{x+1} \right\}$$

Determinar la cantidad de preguntas que se equivocó Carlos.

- A. 4
- B. 6
- C. 8
- D. 2
- E. 0

RESOLUCIÓN:

Evaluamos: $y = f(x) = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ es inyectiva

$\rightarrow$ existe f^{-1}

$$\text{De } y = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow xy + y = x - 1$$

$$xy - x = -1 - y$$

$$x(y - 1) = -(y + 1)$$

$$x = -\frac{y + 1}{y - 1}$$

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y + 1}{1 - y}; y \neq 1$$

Intercambiando "x" por "y":

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{1 - x}; x \neq 1$$

Piden, el cuádruple de la suma de términos de la regla de correspondencia de la función inversa: $4(x + 1 + 1 - x) = 8$.

Por lo tanto, Carlos se equivocó en 8 preguntas de su examen de admisión.

RPTA: C

7. La cantidad de horas que entrena regularmente a la semana Álvaro, está determinado por: $f^{-1}(3) + g^{-1}(3)$,

Sean las funciones:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{2x + 1}; x \neq -\frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}; x \neq 1$$

Calcular la cantidad de horas que entrena Álvaro a la semana.

- A. 5 horas
- B. 6 horas
- C. 4 horas
- D. 8 horas
- E. 7 horas

RESOLUCIÓN:

$$a) f(x) = \frac{2x-1}{2x+1} \rightarrow y = \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$2xy + y = 2x - 1$$

$$x(y - 2) = -y - 1$$

$$x = -\frac{y + 1}{2y - 2}$$

$$y = -\frac{x + 1}{2x - 2}$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{x + 1}{2x - 2}$$

$$b) g(x) = \frac{2x+3}{x-1} \rightarrow y = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$xy - y = 2x + 3$$

$$xy - 2x = y + 3$$

$$x(y - 2) = y + 3$$

$$x = \frac{y + 3}{y - 2}$$

$$y = \frac{x + 3}{x - 2}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$$

Nos piden $f^{-1}(3) + g^{-1}(3)$, reemplazamos:

$$f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = -\frac{x + 1}{2x - 2} + \frac{x + 3}{x - 2}$$

$$f^{-1}(3) + g^{-1}(3) = -\frac{3 + 1}{2(3) - 2} + \frac{3 + 3}{3 - 2}$$

$$= -1 + 6$$

$$f^{-1}(3) + g^{-1}(3) = 5$$

Por lo tanto, Álvaro entrena 5 horas a la semana.

RPTA: A

8. Determinar la inversa de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{5 - x}(|x - 5| + 1 + x)$$

$$A. \frac{20-x^2}{36}; x \geq 0$$

$$B. \frac{180-x^2}{36}; x \geq 0$$

C. $\frac{x^2-20}{36}; x \geq 0$

D. $\frac{x^2-180}{36}; x \geq 0$

E. $\frac{36-x^2}{180}; x \geq 0$

RESOLUCIÓN:

Tenemos la función $f(x) = \sqrt{5-x}(|x-5| + 1 + x)$

Evaluamos el dominio de la función:

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} / 5-x \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \leq 5\} \end{aligned}$$

$$\text{Dom}(f) = \langle -\infty; 5 \rangle$$

Como $x \leq 5 \rightarrow x-5 \leq 0 \rightarrow |x-5| = 5-x$ reemplazamos en la función

$$f(x) = \sqrt{5-x}(|x-5| + 1 + x)$$

$$f(x) = \sqrt{5-x}[(5-x) + 1 + x]$$

$$f(x) = 6\sqrt{5-x}$$

Veamos si "f" es inyectiva:

Sean a y $b \in \text{Dom}(f)$ de modo que $f(a) = f(b)$

$$6\sqrt{5-a} = 6\sqrt{5-b}$$

$$\sqrt{5-a} = \sqrt{5-b}$$

$$5-a = 5-b$$

$$-a = -b \rightarrow a = b$$

Afirmamos que "f" es inyectiva.

Hallamos su inversa como $y = 6\sqrt{5-x}$

$$y^2 = 36(5-x)$$

$$36x = 180 - y^2$$

$$x = \frac{180 - y^2}{36}$$

Intercambiando "x" por "y":

$$y = \frac{180 - x^2}{36}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{180 - x^2}{36}$$

Hallamos el dominio de f^{-1} . Para ello basta hallar el rango de "f":

$$\text{Como } x \leq 5$$

$$-x \geq -5$$

$$5 - x \geq 0$$

$$\sqrt{5-x} \geq 0$$

$$\frac{6\sqrt{5-x}}{f(x)} \geq 0$$

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f) = [0; +\infty)$$

RPTA: B

7.5 ECUACIÓN Y FUNCIÓN EXPONENCIAL

7.5.1 ECUACIÓN EXPONENCIAL

Una ecuación exponencial es aquella ecuación en la que la incógnita aparece en el exponente. (HUERTAS, 2015)

Criterio I: “A bases iguales, exponentes iguales”

$$a^x = a^y \rightarrow x = y$$

Donde: $a > 0 \wedge a \neq 1$; además $x, y \in \mathbb{R}$

Criterio II: “A exponentes iguales, bases iguales”

$$x^n = y^n \rightarrow x = y$$

Donde: $n \neq 0 \wedge x, y \in \mathbb{R}^+$

Criterio III: “Criterio de comparación”

$$x^x = y^y \rightarrow x = y$$

Este criterio tiene algunas excepciones

IMPORTANTE:

Excepción respecto al criterio III,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ pero } \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$$

7.5.2 FUNCIÓN EXPONENCIAL

Una función exponencial de base “a” es aquella cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = a^x; \forall x \in \mathbb{R}, a > 0 \wedge a \neq 1$$

La importancia de esta función radica en su aplicación en la física, biología, medicina, demografía, etc.

7.5.2.1 PROPIEDADES:

1. En toda función exponencial cuando “x” es igual a 0, la función toma el valor de uno.

$$f(x) = a^x; \text{ si } x = 0$$

$$f(0) = a^0 = 1$$

2. En toda función exponencial, cuando x es igual a uno, la función toma el valor de la base

$$f(x) = a^x; \text{ si } x = 1$$

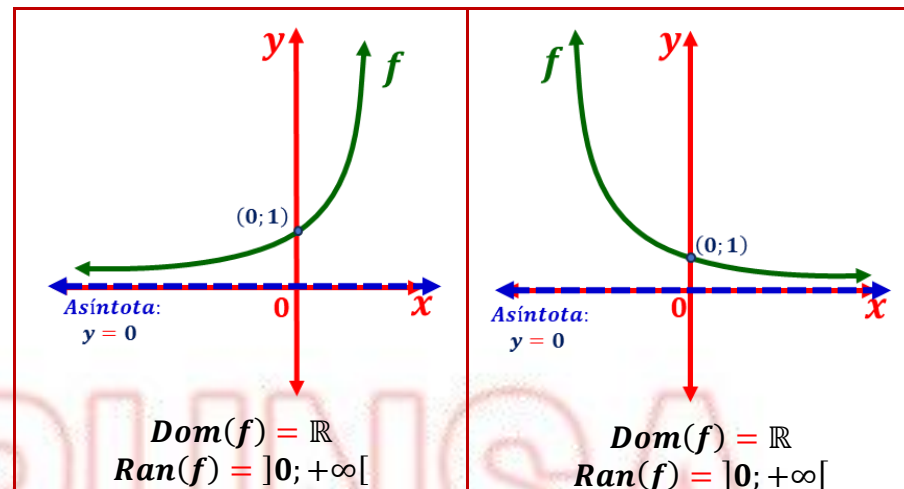
$$f(1) = a^1 = a$$

RECUERDA: TEOREMAS

1. $\forall a > 1: a^m < a^n \leftrightarrow m < n$
2. $\forall 0 < a < 1: a^m < a^n \leftrightarrow m > n$
3. $\forall a > 0; \forall x \in \mathbb{R}: a^x > 0$

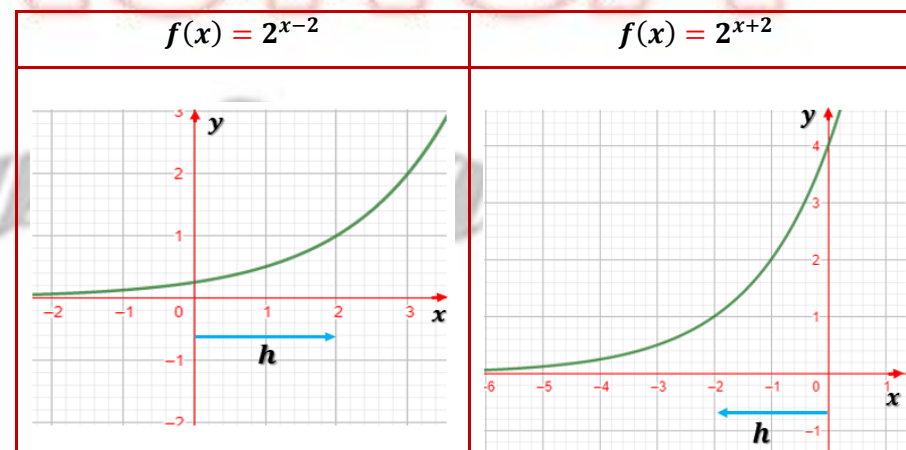
7.5.2.2 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Caso I: Base $a > 1$	Caso II: Base $0 < a < 1$
- Es una función creciente. - Se cumple: $x_1 < x_2 \leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ - La gráfica pasa por el punto $(0; 1)$ - Asíntota horizontal: $y = 0$	- Es una función decreciente. - Se cumple: $x_1 < x_2 \leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ - La gráfica pasa por el punto $(0; 1)$ - Asíntota horizontal: $y = 0$



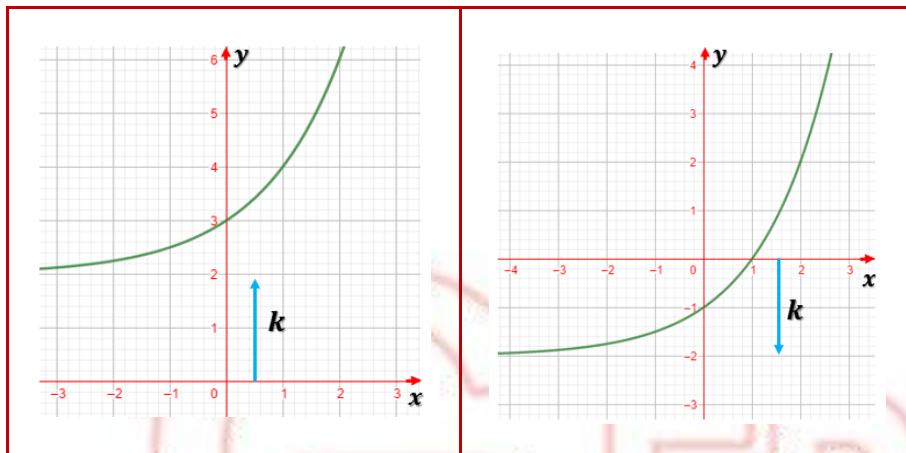
7.5.2.2.1 DESPLAZAMIENTO:

a) Horizontal:

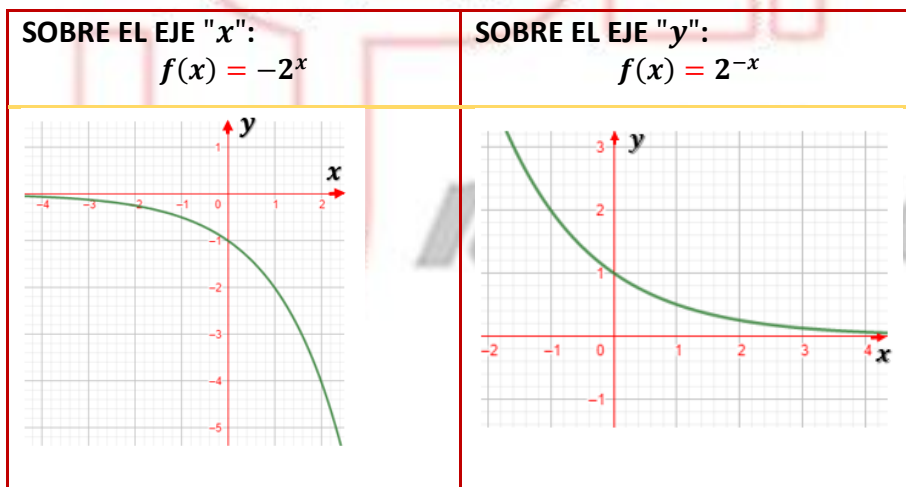


b) Vertical:





7.5.2.2.2 Reflejos sobre los ejes:



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. Si: $128^{x-1} = 32^{x+1} \Rightarrow x = 6$

II. Si: $9^{2-x} \cdot 27^{x+3} = 1 \Rightarrow x = -13$

III. Si: $\sqrt[4]{2^x} \cdot \sqrt{2^{1-x}} = 4 \Rightarrow x = -6$

A. VVF

B. VVV

C. VFV

D. FFV

E. VFF

RESOLUCIÓN:

I. $x = 6$, es una solución para: $128^{x-1} = 32^{x+1}$, esto es:
Igualando bases:

$$(2^7)^{x-1} = (2^5)^{x+1}$$

Luego:

$$7x - 7 = 5x + 5$$

Esto implica que: $x = 6$, entonces es: (V)

II. $x = -13$, es una solución para: $9^{2-x} \cdot 27^{x+3} = 1$, es decir:

$$(3^2)^{2-x} (3^3)^{x+3} = 1$$

Por lo que:

$$3^{4-2x} \cdot 3^{3x+9} = 1 \Leftrightarrow 3^{x+13} = 1$$

$$\rightarrow 3^x = \frac{1}{3^{13}} = 3^{-13}$$

Así, $x = -13$, entonces es: (V)

III. $x = -6$ es una solución para: $\sqrt[4]{2^x} \cdot \sqrt{2^{1-x}} = 4$, pues:

$$(2^x)^{\frac{1}{4}} (2^{1-x})^{\frac{1}{2}} = 2^2 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{4} + \frac{1-x}{2}} = 2^2$$

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{x - 2x}{4} = \frac{3}{2}$$

Luego, $x = -6$, entonces es: (V)

∴ La respuesta es: VVV

2. Si $3^{2x} + 9 = 10(3^x)$, entonces el valor de $x^2 + 1$ es:

- A. 1
- B. 5
- C. 1 ó 5
- D. 2
- E. 10

RESOLUCIÓN:

Reescribiendo la ecuación:

$$(3^x)^2 + 9 = 10(3^x)$$

Haciendo un cambio de variable para $3^x = n$, por lo que:

$$n^2 - 10n + 9 = 0$$

Factorizando la ecuación cuadrática:

$$(n - 1)(n - 9) = 0$$

$$n - 1 = 0 \vee n - 9 = 0$$

$$n = 1 \vee n = 9$$

Volviendo a la variable original:

Para $3^x = 1$, lo cual implica que:

$$3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$$

Para $3^x = 9$, lo cual implica que:

$$3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

$$\rightarrow x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

∴ El valor de $x^2 + 1$ es: 1 ∨ 5

RPTA: B

- A. $]1; 5[$
- B. $]2; 5[$
- C. $] \frac{1}{3}; 30[$
- D. $] \frac{1}{2}; 32[$
- E. $] \frac{2}{3}; 25[$

RESOLUCIÓN:

A partir del dominio restringido: $x \in] - 2; 1[$

$$-2 < x < 1$$

Multiplicando (2) $\rightarrow -4 < 2x < 2$

Sumando (3) $\rightarrow -1 < 2x + 3 < 5$

La base ($2 > 1$) $\rightarrow 2^{-1} < 2^{2x+3} < 2^5$

$$2^{-1} < f(x) < 2^5$$

$$\frac{1}{2} < f(x) < 32$$

$$R_f =] \frac{1}{2}; 32[$$

RPTA: D

4. Sea la función: $g(x) = 3^{x^2 - 8x + 19}$, $x \in]3; 5[$ y cuyo rango es $[a; b]$. Hallar el valor de $b - a$.

- A. 30
- B. 54
- C. 50
- D. 60
- E. 36

RPTA: C

RESOLUCIÓN:

Completando cuadrados en el exponente:

3. Hallar el rango de la función f , si:

$$\frac{x^2 - 8x + 19}{x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 + 19}$$

Binomio al cuadrado $(x - 4)^2 + 3$

Remplazando en la función el exponente

$$g(x) = 3^{(x-4)^2+3}$$

Sabemos que: $x \in]3; 5[$

$$3 < x < 5$$

Restamos (4) $\rightarrow -1 < x - 4 < 1$ Elevamos $()^2 \rightarrow 0 \leq (x - 4)^2 < \max\{(-1)^2; 1^2\}$

$$0 \leq (x - 4)^2 < 1$$

Sumando (3) $\rightarrow 3 \leq (x - 4)^2 + 3 < 4$ La base $(3 > 1) \rightarrow 3^3 \leq 3^{(x-4)^2+3} < 3^4$

$$27 \leq g(x) < 81$$

 $R_f = [27; 81[$ comparando $[a; b[$ Entonces $a = 27$ y $b = 81$ Nos piden $b - a$

$$81 - 27 = 54$$

RPTA: B**5.** El número de socios de un club está modelado por la función:

$$P(t) = 12(2)^{\frac{t}{3}}$$

Donde " t " es el tiempo en meses transcurrido desde la apertura. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que el club tenga el cuádruplo de socios de la cantidad inicial?

- A. 4 meses
- B. 7 meses
- C. 3 meses
- D. 6 meses
- E. 2 meses

RESOLUCIÓN: t : tiempo en meses $P(t)$: cantidad de socios

Cantidad inicial de socios

$$t = 0 \rightarrow P(0) = 12(2)^{\frac{0}{3}}$$

$$P(0) = 12$$

Luego la cantidad de socios se cuadruplican

$$P(t) = 4(12) = 48$$

Reemplazamos $P(t) = 12(2)^{\frac{t}{3}}$

$$48 = 12(2)^{\frac{t}{3}}$$

$$4 = 2^{\frac{t}{3}}$$

$$2^2 = 2^{t/3}$$

Por propiedad $2 = \frac{t}{3}$

$$t = 6 \text{ meses}$$

RPTA: D

6. Juancito quiere comprar una mochila en una tienda, le informan que el costo en soles es igual a " $100 + b$ ", donde " b " es el conjunto solución en:

$$2^{2x+2} = 6^x + 2(3)^{2x+2}$$

Hallar el costo de la mochila.

- A. S/ 98
- B. S/ 92
- C. S/ 85
- D. S/ 116
- E. S/ 88

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$2^{2x+2} = 6^x + 2(3)^{2x+2}$$

$$2^{2x+2} - 6^x - 2(3)^{2x+2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 2^{2x} \cdot 2^2 - 6^x - 2(3)^{2x} \cdot 3^2 &= 0 \\
 4 \cdot 2^{2x} - 6^x - 18(3)^{2x} &= 0 \\
 4(2^{2x}) - (2^x)(3^x) - 18(3^x)^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Hacemos aspa simple

$$\begin{array}{ccc}
 4(2^x) & \swarrow \quad \searrow & -9(3^x) \\
 (2^x) & \nwarrow \quad \nearrow & 2(3^x)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego, } (4(2^x) - 9(3^x))(2^x + 2(3^x)) &= 0 \\
 4(2^x) - 9(3^x) &= 0 \\
 2^2(2^x) &= 3^2(3^x) \\
 2^{x+2} &= 3^{x+2}
 \end{aligned}$$

Cumple cuando:

$$\begin{aligned}
 x + 2 &= 0 \\
 x &= -2
 \end{aligned}$$

Luego: $b = x = -2$

De ahí: $100 + b = 100 - 2 = 98$

$\therefore$ El costo de la mochila es S/98.

RPTA: A

7. La compañía COOPELEC fabrica focos LED, cuya cantidad de focos que se vende está determinado por: $Q(t) = 40000(16^{-0,125t})$, donde " t " es el tiempo (en semanas). Si la siguiente campaña debe realizarse cuando este sea igual a la cuarta parte de la cantidad inicial que había de focos, ¿cuánto tiempo tendrá que pasar para dicha campaña?

- A. 1 semana
- B. 2 semanas
- C. 3 semanas
- D. 4 semanas

E. 5 semanas

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

La venta inicial $t = 0$

$$Q(0) = 40000(16^{-0,125(0)})$$

$$Q(0) = 40000 \times 16^0 = 40000$$

Luego, la siguiente campaña se realizará cuando este sea igual a la cuarta parte de la cantidad inicial.

$$Q(t) = \frac{1}{4} Q(0)$$

Reemplazando, $40000 \times 16^{-0,125t} = \frac{1}{4} \times 40000$

$$(4^2)^{-0,125t} = \frac{1}{4} = 4^{-1}$$

$$4^{-0,25t} = 4^{-1}$$

$$-0,25t = -1$$

$$t = 4$$

$\therefore$ Tendrá que pasar 4 semanas

RPTA: D

8. En la siguiente ecuación exponencial:

$$16^{\sqrt{x}} - 256 = 60 \cdot 4^{\sqrt{x}}$$

¿qué podemos afirmar del equivalente de " x ", si $x \in \mathbb{R}$?

- A. 3
- B. 9
- C. 6
- D. 12
- E. -9

RESOLUCIÓN:

En la igualdad dada:

$$16^{\sqrt{x}} - 256 = 60 \cdot 4^{\sqrt{x}}$$

Expresamos la ecuación como:

$$\begin{aligned}(4^2)^{\sqrt{x}} - 256 &= 60 \cdot 4^{\sqrt{x}} \\ \Rightarrow (4^{\sqrt{x}})^2 - 256 &= 60 \cdot 4^{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Por cambio de variable para: $n = 4^{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}n^2 - 256 &= 60n \\ n^2 - 60n - 256 &= 0\end{aligned}$$

Factorizando:

$$(n - 64)(n + 4) = 0$$

Así:

$$\begin{aligned}n - 64 = 0 \vee n + 4 = 0 \\ \Rightarrow n = 64 \vee n = -4\end{aligned}$$

Volviendo a la variable original:

$$4^{\sqrt{x}} = 64 \vee 4^{\sqrt{x}} = -4$$

La primera ecuación tiene por solución a:

$$4^{\sqrt{x}} = 64 \leftrightarrow 4^{\sqrt{x}} = 4^3$$

Igualando exponentes:

$$\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$$

La segunda ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$, pues:

$$a^{f(x)}$$

No puede ser cero o negativo para $x \in \mathbb{R}$

Por lo tanto, $x = 9$ cuando $x \in \mathbb{R}$

RPTA: B

7.6 ECUACIÓN LOGARÍTMICA

7.6.1 LOGARITMOS EN $\mathbb{R}$: NOTACIÓN Y CONDICIONES DE EXISTENCIA**DEFINICIÓN:**

Dado un número real $a > 0 \wedge a \neq 1$, el logaritmo de un número, siendo $x > 0$ en la base “ a ”, es el exponente “ y ” al que debe elevarse “ a ”, de manera que se cumpla que $a^y = x$.

Notación:

$$\log_a x = y$$

Se lee: “ y ” es el logaritmo de x en base “ a ”.

De la definición se tiene:

$$\log_a x = y \rightarrow a^y = x; x > 0; a > 0; a \neq 1$$

IDENTIDAD FUNDAMENTAL DEL LOGARITMO

Utilizando la definición:

$$\log_a x = y \dots (1)$$

Tenemos que:

$$a^y = x \dots (2)$$

Reemplazamos (1) en (2) obtenemos la identidad fundamental

$$a^{\log_a x} = x; \forall x > 0, \quad \wedge \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

EJEMPLOS:

$$1. \quad 5^{\log_5 13} = 13$$

$$2. \quad 7^{\log_7 \pi} = \pi$$

$$3. \quad \log_3 \frac{1}{729} = x$$

$$3^x = \frac{1}{729}$$

$$3^x = \frac{1}{3^6}$$

$$3^x = 3^{-6}$$

$$x = -6$$

7.6.1.1 PROPIEDADES DE LOGARITMOS

Sea $N, P \in \mathbb{R}^+$ y una base $a > 0 \wedge a \neq 1$

1 Logaritmo de la base

$$\log_a a = 1 \leftrightarrow a^1 = a$$

2 Logaritmo de la unidad

$$\log_a 1 = 0 \leftrightarrow a^0 = 1$$

3 Logaritmo de un producto

$$\log_a N \cdot P = \log_a N + \log_a P$$

EJEMPLOS:

$$1. \quad \log_5 15 = \log_5(3)(5)$$

$$\log_5 15 = \log_5 3 + \log_5 5$$

$$\log_5 15 = \log_5 3 + 1$$

2. $\log_3 7 + \log_3 4$

$$\log_3(7)(4)$$

$$\log_3 28$$

Sean $N, P \in \mathbb{R}^+$ y una base $a > 0 \wedge a \neq 1$

4. Logaritmo de un cociente

$$\log_a \left(\frac{N}{P} \right) = \log_a N - \log_a P$$

5. Logaritmo de una potencia

$$\log_a N^x = x \log_a N$$

$$\log_{a^y} N^x = \frac{x}{y} \log_a N$$

Consecuencia:

$$\log \left(\sqrt[y]{a} \right) \left(\sqrt[x]{N} \right) = \log_{a^{\frac{1}{y}}} N^{\left(\frac{1}{x} \right)} = \frac{1}{\frac{x}{y}} \log_a N \rightarrow \frac{y}{x} \log_a N$$

$$\log_a N^x = x \log_a |N|; x \text{ es par}$$

$$\log_a^m N = (\log_a N)^m$$

6. Cambio de Base

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}; b > 0 \wedge b \neq 1$$

7. Regla de la Cadena

$$\log_a N \cdot \log_N P \cdot \log_P Q \cdot \log_Q S = \log_a S$$

8. Regla del Intercambio

$$x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$$

Sean $N, P \in \mathbb{R}^+$ y una base $a > 0 \wedge a \neq 1$

9. Antilogaritmo

$$\text{antilog}_b a = b^a$$

$$\text{antilog}_a (\log_a N) = N$$

$$\log_a (\text{antilog}_a N) = N$$

10. Cologaritmo

$$\text{colog}_b a = \log_b \left(\frac{1}{a} \right) = -\log_b a$$

EJEMPLOS:

1. $\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 \sqrt[3]{5^2} = \log_5 5^{2/3}$

$$\log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3} \log_5 5 = \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$\log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$$

2. $\log_{\sqrt[4]{3}} 3 = \log_{\sqrt[4]{3^4}} 3^4 = \log_3 3^4$

$$\log_{\sqrt[4]{3}} 3 = 4 \log_3 3 = 4$$

3. $\log_3 25 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 = \log_5 25$
 $= 2 \log_5 5 = 2 \cdot 1$

4. $\frac{\log_{\sqrt{2}} 9}{\log_{\sqrt{2}} 3} = \log_3 9 = 2$

5. $\log_3 9 = \log_3 \left(\frac{1}{9} \right) = \log_3 3^{-2} = -2$

6. $\frac{3^{\log_2 5} + 5^{\log_2 3}}{3^{\log_4 25}} = \frac{3^{\log_2 5} + 3^{\log_2 5}}{3^{\log_{\sqrt{4}} \sqrt{25}}}$
 $= \frac{2 \cdot 3^{\log_2 5}}{3^{\log_2 5}}$

$$\frac{3^{\log_2 5} + 5^{\log_2 3}}{3^{\log_4 25}} = 2$$

7.6.1.2 SISTEMA DE LOGARITMOS

De la definición se deduce que cualquier número positivo, diferente de la unidad, puede utilizarse como base de un sistema de logaritmos; por lo tanto, el número de sistemas de logaritmos es ilimitado. Los más importantes son:

7.6.1.2.1 LOGARITMOS DECIMALES:

Cuando la base de los logaritmos es 10, el sistema logarítmico que se obtiene recibe el nombre de sistema decimal de logaritmos o sistema vulgar de logaritmos. Fuente especificada no válida. o sistema de BRIGGS.

$$\log_{10} x = \log x$$

7.6.1.2.2 LOGARITMOS NEPERIANO O HIPERBÓLICO:

Es aquel sistema cuya base es el número trascendental de Euler:

Siendo: $e \cong 2.71828 \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ y es denotado por:

$$\log_e x = \ln x$$

7.6.2 ECUACIÓN LOGARÍTMICA

Es aquella ecuación donde una incógnita (o más) está afectada por el operador logaritmo.

Son ejemplos de ecuaciones

$$1. \log(x + 7) = 4$$

$$2. \log_x(x^2 + 1) = \log_x(2x^2 - 8)$$

$$3. \log_x x^2 = 9$$

No son ecuaciones logarítmicas

$$1. x + \log_2 5 = 3$$

$$2. \log_{\sqrt{2}} 4 + \log_2 8 + 1 = x \log_2 3$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar el valor de " $2A + 2$ ", sabiendo que:

$$A = \log_{\sqrt{5}} 5 \cdot \log_{27} 81 + 3 \log_{125} 25 - 4 \log_{\sqrt{6}} 6\sqrt{6}$$

- A. 1
- B. -1
- C. 2
- D. -2
- E. 3

RESOLUCIÓN:

Dando forma a la expresión:

$$6 \log_5 5 \cdot \frac{4}{3} \log_3 3 + 3 \cdot \frac{2}{3} \log_5 5 - 4 \cdot \frac{3/2}{1/2} \log_6 6$$

Simplificando:

$$A = 6 \left(\frac{4}{3}\right) + 3 \left(\frac{2}{3}\right) - 4(3)$$

$$A = 8 + 2 - 12 = -2$$

Entonces:

$$2A + 2 = 2(-2) + 2 = -4 + 2 = -2$$

RPTA: D

2. El pago de mis letras en la tienda "Tottus" son el día "F" de cada mes. Si el valor de "F" lo obtenemos de:

$$F = \log_5 24 + \log_{25} 144 + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{2} - \log_{\sqrt{5}} 24$$

¿Qué día tengo que pagar mis letras?

- A. El día 2
- B. El día 4
- C. El día 6
- D. El día 8
- E. El día 1

RESOLUCIÓN:

Acomodando la expresión:

$$F = \log_5 24 + \log_{5^2} 12^2 + \log_{(\sqrt{5})^2} (5\sqrt{2})^2 - \log_{(\sqrt{5})^2} 24^2$$

Entonces:

Acomodando la expresión:

$$\log_5 24 + \log_5 12 + \log_5 50 - \log_5 576$$

Por propiedad de suma de logaritmos:

$$\log_5 (24)(12)(50) - \log_5 576$$

Por diferencia de logaritmos:

$$F = \log_5 \left(\frac{24 \times 12 \times 50}{576} \right)$$

$$F = \log_5 25$$

$$F = \log_5 5^2$$

$$F = 2$$

Por lo tanto, tengo que pagar mis letras los días 2 de cada mes.

RPTA: A

$$P = \frac{3\log_{81} 2 + \log_3 \sqrt{2}}{\log_{9\sqrt{3}} 8 - \log_{243} 2}$$

- A. $\frac{4}{5}$
- B. $\frac{5}{4}$
- C. $\frac{3}{4}$
- D. $\frac{4}{3}$
- E. $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN:

De la expresión, aplicando propiedades:

$$P = \frac{3\log_{3^4} 2 + \log_3 2^{1/2}}{\log_{(9\sqrt{3})^2} 8^2 - \log_{3^5} 2}$$

$$P = \frac{3\log_{3^4} 2 + \log_3 2^{1/2}}{\log_{243} 64 - \log_{3^5} 2}$$

$$P = \frac{3\log_{3^4} 2 + \log_3 2^{1/2}}{\log_{3^5} 2^6 - \log_{3^5} 2}$$

$$P = \frac{\frac{3}{4}\log_3 2 + \frac{1}{2}\log_3 2}{\frac{6}{5}\log_3 2 - \frac{1}{5}\log_3 2}$$

Simplificando se tiene:

$$P = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{6}{5} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{5}{4}}{1} = \frac{5}{4}$$

RPTA: B

4. Calcular el valor de:

3. Simplificar la expresión:

$$E = \frac{e^{\ln(z-y)} + e^{\ln(z-x)} + e^{\ln(x+y)}}{(e^x + e^y + e^z)(x + y + z)}$$

Si se cumple que: $x = \ln 2$, $y = \ln 3$, $z = \ln 6$.

- A. 11
 B. $\frac{1}{11}$
 C. $\frac{11}{36}$
 D. $\frac{11}{36}$
 E. 1

RESOLUCIÓN:

Por la propiedad de $a^{\log_a N} = N$, el numerador se transforma y el denominador por el dato:

$$E = \frac{(z-y) + (z-x) + (x+y)}{(e^{\ln 2} + e^{\ln 3} + e^{\ln 6})(x+y+z)}$$

Simplificando y reemplazando tenemos:

$$E = \frac{2z}{(2+3+6)(\ln 2 + \ln 3 + \ln 6)}$$

$$E = \frac{2(\ln 6)}{(11)[\ln(2)(3)(6)]}$$

$$E = \frac{\ln 6^2}{(11)\ln 36}$$

De ahí que:

$$E = \frac{1}{11}$$

5. Si se sabe que: $\log_y x = 5$; $\log_x z = 9$, entonces, hallar $\log_{xyz} z$

- A. 45
 B. $\frac{1}{15}$
 C. $\frac{1}{45}$
 D. $\frac{15}{17}$
 E. $\frac{17}{15}$

RESOLUCIÓN:

De las condiciones tenemos:

$$\log_y x = 5 \quad \wedge \quad \log_x z = 9$$

Aplicando definición:

$$y^5 = x \quad \wedge \quad x^9 = z$$

Relacionando:

$$(y^5)^9 = x^9 \rightarrow y^{45} = x^9 = z$$

Reemplazando en función de z:

$$xyz = \sqrt[9]{z} \cdot \sqrt[45]{z} \cdot z$$

$$xyz = z^{1/9} \cdot z^{1/45} \cdot z$$

$$xyz = z^{\frac{1}{9} + \frac{1}{45} + 1} = z^{\frac{17}{15}}$$

Nos pide:

$$\log_{xyz} z = \log_{z^{17/15}} z$$

Por propiedad:

$$\frac{1}{17/15} \log_z z = \frac{15}{17}$$

RPTA: D

RPTA: B

6. Al postular a un trabajo, quedé en el n° puesto, lo cual fue una alegría para mi persona. Si el valor de n° lo encontramos en la expresión:

$$n = \frac{1}{1 + \log_2 6} + \frac{1}{1 + \log_4 3} + \frac{1}{1 + \log_{18} 0,666 \dots}$$

¿En qué puesto quede para este trabajo?

- A. 1°
- B. 2°
- C. 3°
- D. 4°
- E. 5°

RESOLUCIÓN:

De la expresión:

$$1 + \log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 6 = \log_2 (2)(6) = \log_2 12$$

$$1 + \log_4 3 = \log_4 4 + \log_4 3 = \log_4 (4)(3) = \log_4 12$$

$$1 + \log_{18} 0,666 \dots = \log_{18} 18 + \log_{18} \left(\frac{2}{3}\right) = \log_{18} (18) \left(\frac{2}{3}\right) \\ = \log_{18} 12$$

Reemplazando en la expresión:

$$n = \frac{1}{\log_2 12} + \frac{1}{\log_4 12} + \frac{1}{\log_{18} 12}$$

Aplicando propiedad:

$$n = \log_{12} 2 + \log_{12} 4 + \log_{12} 18$$

$$n = \log_{12} (2)(4)(18) = \log_{12} 144$$

$$n = \log_{12} 12^2$$

$$n = 2 \log_{12} 12 = 2$$

Por lo tanto, quede en 2° puesto.

RPTA: B

7. La virgen de la Candelaria se celebra el “x” de febrero de cada año, siendo esta una festividad muy religiosa en el Perú como en otras partes del mundo. Si el valor de “x” lo encontramos en:

$$x = \log\{\text{antilog}_4[(\log_2 5 + 2) - 1]\}$$

¿Qué día se festeja esta festividad?

- A. 2 de febrero

- B. 4 de febrero
- C. 6 de febrero
- D. 8 de febrero
- E. 5 de febrero

RESOLUCIÓN:

Resolviendo la expresión por partes se tiene:

$$\log_2 5 + 2 = \log_2 5 + \log_2 4 = \log_2 20$$

Reemplazando en x:

$$x = \log\{\text{antilog}_4[\log_2 20 - 1]\}$$

También:

$$\log_2 20 - 1 = \log_2 20 - \log_2 2 = \log_2 10$$

Reemplazando en x:

$$x = \log\{\text{antilog}_4[\log_2 10]\}$$

Aplicando propiedad:

$$x = \log\left\{\frac{\text{antilog}_4[\log_4 100]}{100}\right\}$$

Simplificando se obtiene:

$$x = \log 100 = 2$$

De ahí que, la virgen de la Candelaria se celebra el 2 de febrero de cada año

RPTA: A

8. De la expresión:

$$P = \log_{\sqrt[3]{3}} \left(\text{antilog}_{\sqrt[3]{3}} \left(\log_{\sqrt{2}} \left(\text{antilog}_{\sqrt{2}} \left(\text{colog}_{\sqrt{2}} 8 \right) \right) \right) \right)$$

El valor obtenido después de simplificar “P” es:

- A. 5
- B. 7
- C. 8
- D. -9

E. -5

RESOLUCIÓN:

Desarrollando por partes:

$$\text{colog}_{\sqrt[6]{2}} 8 = -\log_{\sqrt[6]{2}} 8 = -\log_{\frac{1}{2^6}} 2^3 = -18 \log_2 2 = -18$$

$$\text{antilog}_{\sqrt[4]{2}}(-18) = \sqrt[4]{2}^{-18} = \sqrt{2}^{-9}$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^{-9} = -9$$

Reemplazando finalmente se tiene:

$$P = \log_{\sqrt[3]{3}}(\text{antilog}_{\sqrt[3]{3}}(-9)) = -9$$

RPTA: D

7.7 FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Es la función inversa de la función exponencial, cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \log_a x$$

Siendo la función logaritmo con base "a" ($a > 0; a \neq 1; x > 0$)

Donde:

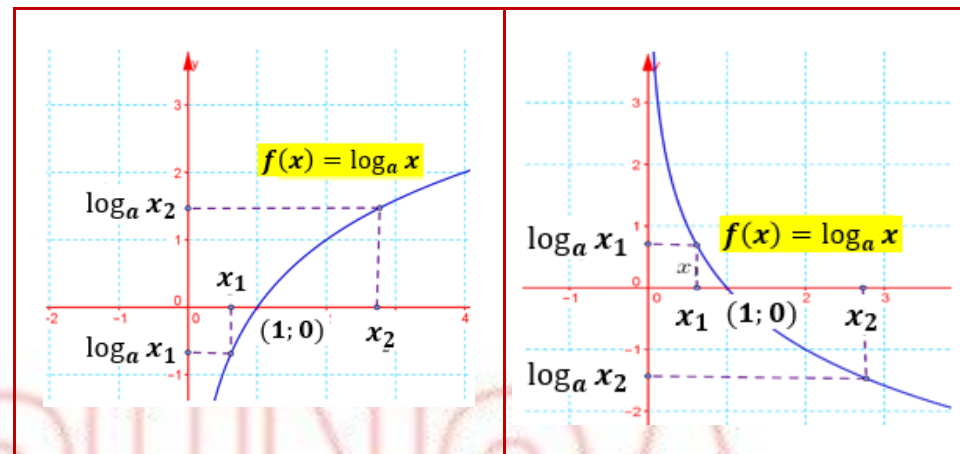
$$\text{Dom}(f) = \langle 0; +\infty \rangle$$

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$$

Es decir, $f = \{(x; \log_a x) / x \in \mathbb{R}^+; a > 0 \wedge a \neq 1\}$

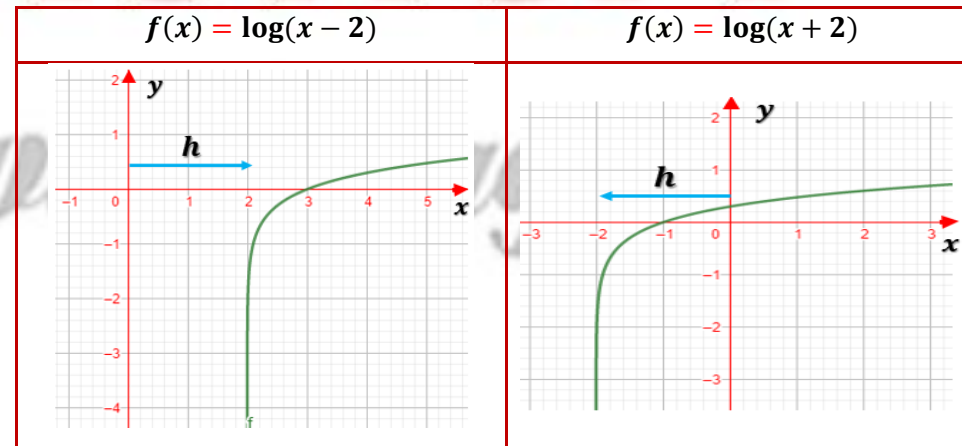
7.7.1 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN

Caso I: Base $a > 1$	Caso II: Base $0 < a < 1$
- Es una función creciente.	- Es una función decreciente.
- Se cumple: $x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$	- Se cumple: $x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$
- La gráfica pasa por el punto $(1; 0)$	- La gráfica pasa por el punto $(1; 0)$
- Asíntota vertical: $x = 0$	- Asíntota vertical: $x = 0$
$\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$	$\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$
$\text{Dom}(f) =]0, +\infty[$	$\text{Dom}(f) =]0, +\infty[$

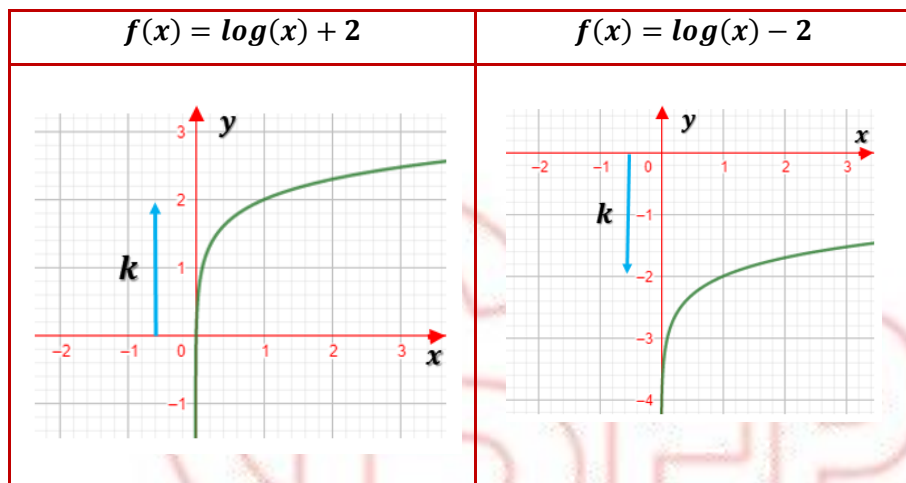


7.7.1.1 DESPLAZAMIENTOS:

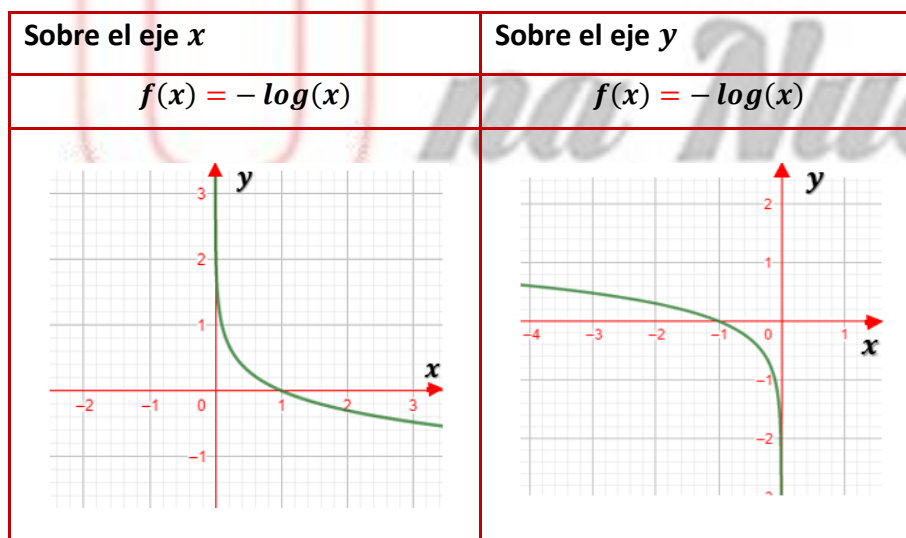
a) Horizontales:



b) Vertical:



7.7.1.2 REFLEJOS SOBRE LOS EJES.



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \log_{(x-2)}(4-x)$$

Determinar el dominio.

- A. $\langle 2; 4 \rangle - \{2\}$
- B. $\langle 2; 4 \rangle - \{3\}$
- C. $\langle -2; 4 \rangle - \{3\}$
- D. $\langle -2; 7 \rangle - \{0\}$
- E. $\langle 2; 5 \rangle - \{1\}$

RESOLUCIÓN:

Dada la función:

$$f(x) = \log_{(x-2)}(4-x)$$

Para determinar el dominio, por condición de logaritmos se debe cumplir:

$$x - 2 \neq 1 \wedge x - 2 > 0 \wedge 4 - x > 0$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} x &\neq 1 + 2 \wedge x > 2 \wedge -x > -4 \\ x &\neq 3 \wedge x > 2 \wedge x < 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$Dom(f) = \langle 2; 4 \rangle - \{3\}$$

RPTA: B

2. Sea "f" una función definida por:

$$f(x) = \sqrt{1 + \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x}$$

Determinar el dominio de la función.

- A. $\langle 0; 2 \rangle$

- B. $[1; 3]$
 C. $\left[\frac{1}{3}; 4\right]$
 D. $[-1; 3]$
 E. $\langle -1; 2]$

RESOLUCIÓN:

Para el cálculo del dominio se tiene:

$$1 + \log_{\frac{1}{2}} x \geq 0$$

$$\rightarrow x > 0 \wedge \log_{\frac{1}{2}} x \geq -1$$

$$\rightarrow x > 0 \wedge \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 2$$

$$\rightarrow x > 0 \wedge x \leq 2 \rightarrow 0 < x \leq 2$$

$$\text{Dom}(f) = \langle 0; 2]$$

RPTA: A

3. Dada la función "f":

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{x-5}\right) + 2$$

Hallar la suma del valor entero que no puede tomar el rango de la función con el menor valor entero positivo del dominio.

- A. 6
 B. 8
 C. 3
 D. 9
 E. 11

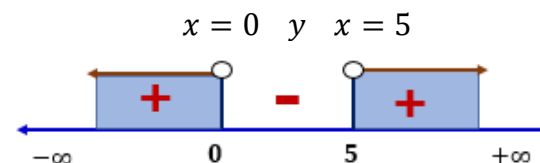
RESOLUCIÓN:

Dado: $f(x) = \log\left(\frac{x}{x-5}\right) + 2$

Teniendo en cuenta definición de logaritmo:

$$\frac{x}{x-5} > 0$$

Puntos críticos:



Entonces: $D_f = \langle -\infty; 0 \rangle \cup \langle 5; +\infty \rangle$

Menor valor entero positivo: 6

Para hallar el rango de la función vamos a despejar "x" y analizamos las restricciones:

$$y = \log\left(\frac{x}{x-5}\right) + 2$$

$$y - 2 = \log\left(\frac{x}{x-5}\right)$$

Aplicando definición de logaritmos:

$$10^{y-2} = \frac{x}{x-5}$$

$$\frac{10^y}{100} = \frac{x}{x-5}$$

$$10^y x - 5 \cdot 10^y = 100x$$

$$10^y x - 100x = 5 \cdot 10^y$$

$$x(10^y - 100) = 5 \cdot 10^y$$

$$x = \frac{5 \cdot 10^y}{10^y - 100}$$

$$10^y - 10^2 \neq 0$$

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

Valor entero que no puede tomar el rango: 2

Nos piden, la suma del valor entero que no puede tomar el rango de la función con el menor valor entero positivo del dominio.

$$(2) + 6 = 8$$

RPTA: B

4. Dada la función "f" definida por la regla de correspondencia:

$$f(x) = 4 \log_2 x + 1, \text{ si } \text{Dom}(f) = [8; 32]$$

Calcular el rango.

A. [11; 20]

B. [12; 21]

C. [13; 21]

D. [14; 23]

E. [15; 18]

RESOLUCIÓN:

La forma de la función cuando la base es mayor que 1 es creciente, además:

$$\text{Dom}(f) = [8; 32]$$

Es decir:

$$8 \leq x \leq 32$$

Reemplazamos valores extremos en la función:

$$f(x) = 4 \log_2 x + 1$$

$$x = 8 \rightarrow f(8) = 4 \log_2 8 + 1$$

$$f(8) = 4(3) + 1$$

$$f(8) = 13$$

$$x = 32 \rightarrow f(32) = 4 \log_2 32 + 1$$

$$f(32) = 4(5) + 1$$

$$f(32) = 21$$

Por lo tanto:

$$\text{Ran}(f) = [13; 21]$$

RPTA: C

5. La magnitud del sonido en decibeles "D" en función de la potencia se determina según la función:

$$D(P) = 160 + 10 \log P$$

Donde "P" ¿es la potencia en watts/cm^2 . Determinar la potencia del aire en estado libre, sabiendo que su magnitud en la ciudad de Arequipa es de 140 decibeles.

A. 0,012 watts/cm^2 .

B. 0,12 watts/cm^2 .

C. 0,123 watts/cm^2 .

D. 0,21 watts/cm^2 .

E. 0,01 watts/cm^2 .

RESOLUCIÓN:

Extraemos datos del enunciado:

$$D = 140 \text{ decibeles}$$

Evaluando en la función:

$$D(P) = 160 + 10 \log P$$

$$140 = 160 + 10 \log P$$

$$-20 = 10 \log P$$

$$-2 = \log P$$

Aplicamos la definición de logaritmos:

$$10^{-2} = P$$

Por lo tanto, la potencia es de:

$$P = 0.01 \frac{\text{watts}}{\text{cm}^2}$$

RPTA: E

6. La empresa arequipeña “Autos Pibe Valderrama” logra el ensamblaje de autos según el modelo $f(t) = 500(1 - e^{-0,1t})$ unidades, después de “ t ” días. Calcular la cantidad de días que se necesitan para lograr ensamblar 400 autos? (Considere $\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -1,6$)

- A. 4 días
- B. 6 días
- C. 8 días
- D. 16 días
- E. 32 días

RESOLUCIÓN:

Se requiere ensamblar 400 autos, reemplazamos dicha cantidad en:

$$\begin{aligned} f(t) &= 500(1 - e^{-0,1t}) \\ 400 &= 500(1 - e^{-0,1t}) \\ 4 &= 5(1 - e^{-0,1t}) \\ \frac{4}{5} &= (1 - e^{-0,1t}) \\ \frac{4}{5} - 1 &= -e^{-0,1t} \\ -\frac{1}{5} &= -e^{-0,1t} \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de signo:

$$\frac{1}{5} = e^{-0,1t}$$

Aplicamos $\ln$ en ambos lados:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{5}\right) &= \ln(e^{-0,1t}) \\ \ln\left(\frac{1}{5}\right) &= \ln e^{-0,1t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{5}\right) &= -0,1t(\ln e) \\ -1,6 &= -0,1t \end{aligned}$$

$$16 = t$$

Por lo tanto, 400 autos se ensamblarán en:

$$t = 16 \text{ días}$$

RPTA: D

7. La población futura del pueblo Arenal en Mollendo, actualmente es de 8 000 habitantes puede aproximarse mediante la función:

$$f(t) = 8\,000(1,4)^{-0,2t}$$

Donde “ t ” es el número de años a partir de hoy. Determinar cuántos años tiene que transcurrir para que la población del Arenal tenga 4 000 habitantes.

(Siendo: $\log 0,5 = -0,30$ y $\log 1,4 = 0,15$)

- A. 9 años
- B. 8 años
- C. 10 años
- D. 11 años
- E. 12 años

RESOLUCIÓN:

De la función dada:

$$f(t) = 8\,000(1,4)^{-0,2t}$$

Nos piden determinar a los cuantos años tendrá:

$$f(t) = 4\,000 \text{ habitantes}$$

Reemplazamos:

$$\begin{aligned} 4\,000 &= 8\,000(1,4)^{-0,2t} \\ \frac{1}{2} &= 1,4^{-0,2t} \end{aligned}$$

Aplicamos $\log$ en ambos lados:

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(1,4)^{-0,2t}$$

Por logaritmo de una potencia:

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) = (-0,2t)\log(1,4)$$

$$\frac{\log 0,5}{\log 1,4} = -0,2t$$

$$\frac{\log 0,5}{-0,2 \log 1,4} = t$$

$$t = -\frac{\log 0,5}{0,2 \log 1,4} \dots (I)$$

Reemplazamos:

$$\log 0,5 = -0,30 \text{ y } \log 1,4 = 0,15$$

En la ecuación (I):

$$t = -\frac{(-0,30)}{0,2(0,15)}$$

Por lo tanto, habrá 4 000 habitantes en:

$$t = 10 \text{ años}$$

RPTA: C

8. Si la siguiente función:

$$f(x) = \log_6 \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{x^2-1} \right)$$

Calcular la suma de los valores enteros que no pertenecen al dominio de la función $f(x)$.

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

E. 4

RESOLUCIÓN:

Por condición de la función logaritmo, hallamos $Dom(f)$:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{x^2-1} > 0$$

Por M.C.M:

$$\frac{x^2 + x - 2x + 2 - 8}{(x+1)(x-1)} > 0$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{(x+1)(x-1)} > 0$$

Factorizando el numerador:

$$\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-1)} > 0$$

Analizamos el Denominador:

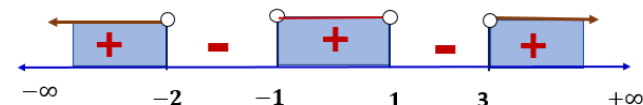
$$x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$$

$$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

Puntos críticos:

$$x = 3; x = -2; x \neq -1; x \neq 1$$

Graficando:



Los valores enteros que no puede asumir "x" son

-2; -1; 1; 2 y 3

Nos piden la suma de dichos valores:

$$-2 - 1 + 1 + 2 + 3 = 3$$

RPTA: D

CAPÍTULO VIII

GEOMETRÍA ANALÍTICA

El objetivo fundamental de la geometría analítica consiste en crear representaciones visuales de los conceptos matemáticos mediante el uso de los sistemas de coordenadas.

En este capítulo además de ubicar, representar puntos utilizando las coordenadas cartesianas, estudiaremos los métodos básicos para hallar las coordenadas de un punto según sus características y condiciones, encontraremos la representación de la recta a través de una ecuación lineal utilizando para ello elementos que la definen. Utilizaremos estrategias para resolver problemas que involucren propiedades y ecuaciones de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.



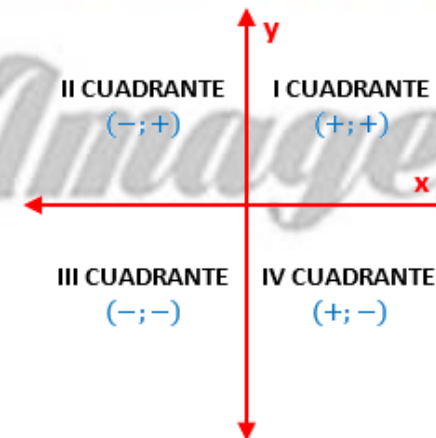
8 GEOMETRÍA ANALÍTICA

8.1 GEOMETRÍA ANALÍTICA

8.1.1 SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

René Descartes, matemático francés, en 1637 define una ecuación algebraica para cada figura geométrica; es decir, un conjunto de pares ordenados de números reales (x ; y) tal que a cada par se le asocia un punto del plano llamado **PLANO CARTESIANO**.

El plano cartesiano son dos rectas perpendiculares, cuyo punto de intersección se denomina origen. La recta horizontal recibe el nombre de eje " x " o eje de las abscisas y la recta vertical recibe el nombre de eje " y " o eje de las ordenadas.

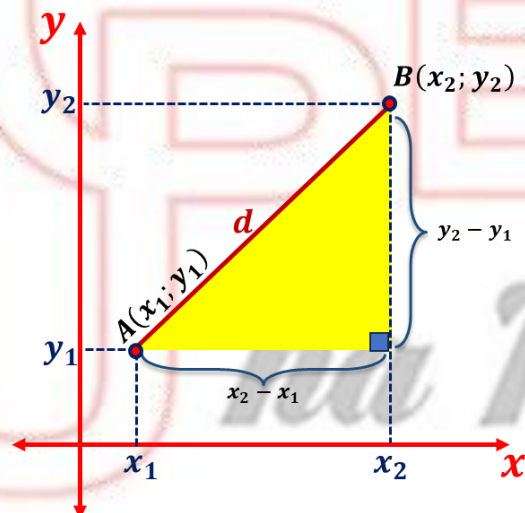


El plano cartesiano presenta cuatro regiones llamadas "cuadrantes" y a cada punto P se le asigna un par coordenado $P(x, y)$. (Lehman, 2015)

8.1.2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos, se define como el valor numérico o valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos. (Lehman, 2015)

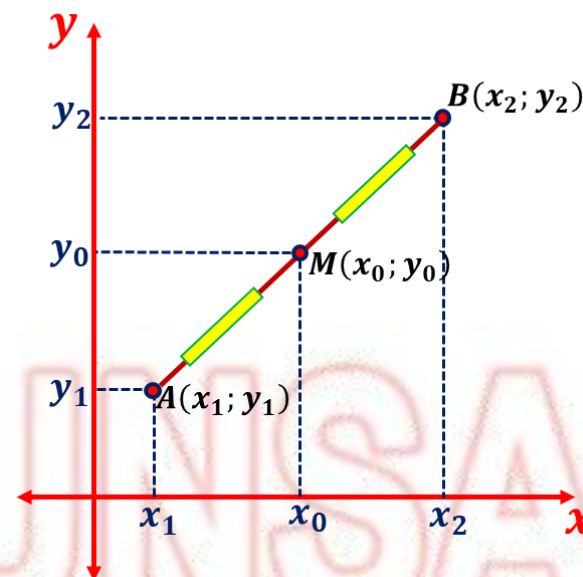
Para determinar esa distancia, podemos utilizar el teorema de Pitágoras, o la fórmula de distancia entre dos puntos obtenida del Teorema de Pitágoras.



$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

8.1.3 PUNTO MEDIO

Sea M , punto medio de $\overline{AB}$



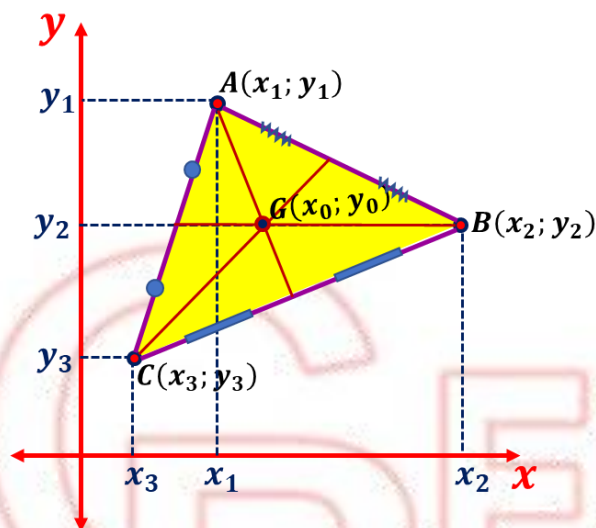
$$M = (x_0; y_0)$$

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

8.1.4 BARICENTRO

El baricentro de un triángulo es el punto de intersección de todas las medianas.

En efecto:



$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

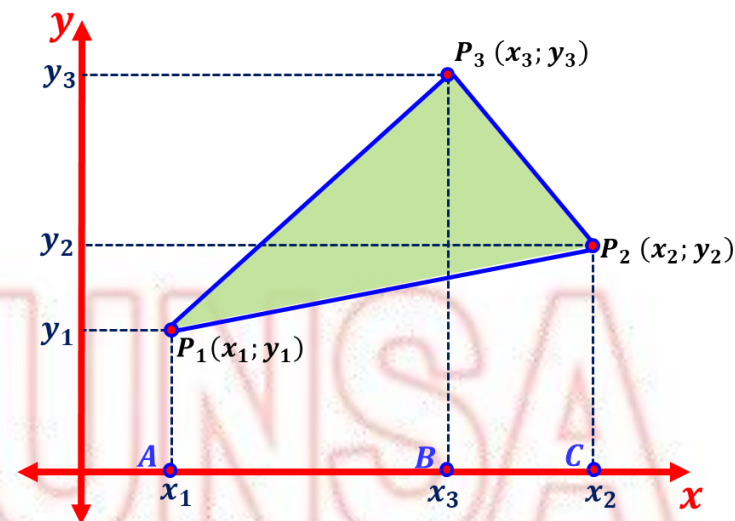
8.1.5 ÁREA DE POLÍGONOS CONOCIENDO LAS COORDENADAS DE SUS VÉRTICES

8.1.5.1 ÁREA DE UN TRIÁNGULO CONOCIENDO LAS COORDENADAS DE SUS VÉRTICES

Sean $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ y $P_3(x_3; y_3)$ los vértices de un triángulo.

El área del triángulo en función de las coordenadas de los vértices es dado por:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



$$A_{\Delta} = AP_1P_3B + BP_3P_2C - AP_1P_2C$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3)$$

Que expresado en forma de determinante es:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

calcularemos su área haciendo uso de la determinante.

IMPORTANTE:

La forma más práctica para calcular el determinante es:

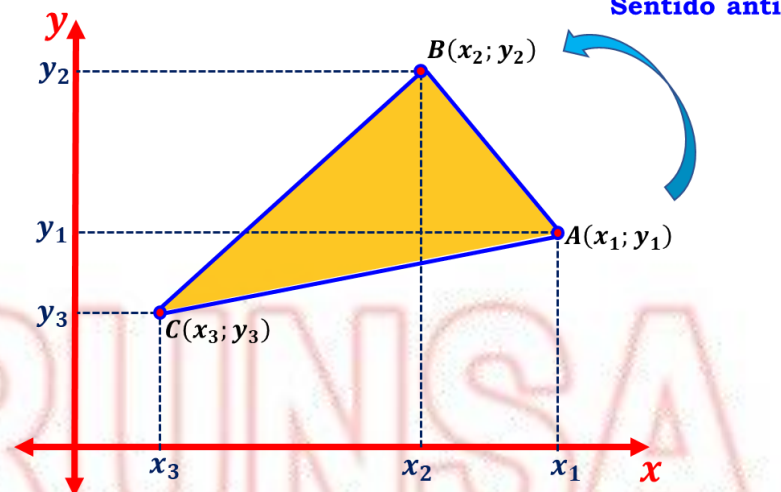
$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3)$$

Observación: Para el cálculo del área de cualquier polígono convexo conociendo las coordenadas de sus vértices. Bastará con conocer la ubicación de estos; ya que, tomaremos un punto como referencia y seguiremos en sentido antihorario para la representación de la determinante correspondiente.

Por ejemplo, dado las coordenadas de los puntos A, B y C ; si tomamos como referencia el punto A , seguiremos en sentido antihorario y

Sentido antihorario



Determinante

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{matrix} x_2 y_1 \\ x_3 y_2 \\ x_1 y_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 y_2 \\ x_2 y_3 \\ x_3 y_1 \end{matrix} +$$

$$\underline{N} \quad \underline{M}$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} |M - N|$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si $G\left(6; \frac{10}{3}\right)$ es el baricentro del triángulo con vértices $A(-1; 3)$, $B(8; -6)$ y $C(a; 9 + b)$. Hallar el valor de " $a - b$ "

- A. 5
- B. 7
- C. 8
- D. 10
- E. 4

RESOLUCIÓN:

Sean los vértices del triángulo:

$$A(-1; 3), B(8; -6) \text{ y } C(a; 9 + b)$$

Como el baricentro es $G\left(6; \frac{10}{3}\right)$

$$6 = \frac{-1 + 8 + a}{3} \quad \frac{10}{3} = \frac{3 - 6 + 9 + b}{3}$$

$$18 = 7 + a$$

$$10 = 6 + b$$

$$11 = a$$

$$4 = b$$

Nos piden: $a - b$

$$\frac{11 - 4}{7}$$

$$\therefore a - b = 7$$

RPTA: B

2. Se tienen los puntos $A(3; 7)$ y $B(17; 11)$. Calcular la distancia del punto medio del segmento $\overline{AB}$ al origen de coordenadas.

- A. $45 u$
- B. $\sqrt{161} u$
- C. $58 u$
- D. $\sqrt{91} u$
- E. $\sqrt{181} u$

RESOLUCIÓN:

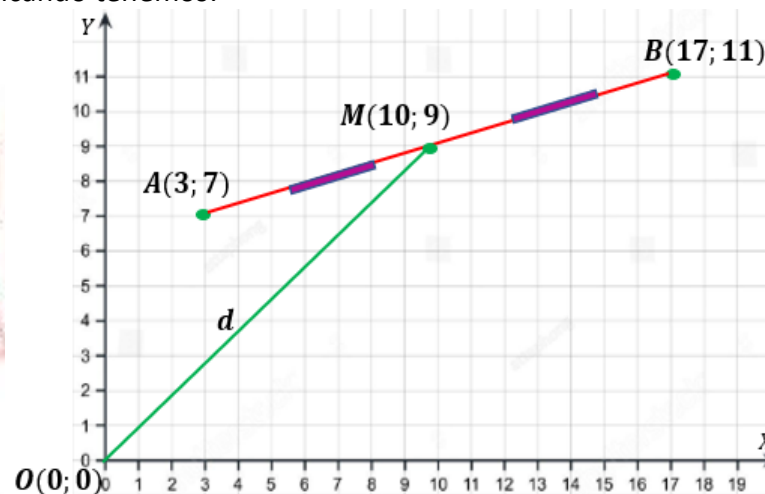
Sea M el punto medio de: $A(3; 7)$ y $B(17; 11)$

$$M = \left(\frac{3 + 17}{2}; \frac{7 + 11}{2}\right)$$

$$M = (10; 9)$$

La coordenada del origen es: $O(0; 0)$

Graficando tenemos:



Distancia entre los puntos: $M(10; 9)$ y $O(0; 0)$

$$d = \sqrt{(10 - 0)^2 + (9 - 0)^2}$$

$$d = \sqrt{100 + 81}$$

$$\therefore d = \sqrt{181} u$$

RPTA: E

3. Hallar el área del triángulo ABC , sabiendo que dos de sus vértices son $A(0; 0)$ y $B(2; 2)$, además, la intersección de las medianas es $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$

- A. $7 u^2$
- B. $4 u^2$

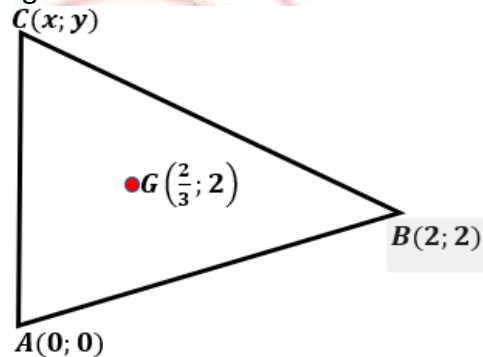
- C. $2u^2$
- D. $9u^2$
- E. $10u^2$

RPTA: B

RESOLUCIÓN:

El punto $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ es la intersección de las medianas entonces es el baricentro del triángulo.

Graficando el triángulo ABC :



Hallamos las coordenadas de $C(x; y)$ conociendo el baricentro:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{0 + x + 2}{3} & 2 &= \frac{0 + y + 2}{3} \\ 2 &= x + 2 & 6 &= y + 2 \\ 0 &= x & 4 &= y \end{aligned}$$

Por lo tanto: $C(0; 4)$

Hallamos el área del triángulo ABC :

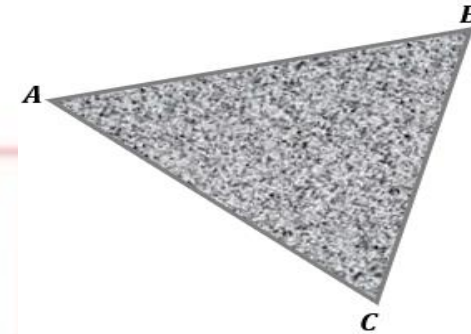
$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} |0(2) + 2(4) + 0(0) - 0(2) - 2(0) - 4(0)|$$

$$A = \frac{1}{2} |8|$$

$$\therefore A = 4u^2$$

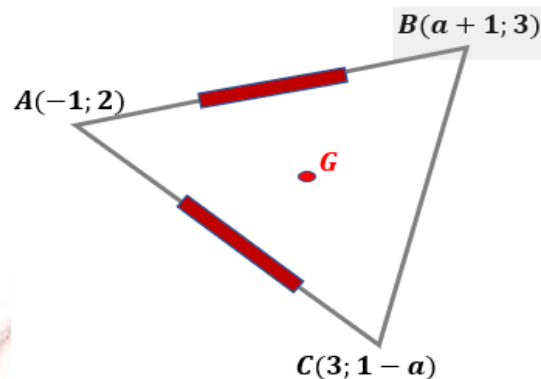
4. En la figura, ABC es una plancha metálica que tiene la forma de un triángulo isósceles cuya base es $\overline{BC}$, donde $A(-1; 2)$, $B(a + 1; 3)$ y $C(3; 1 - a)$. Hallar el centro de gravedad de esta plancha metálica.



- A. $(4; 1)$
- B. $(4; 0)$
- C. $(3; 0)$
- D. $(6; 0)$
- E. $(3; 5)$

RESOLUCIÓN:

El centro de gravedad de la plancha es el baricentro "G". Como $\overline{BC}$ es la base y el triángulo es isósceles entonces $AB = AC$.



Hallamos la $d(A, B)$

$$d(A, B) = \sqrt{[a+1 - (-1)]^2 + (3-2)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{[a+2]^2 + (1)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{a^2 + 4a + 4 + 1}$$

$$d(A, B) = \sqrt{a^2 + 4a + 5}$$

Hallamos la $d(A, C)$

$$d(A, C) = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + [1 - a - 2]^2}$$

$$d(A, C) = \sqrt{[4]^2 + (-1 - a)^2}$$

$$d(A, C) = \sqrt{16 + 1 + 2a + a^2}$$

$$d(A, C) = \sqrt{17 + 2a + a^2}$$

Del triángulo isósceles:

$$d(A, B) = d(A, C)$$

$$\sqrt{a^2 + 4a + 5} = \sqrt{17 + 2a + a^2}$$

$$\sqrt{a^2 + 4a + 5}^2 = \sqrt{17 + 2a + a^2}^2$$

$$a^2 + 4a + 5 = 17 + 2a + a^2$$

$$2a = 12$$

$$a = 6$$

$$B(a+1; 3) = (7; 3)$$

$$C(3; 1-a) = (3; -5) \quad \text{y} \quad A(-1; 2)$$

Hallamos el baricentro "G" del triángulo ABC:

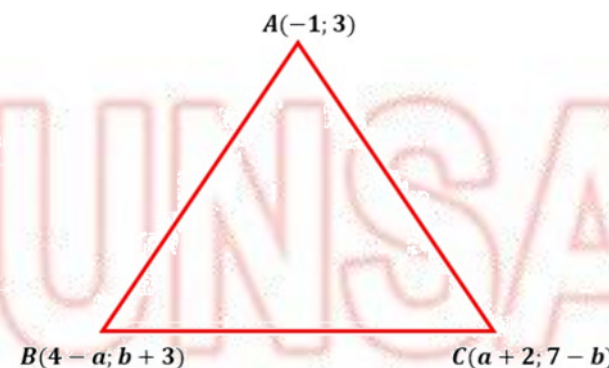
$$G(x; y) = \left(\frac{-1+7+3}{3}; \frac{2+3-5}{3} \right)$$

$$G(x; y) = (3; 0)$$

Por lo tanto, el centro de gravedad de la plancha es (3; 0)

RPTA: C

5. En el plano cartesiano se muestra el triángulo equilátero ABC, si se sabe que $A(-1; 3)$, $B(4-a; b+3)$ y $C(a+2; 7-b)$. Hallar el área del triángulo ABC.



A. $\frac{14\sqrt{3}}{3} u^2$

B. $\frac{3\sqrt{3}}{4} u^2$

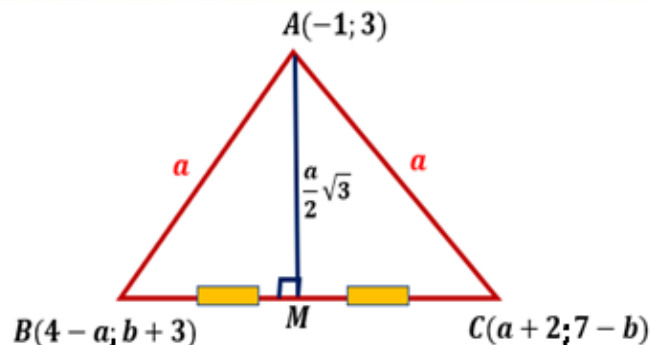
C. $20 u^2$

D. $\frac{20\sqrt{3}}{3} u^2$

E. $15 u^2$

RESOLUCIÓN:

Sea "a" el lado del triángulo equilátero y trazamos $\overline{AM}$ que es la altura y mediana entonces en todo triángulo equilátero se cumple que la altura es $AM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.



Del triángulo "M" es punto medio:

$$M = \left(\frac{4-a+a+2}{2}; \frac{b+3+7-b}{2} \right)$$

$$M = (3; 5)$$

Hallamos la distancia entre los puntos $A(-1; 3)$ y $M(3; 5)$

$$d = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (5 - 3)^2}$$

$$d = \sqrt{4^2 + 2^2}$$

$$d = \sqrt{20}$$

$$\frac{a}{2}\sqrt{3} = \sqrt{20}$$

$$a = \frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{3}}$$

El área del triángulo equilátero es:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A = \left(\frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A = \left(\frac{80}{3} \right) \frac{\sqrt{3}}{4}$$

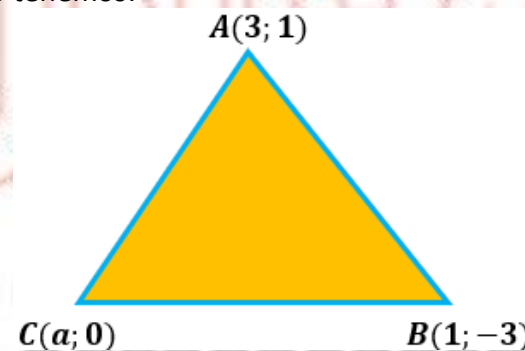
$$\therefore A = \frac{20\sqrt{3}}{3} u^2$$

6. Se tiene la región triangular ABC de $9u^2$ de área, si $A(3; 1)$, $B(1; -3)$ y $C(a; 0)$. Hallar las coordenadas de "C" que pertenece al semieje negativo de las abscisas.

- A. (3; 0)
- B. (6; 0)
- C. (-5; 0)
- D. (-2; 0)
- E. (-1; 0)

RESOLUCIÓN:

En el triángulo tenemos:



$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \\ a & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} |3(-3) + 1(0) + a(1) - 1(1) - a(-3) - 3(0)|$$

$$A = \frac{1}{2} |-9 + a - 1 + 3a|$$

$$A = \frac{1}{2} |4a - 10|$$

$$9 = \frac{1}{2} |4a - 10|$$

$$|4a - 10| = 18$$

RPTA: D

Por propiedad de valor absoluto tenemos:

$$\begin{aligned} 4a - 10 &= 18 \quad \vee \quad 4a - 10 = -18 \\ 4a &= 28 \quad \vee \quad 4a = -8 \\ a &= 7 \quad \vee \quad a = -2 \end{aligned}$$

Del enunciado el punto $C(a; 0)$ pertenece al semieje negativo de las abscisas:

$$a = -2$$

Por lo tanto, la coordenada es $C(-2; 0)$

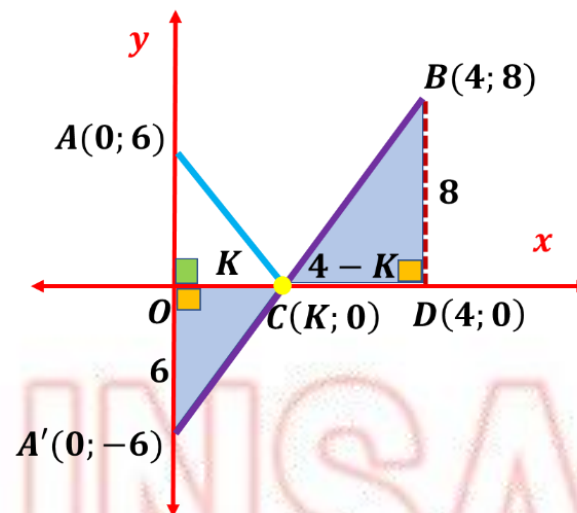
RPTA: D

7. Sean los puntos $A = (0; 6)$, $B = (4; 8)$ y $C = (K; 0)$. Hallar la abscisa de "C", para que el recorrido del punto A hacia el punto B, pasando por C, sea el menor posible.

- A. $\frac{12}{7}$
- B. $\frac{15}{7}$
- C. $\frac{13}{7}$
- D. $\frac{11}{7}$
- E. 2

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Nos piden encontrar el menor recorrido para ir de "A" a "B" tocando un punto del eje x .

Luego, ubicamos el simétrico de A respecto a O que será:

$$A' = (0; -6)$$

Luego al unir $\overline{A'B}$ ubicamos $(K; 0)$

Relacionamos con triángulos semejantes: $\triangle A'OC \sim \triangle BDC$:

$$\begin{aligned} \frac{K}{6} &= \frac{4 - K}{8} \\ \frac{K}{3} &= \frac{4 - K}{4} \\ 4K &= 12 - 3K \\ \therefore K &= \frac{12}{7} \end{aligned}$$

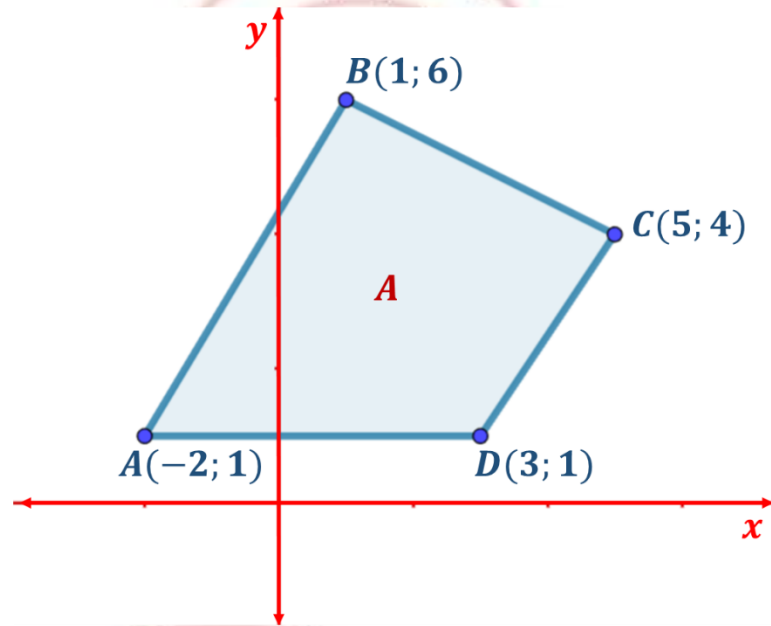
RPTA: A

8. El área de un terreno, en metros cuadrados, que desea comprar Alicia es equivalente a 6 veces el área determinado por los puntos $A(-2; 1)$, $B(1; 6)$, $C(5; 4)$ y $D(3; 1)$. Calcular el monto a pagar si el metro cuadrado está en 120 dólares.

- A. 54 020 dólares
 B. 26 300 dólares
 C. 20 500 dólares
 D. 14 760 dólares
 E. 21 960 dólares

RESOLUCIÓN:

Ubicamos los puntos en el plano cartesiano y trazamos el cuadrilátero:



Conociendo la ubicación de los puntos, calculamos el área del polígono usando determinantes. Considerando las coordenadas ubicándolas en el esquema siguiendo el sentido antihorario.

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M = (-2)(1) + (3)(4) + (5)(6) + (1)(1)$$

$$N = (3)(1) + (5)(1) + (1)(4) + (-2)(6)$$

$$M = -2 + 12 + 30 + 1 = 41$$

$$N = 3 + 5 + 4 - 12 = 0$$

$$A = \frac{1}{2} |M - N|$$

$$A = \frac{1}{2} |41 - 0|$$

$$A = 20,5 u^2$$

Dada la condición, el área del terreno es: $6(20,5) m^2 = 123 m^2$

Por lo tanto, Alicia pagará por el terreno: $123 \cdot 120 = 14\,760$ dólares.

RPTA: D

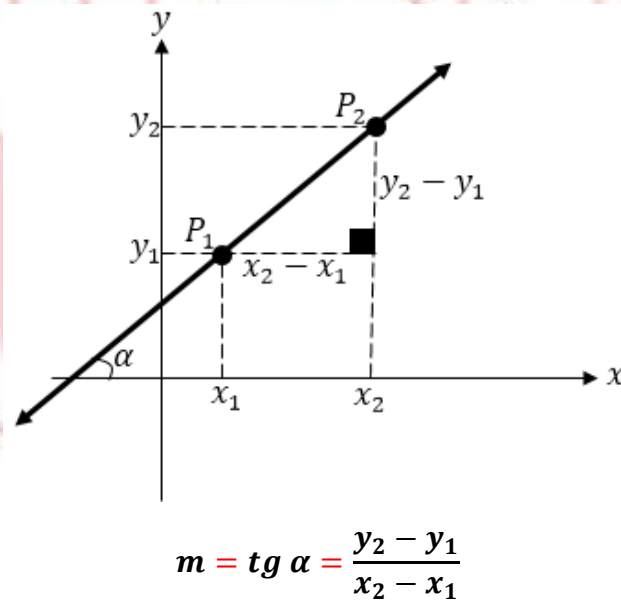
8.2 ECUACIÓN DE LA RECTA: CLASES

8.2.1 LA RECTA:

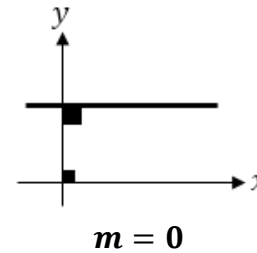
La recta es el lugar geométrico formada por una serie continua de puntos en una misma dirección.

8.2.2 PENDIENTE DE UNA RECTA

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas.



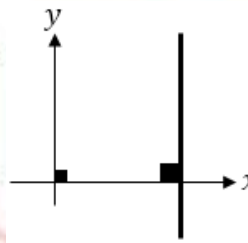
Rectas Horizontales



$$y - k = 0$$

En una recta horizontal la pendiente es cero.

Rectas Verticales

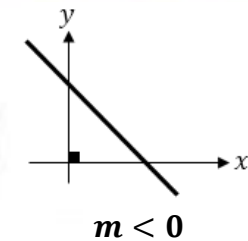


$$x - k = 0$$

Una recta vertical no tiene pendiente.

No existe "m"

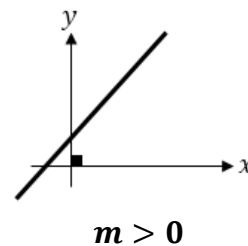
Rectas de pendiente negativa



$$y = mx + b$$

Donde "m" es negativa.

Rectas de pendiente positiva



$$y = mx + b$$

Donde "m" es positiva.

8.2.3 FORMAS DE ECUACIÓN DE LA RECTA

ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA:

$$L: Ax + By + C = 0$$

Pendiente:

$$m = -\frac{A}{B}$$

ECUACIÓN PUNTO PENDIENTE:

Si la recta L pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y tiene una pendiente " m ", entonces:

$$L: y - y_0 = m(x - x_0)$$

FORMA CARTESIANA:

Si la recta pasa por $P_0(x_0; y_0)$ y $P_1(x_1; y_1)$, entonces:

$$L: y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

FORMA ORDINARIA:

b : ordenada al origen y m :pendiente

$$y = mx + b$$

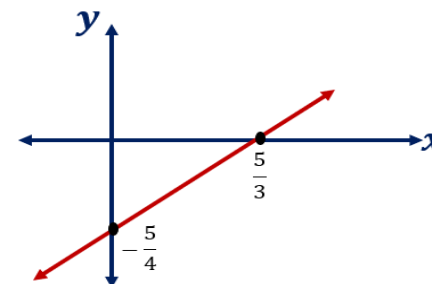
FORMA SIMÉTRICA:

La recta L corta a los ejes coordenados en los puntos $(a; 0)$ y $(0; b)$; " a ", es intercepto con el eje " x " y " b ", es intercepto con el eje " y "

$$L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

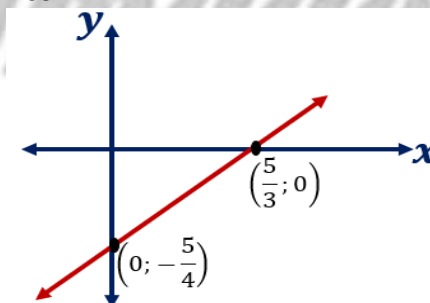
1. A partir de la gráfica, halle la pendiente de la recta L representada.



- A. $\frac{1}{2}$
- B. -1
- C. 1
- D. $\frac{3}{4}$
- E. $-\frac{4}{3}$

RESOLUCIÓN:

Según nuestro gráfico:



Interceptos con x

$(\frac{5}{3}; 0)$ con y $(0; -\frac{5}{4})$

Hallamos la pendiente m

RPTA: A

$$m = \frac{0 - \left(-\frac{5}{4}\right)}{\frac{5}{3} - 0}$$

$$m = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{4}$$

∴ La pendiente es $\frac{3}{4}$

RPTA: D

2. Si se conocen los puntos: $P(1; 4)$ y $Q(7; -3)$; además, la pendiente de una recta que contiene a esos puntos es " $-\frac{a}{b}$ ". Hallar " ab ".

- A. 42
- B. 24
- C. 23
- D. 31
- E. 47

RESOLUCIÓN:

Tenemos los puntos $P(1; 4)$ y $Q(7; -3)$
Hallamos la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-3 - 4}{7 - 1} = -\frac{7}{6}$$

La pendiente debe ser $m = -\frac{a}{b}$

Comparando $-\frac{a}{b} = -\frac{7}{6}$

Deducimos que $a = 7$ y que $b = 6$

Por lo tanto $a \cdot b = (7)(6) = 42$

3. Tres amigas Belén, Carola y Silvia se encuentran en los puntos $B(-2; 4)$, $C(0; 1)$ y $S(4; -5)$, ellas piensan que se encuentran en una misma calle que puede ser representada por una recta. Determina si esta afirmación es cierta, si es así, ¿cuál es la pendiente de la recta que representa la calle en que se encuentran?

- A. $\frac{2}{3}$
- B. $\frac{3}{2}$
- C. $-\frac{3}{2}$
- D. $-\frac{2}{3}$
- E. 1

RESOLUCIÓN:

Para que las tres amigas se encuentren en la misma calle los puntos B, C y S deben ser colineales y tener la misma pendiente.

$B(-2; 4)$, $C(0; 1)$ y $S(4; -5)$,

$$m_{\overline{BC}} = \frac{1 - 4}{0 - (-2)} = \frac{-3}{2} \rightarrow m_{\overline{BC}} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{BS}} = \frac{-5 - 4}{4 - (-2)} = \frac{-9}{6} \rightarrow m_{\overline{BS}} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{CS}} = \frac{-5 - 1}{4 - 0} = \frac{-6}{4} \rightarrow m_{\overline{CS}} = -\frac{3}{2}$$

Se observa que las pendientes son todas iguales por lo que se deduce que los puntos son colineales y las tres estarían en la misma calle.

$$\therefore m = -\frac{3}{2}$$

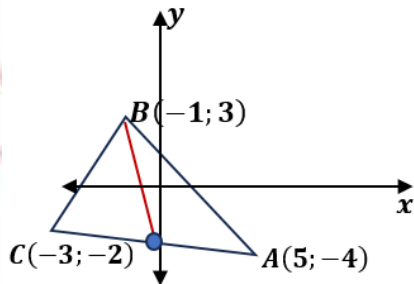
RPTA: C

4. Los vértices de un triángulo ABC tienen por coordenadas $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$ y $C(-3; -2)$. Hallar la pendiente de la mediana $\overline{BN}$.

- A. -3
- B. -7
- C. -2
- D. -5
- E. -4

RESOLUCIÓN:

Graficando



Calculemos el punto medio de $A(5; -4)$ y $C(-3; -2)$.

$$\Rightarrow N = \left(\frac{5 + (-3)}{2}; \frac{-4 + (-2)}{2} \right) = (1; -3)$$

Ahora calculemos la pendiente de $\overline{BN}$

$$m = \frac{-3 - 3}{1 - (-1)} \Rightarrow m = \frac{-6}{2} = -3$$

RPTA: A

5. Determinar las coordenadas del punto $B(x; x - 2)$, Si otro punto de la recta es $A(2; -4)$, además el ángulo de inclinación es 53° .

- A. (12; 14)
- B. (15; 10)

- C. (14; 12)
- D. (12; 17)
- E. (18; 9)

RESOLUCIÓN:

Ya que se tiene dos puntos, entonces calculemos la pendiente:

$$m = \frac{x - 2 - (-4)}{x - 2 - (-2)}$$

$$m = \frac{x + 2}{x - 2}$$

Por dato se tiene el ángulo de inclinación:

Entonces

$$m = \operatorname{tg} 53^\circ$$

Por lo tanto:

$$m = \frac{x + 2}{x - 2} = \operatorname{tg} 53^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 3(x + 2) = 4(x - 2)$$

$$\Rightarrow 3x + 6 = 4x - 8$$

$$\Rightarrow x = 14$$

$$B(x; x - 2) \rightarrow B(14; 12)$$

Por consiguiente, las coordenadas del punto B son:

$$B(14; 12)$$

RPTA: C

6. La ecuación de la recta que pasa por $P(5; 6)$ y por el baricentro del triángulo con vértices en los puntos $A(4; -3)$, $B(-4; 11)$ y $C(-6; 1)$, es:

- A. $7x + 3y - 27 = 0$
- B. $3x + 7y - 27 = 0$
- C. $-3x + 7y - 27 = 0$

D. $-7x + 3y + 27 = 0$

E. $7x - 3y + 27 = 0$

RESOLUCIÓN:

Calculando el baricentro del triángulo:

$$B = \left(\frac{4 - 4 - 6}{3}; \frac{-3 + 11 + 1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow B = (-2; 3)$$

Ahora para calcular la ecuación de la recta que pase por $P(5; 6)$ y el baricentro, primero calculemos la pendiente

$$m = \frac{6 - 3}{5 - (-2)} \Rightarrow m = \frac{3}{7}$$

Como la recta que pasa por $P(5; 6)$

$$y - y_0 = m_1(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - 6 = \frac{3}{7}(x - 5)$$

$$\Rightarrow 7y - 42 = 3x - 15$$

$$\Rightarrow 3x - 7y + 27 = 0$$

RPTA: C

7. Dados los puntos $A(-2; 3)$ y $B(6; 5)$, la pendiente de la recta L que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ es $-2/3$. Hallar la ecuación de la recta L .

A. $2x + y - 11 = 0$

B. $3x + 2y - 9 = 0$

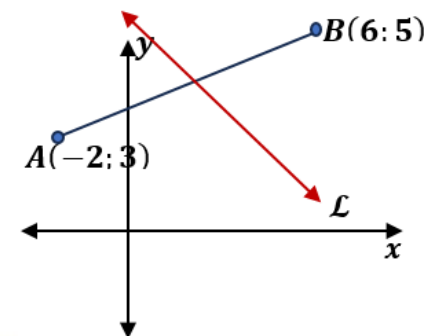
C. $5x - y + 1 = 0$

D. $2x + y - 10 = 0$

E. $2x + 3y - 16 = 0$

RESOLUCIÓN:

Graficando

Calculando el punto medio de $A(-2; 3)$ y $B(6; 5)$

$$\Rightarrow M = \left(\frac{-2 + 6}{2}; \frac{3 + 5}{2} \right)$$

$$\Rightarrow M = (2; 4)$$

Como también la pendiente de la recta es

$$m = -2/3$$

Por lo tanto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 3y - 12 = -2x + 4$$

Por lo tanto, la ecuación a calcular es:

$$2x + 3y - 16 = 0$$

RPTA: E

8. En una recta ubicamos los puntos $A(-2; a)$, $B(a; 3a)$ y $C(7; a + 6)$. Calcular el valor de " a ".

A. 1

B. 2

C. 3

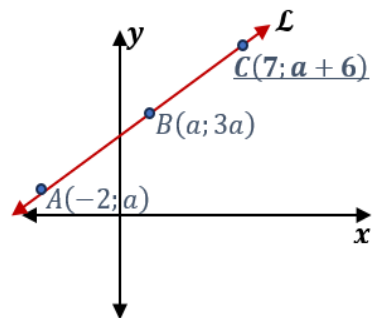
D. 5

E. 4

RESOLUCIÓN:

Como $A(-2; a)$, $B(a; 3a)$ y $C(7; a + 6)$ se encuentran en una misma recta, entonces son colineales.

Graficando



Por lo tanto:

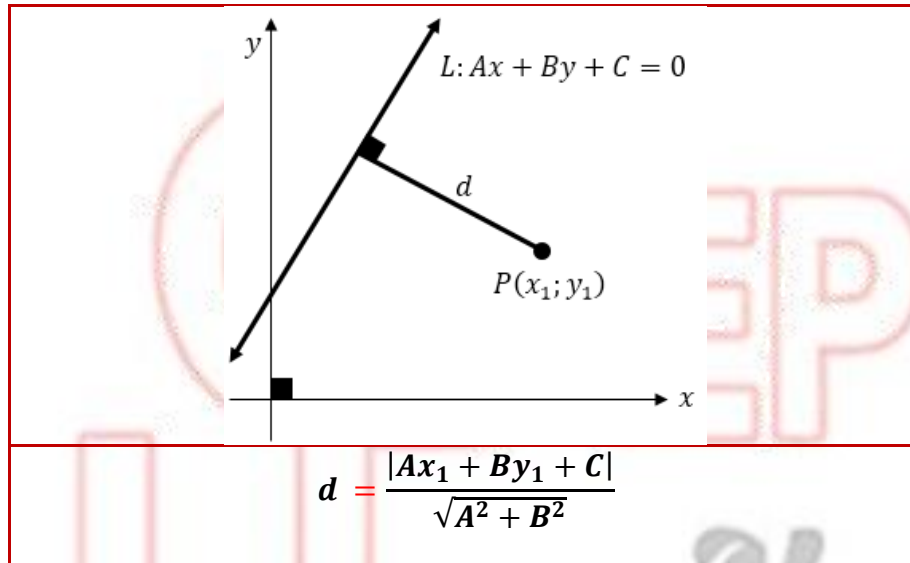
$$\begin{aligned}\frac{3a - a}{a - (-2)} &= \frac{a + 6 - 3a}{7 - a} \\ \Rightarrow 2a(7 - a) &= (6 - 2a)(a + 2) \\ \Rightarrow 14a - 2a^2 &= 6a + 12 - 2a^2 - 4a \\ \Rightarrow 14a &= 2a + 12 \\ \Rightarrow 12a &= 12 \\ \therefore a &= 1\end{aligned}$$

RPTA: A

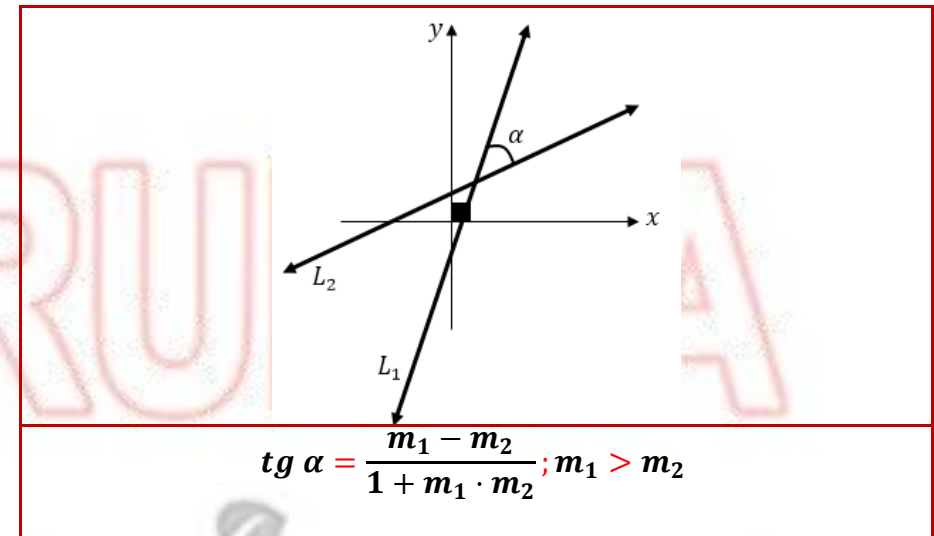
8.3 POSICIONES RELATIVAS A DOS RECTAS, PARALELAS Y PERPENDICULARES.

8.3.1 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

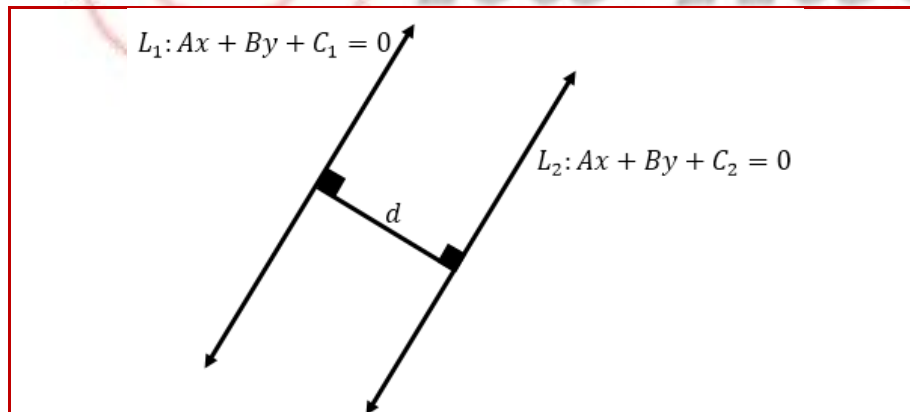
$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



8.3.3 ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS:



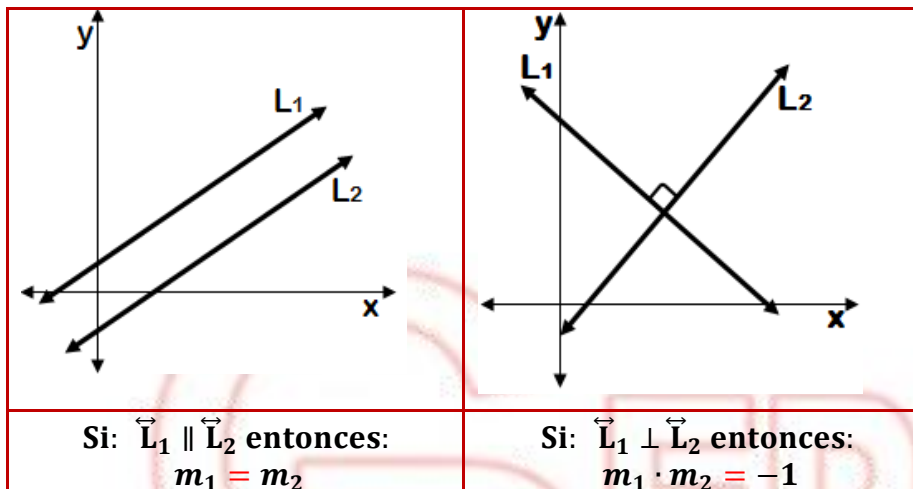
8.3.2 DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS



8.3.4 RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES:

Rectas Paralelas:

Rectas Perpendiculares



PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. ¿Cuál es la medida de un ángulo obtuso que forman las rectas cuyas pendientes son 2 y -3 ?

- A. 130°
- B. 128°
- C. 145°
- D. 135°
- E. 170°

RESOLUCIÓN:

Pendientes

$$m_1 = 2 \text{ y } m_2 = -3$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{-3 - 2}{1 + (-3)(2)} = \frac{-5}{-5} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \theta = 1 \rightarrow \theta = 45^\circ$$

El ángulo obtuso sería el suplemento de 45° entonces $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

RPTA: D

2. La recta que pasa por el punto $(1; 2)$ y es perpendicular a la recta: $3x - 4y + 12 = 0$, tiene por ecuación.

- A. $3x + 2y + 1 = 0$
- B. $2x + y - 8 = 0$
- C. $4x + 3y - 10 = 0$
- D. $6x + 3y - 12 = 0$
- E. $3x + 4y - 10 = 0$

RESOLUCIÓN:

Obteniendo la pendiente de la recta:

$$3x - 4y + 12 = 0$$

$$m = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Ahora como las rectas son perpendiculares

$$\begin{aligned} m \cdot m_1 &= -1 \\ \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot m_1 &= -1 \\ \Rightarrow m_1 &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Ahora como se tiene el punto de paso $(1; 2)$

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m_1(x - x_0) \\ \Rightarrow y - 2 &= -\frac{4}{3}(x - 1) \\ \Rightarrow 3y - 6 &= -4x + 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es:

$$\Rightarrow 4x + 3y - 10 = 0$$

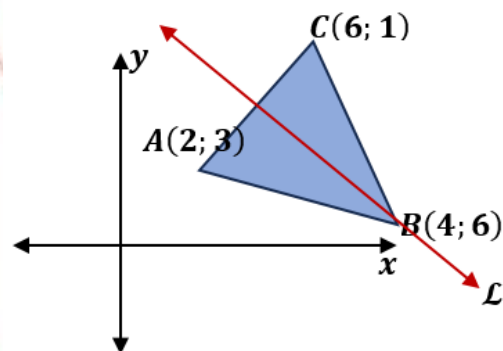
RPTA: C

3. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(2; 3)$, $B(4; 6)$ y $C(6; 1)$. Hallar la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al lado $\overline{AC}$.

- A. $y = x - 2$
- B. $y = x + 2$
- C. $y = 2x - 2$
- D. $y = 2x + 2$
- E. $y = x$

RESOLUCIÓN:

Graficando



Calculando la pendiente de la recta que pasa por $\overline{AC}$

$$m = \frac{3 - 1}{2 - 6} = \frac{2}{-4} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Ahora como las rectas son perpendiculares

$$\begin{aligned} m \cdot m_1 &= -1 \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot m_1 &= -1 \\ \Rightarrow m_1 &= 2 \end{aligned}$$

Ahora como se tiene el punto de paso $(4; 6)$

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m_1(x - x_0) \\ \Rightarrow y - 6 &= 2(x - 4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y - 6 = 2x - 8$$

$$\Rightarrow 2x - y - 2 = 0$$

Por lo que la recta que contiene a la altura relativa al lado $\overline{AC}$ es:

$$\Rightarrow L: y = 2x - 2 = 0$$

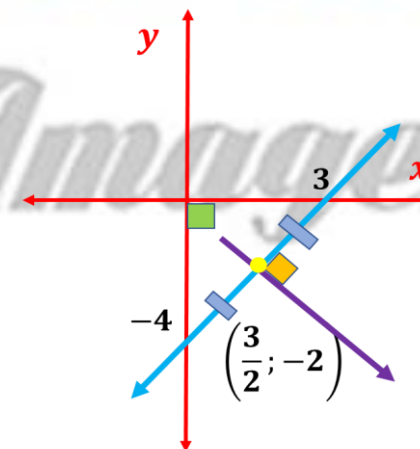
RPTA: C

4. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que se forma al interceptarse con los ejes coordenados la recta $L: 4x - 3y = 12$.

- A. $6x - 8y + 7 = 0$
- B. $6x + 8y + 7 = 0$
- C. $6x + 8y - 7 = 0$
- D. $6x - 8y - 7 = 0$
- E. $3x + 4y - 7 = 0$

RESOLUCIÓN:

De $L: 4x - 3y = 12$ hallamos los interceptos y graficamos:



Entonces la pendiente de L :

$$m_L = \frac{0 - (-4)}{3 - 0} = \frac{4}{3}$$

Luego:

$$L_1: m_\ell \cdot m_1 = -1$$

$$\Rightarrow m_1 = -\frac{3}{4}$$

De ahí que, por mediatriz, el punto medio $\left(\frac{3}{2}; -2\right) \in L_1$. Entonces:

$$y + 2 = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$4y + 8 = -3\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$3x + 4y + 8 - \frac{9}{2} = 0$$

$$\therefore L_1: 6x + 8y + 7 = 0$$

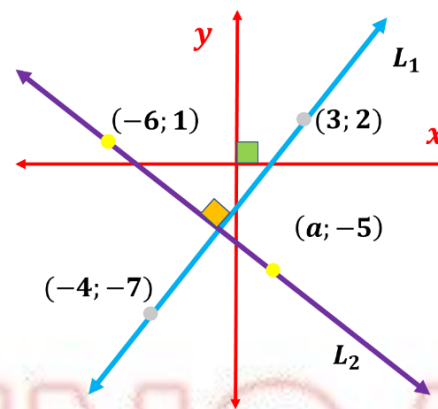
RPTA: B

5. Una recta L_1 pasa por los puntos $(3; 2)$ y $(-4; -7)$ y otra recta L_2 que pasa por el punto $(-6; 1)$ y el punto A donde se encuentra Ana cuya ordenada es -5 . Hallar la abscisa de donde se encuentra Ana, sabiendo que L_1 es perpendicular a L_2 .

- A. $\frac{12}{7}$
- B. $\frac{12}{5}$
- C. $\frac{7}{5}$
- D. $\frac{3}{7}$
- E. $\frac{12}{11}$

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Sabemos que:

L_1 pasa por $(3; 2)$ y $(-4; -7)$ calculamos la pendiente:

$$m_1 = \frac{-7 - 2}{-4 - 3} = \frac{9}{7}$$

Como $L_1 \perp L_2 \rightarrow m_1 m_2 = -1$

$$m_2 = -\frac{7}{9}$$

Si $A(a; -5)$ y $(-6; 1) \in L_2$ obtenemos:

$$m_2 = \frac{-5 - 1}{a + 6} = -\frac{7}{9}$$

$$54 = 7a + 42$$

$$\therefore a = \frac{12}{7}$$

RPTA: A

6. Hallar la ecuación de la recta de pendiente positiva que pasa por el punto $P(0; 1)$ y forma un ángulo de 45° con la recta $L: 3x + 2y - 1 = 0$.

A. $x + 5y + 5 = 0$

B. $x - 5y + 5 = 0$

C. $x - 5y - 5 = 0$

D. $x - 3y + 3 = 0$

E. $x - 3y - 3 = 0$

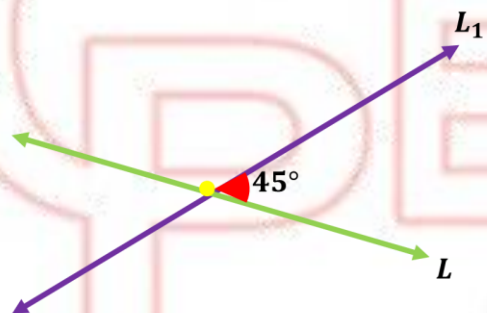
RESOLUCIÓN:

Aplicando:

$$L: 3x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

Graficamos:



Luego por ángulo entre dos rectas:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{m_1 - m}{1 + m_1 \cdot m} = 1$$

Resolviendo:

$$m_1 + \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2}m_1$$

$$m_1 = -\frac{1}{5}$$

Tomamos: $m_1 = -\frac{1}{5} \wedge P(0; 1) \in L_1$

$$\Rightarrow L_1: y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 0)$$

$$\therefore L_1: x - 5y - 5 = 0$$

RPTA: C

7. Hallar el valor de “ k ” tal que el punto $(2; k)$ sea equidistante a las rectas $L_1: x + y - 2 = 0$; $L_2: x - 7y = -2$.

A. 4

B. 1

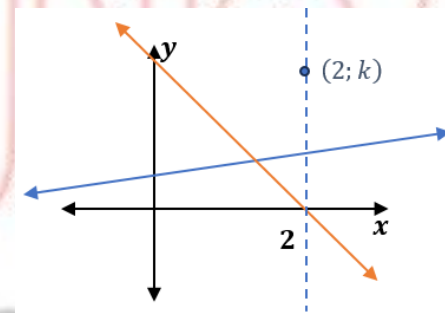
C. 0

D. -1

E. 2

RESOLUCIÓN:

Graficando



Debido a que es equidistante:

$$\frac{d(P; L_1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{d(P; L_2)}{\sqrt{1^2 + 7^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{|2 + k - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2 - 7k + 2|}{5\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{|k|}{\sqrt{2}} = \frac{|4 - 7k|}{5\sqrt{2}}$$

Por propiedad de valor absoluto:

$$k = \frac{4 - 7k}{5} \vee k = \frac{-(4 - 7k)}{5}$$

$$\Rightarrow 5k = 4 - 7k \vee 5k = -4 + 7k$$

$$\Rightarrow 12k = 4 \vee 4 = 2k$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{3} \vee k = 2$$

Según las alternativas: $k = 2$

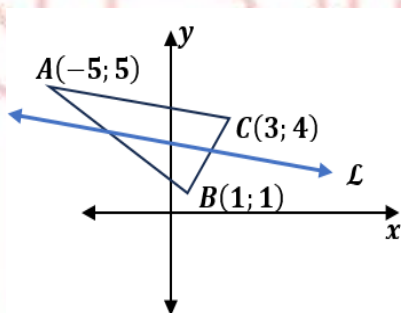
RPTA: E

8. Los vértices del triángulo rectángulo ABC son los puntos $A(-5; 5)$, $B(1; 1)$ y $C(3; 4)$. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de los catetos de este triángulo.

- A. $8y = 22 - x$
- B. $8y = 22 + x$
- C. $8y = 26 - x$
- D. $8y = 26 + x$
- E. $6y = 7 + 4x$

RESOLUCIÓN:

Graficando



Dados los puntos del triángulo rectángulo, calculemos las pendientes para verificar quienes son los catetos:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{1 - 5}{1 - (-5)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{4 - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{AC}} = \frac{4 - 5}{3 - (-5)} = \frac{-1}{8} = -\frac{1}{8}$$

Se observa que los catetos son $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ ya que el producto de sus pendientes es -1.

Ahora calculemos el punto medio de $\overline{AB}$:

$$\Rightarrow M = \left(\frac{-5 + 1}{2}; \frac{5 + 1}{2} \right) = (-2; 3)$$

Como nos pide calcular la recta que pase por los puntos medios de los catetos:

$$m = m_{\overline{AC}} = -\frac{1}{8}$$

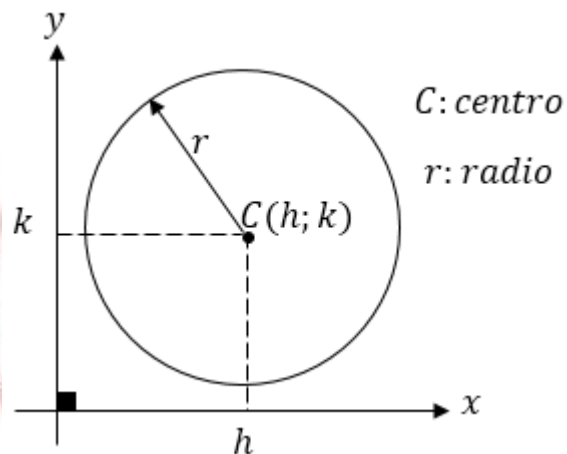
Por lo tanto:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ \Rightarrow y - 3 &= -\frac{1}{8}(x + 2) \\ \Rightarrow 8y - 24 &= -x - 2 \\ \Rightarrow 8y &= 22 - x \end{aligned}$$

RPTA: A

8.4 CIRCUNFERENCIA

8.4.1 ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA:



$$r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Nota:

- ✓ Si: $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la ecuación solo representa un punto:
 $C\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$
- ✓ Si: $D^2 + E^2 - 4F < 0$; no es un conjunto en el plano (representa un círculo imaginario)
- ✓ Si: $D^2 + E^2 - 4F > 0$; representa una circunferencia.

8.4.2 ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA:

A. ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

$$C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$D = -2h$$

$$E = -2k$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2$$

Centro $C(h; k)$:

$$C\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$$

Radio (r):

B. ECUACIÓN ORDINARIA DE LA CIRCUNFERENCIA

Centro $(h; k)$; $r > 0$ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

C. ECUACIÓN CANÓNICA DE LA CIRCUNFERENCIA

Centro $(0; 0)$; $r > 0$ $x^2 + y^2 = r^2$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Determinar la ecuación general de la circunferencia de radio 3, concéntrica a la circunferencia:

$$C_1: x^2 + y^2 - 6x + 2y - 5 = 0$$

- A. $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$
- B. $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 5 = 0$
- C. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$
- D. $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 12 = 0$
- E. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 8 = 0$

RESOLUCIÓN:

Si las 2 circunferencias son concéntricas tienen el mismo centro:

$$\text{Hallamos } C(h; k) = \left(-\frac{C}{2}; -\frac{D}{2}\right)$$

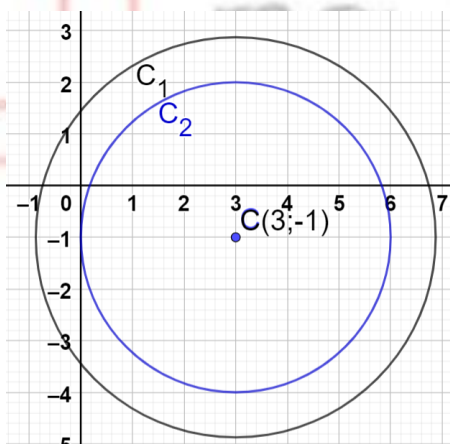
$$C(h; k) = \left(-\frac{-6}{2}; -\frac{2}{2}\right)$$

$$C(h; k) = (3; -1)$$

Si el $C(3; -1)$ y $r = 3$

La ecuación ordinaria de la circunferencia C_2 es:

$$C_2: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$$



Desarrollando:

$$C_2: x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 - 9 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$$

RPTA: C

2. Determinar la suma de coeficientes de la ecuación general de la circunferencia donde los extremos de un diámetro son $A(-3; 6)$ y $B(7; 2)$.

- A. 14
- B. 15
- C. -16
- D. -19
- E. 19

RESOLUCIÓN:

Dados los extremos de un diámetro: $A(-3; 6)$ y $B(7; 2)$

Determinamos las coordenadas del centro de la circunferencia con el punto medio de A y B:

$$C = PM(A, B) = \left(\frac{-3 + 7}{2}; \frac{6 + 2}{2}\right)$$

$$PM(A; B) = (2; 4)$$

$$C = (2; 4)$$

Determinamos el radio:

$$r = BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = BC = \sqrt{(2 - 7)^2 + (4 - 2)^2}$$

$$r = BC = \sqrt{(-5)^2 + (2)^2}$$

$$r = BC = \sqrt{29}$$

La ecuación ordinaria de la circunferencia es:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 29$$

Desarrollando:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 - 29 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 9 = 0$$

La suma de sus coeficientes es: -19

RPTA: D

3. Determinar el término independiente de la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es $C(-8; 5)$ y es tangente al eje "y".

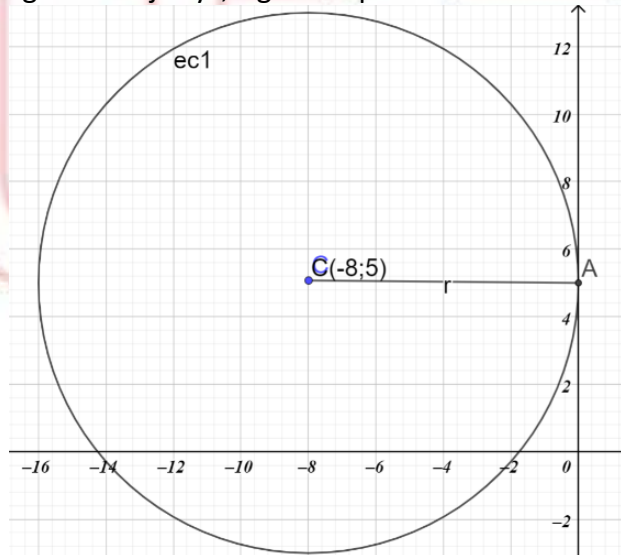
- A. 25
- B. $1/4$
- C. 128
- D. 64
- E. 13

RESOLUCIÓN:

Según los datos:

$C(-8; 5)$

Como es tangente al eje "y", significa que su radio es 8u.



La ecuación ordinaria de la circunferencia es:

$$(x - (-8))^2 + (y - 5)^2 = 8^2$$

Desarrollamos:

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 10y + 25 - 64 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 16x - 10y + 25 = 0$$

El término independiente es 25.

RPTA: A

4. Determinar la suma de coeficientes de la ecuación general de la circunferencia de centro $C(-2; 7)$ y es tangente al eje "x".

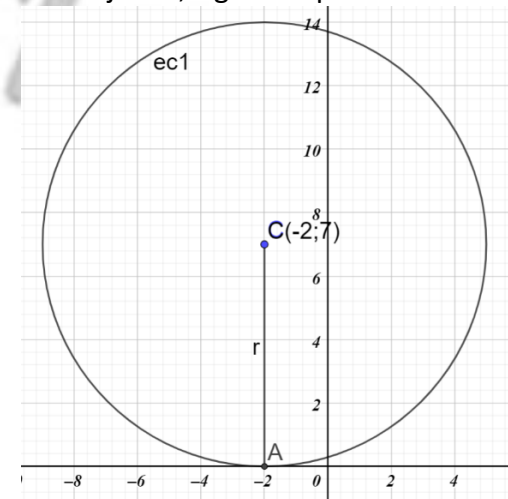
- A. 5
- B. 4
- C. 8
- D. -4
- E. -13

RESOLUCIÓN:

Según los datos:

$C(-2; 7)$

Como es tangente al eje "x", significa que su radio es 7



La ecuación ordinaria de la circunferencia es:

$$(x - (-2))^2 + (y - 7)^2 = 7^2$$

Desarrollamos:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 14y + 49 - 49 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 14y + 4 = 0$$

La suma de coeficientes es:

$$1 + 1 + 4 - 14 + 4 = -4$$

RPTA: D

5. En un juego de rodamientos de un monociclo, el cual se va a desplazar por una cinta en el suelo, se sabe que la ecuación de la circunferencia de la rueda del monociclo es:

$x^2 + y^2 - 24x - 30y - 31 = 0$ donde las unidades están en centímetros.

¿Cuántos metros de cinta se necesita si la rueda debe dar 10 vueltas?(Considerar $\pi = 3,14$)

- A. 15,6 m
- B. 42,5 m
- C. 84,66 m
- D. 14,64 m
- E. 12,56 m

RESOLUCIÓN:

Para resolver el problema debemos hallar el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 24x - 30y - 31 = 0$$

$$\text{Hallamos } C(h; k) = \left(-\frac{c}{2}; -\frac{d}{2}\right)$$

$$C(h; k) = \left(-\frac{-24}{2}; -\frac{-30}{2}\right)$$

$$C(h; k) = (12; 15)$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - TI}$$

$$r = \sqrt{(12)^2 + (15)^2 - (-31)}$$

$$r = \sqrt{144 + 225 + 31}$$

$$r = \sqrt{400}$$

$$r = 20\text{cm}$$

La longitud de la circunferencia de la rueda es:

$$L = 2\pi r$$

$$L = 2\pi(20)$$

$$L = 2(3,14)(20)$$

$$L = 125,6\text{cm}$$

Si va a dar 10 vueltas:

$$10L = 10(125,6)\text{ cm}$$

$$10L = 1256\text{ cm}$$

En metros es: 12,56 m

RPTA: E

6. Determinar la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es $C\left(1; -\frac{5}{2}\right)$ y es tangente a la recta $L: 2x + 7y - 11 = 0$.

A. $x^2 + y^2 - 2x + 5y + 1 = 0$

B. $x^2 + y^2 + x - 2y - 15 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 6 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 2x + y - 12 = 0$

E. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 8 = 0$

RESOLUCIÓN:

Para hallar el radio de la circunferencia aplicamos distancia de un punto a una recta:

$$d(C, \vec{L}) = \frac{|(2)(1) + (7)\left(-\frac{5}{2}\right) - 11|}{\sqrt{(2)^2 + (7)^2}}$$

$$d(C, \vec{L}) = \frac{\left| 2 - \frac{35}{2} - 11 \right|}{\sqrt{53}}$$

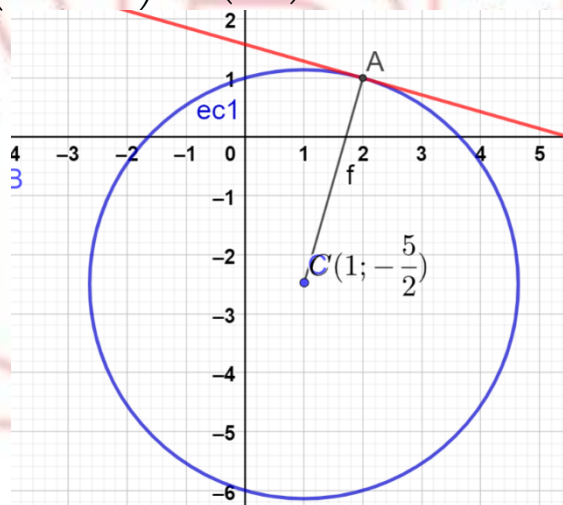
$$d(C, \vec{L}) = \frac{\left| \frac{-53}{2} \right|}{\sqrt{53}}$$

$$d(C, \vec{L}) = \frac{53}{2\sqrt{53}}$$

$$r = d(C, \vec{L}) = \frac{\sqrt{53}}{2}$$

La ecuación ordinaria es:

$$(x - 1)^2 + \left(y - \left(-\frac{5}{2} \right) \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{53}}{2} \right)^2$$



Desarrollamos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 5y + \frac{25}{4} - \frac{53}{4} = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 5y - 7 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x + 5y - 6 = 0$$

RPTA: C

7. Los coeficientes de los términos lineales de la ecuación de una circunferencia representan las temperaturas ($^{\circ}\text{C}$) registradas, en la mañana y noche, determinado día en el distrito de Tauria. Si el diámetro de la circunferencia pertenece a la recta $L_1: 2x - 5y + 20 = 0$ y está comprendido en el segundo cuadrante. ¿Cuáles son las temperaturas registradas?

A. 10°C y -8°C

B. 5°C y -4°C

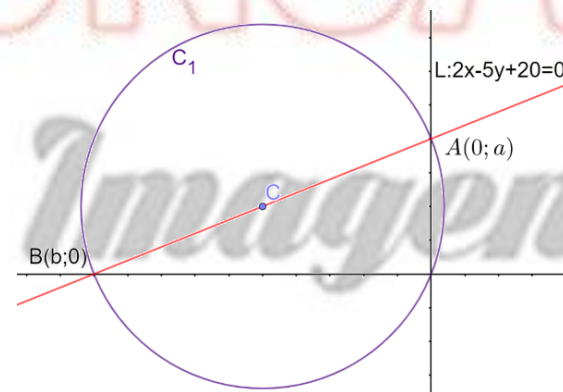
C. 8°C y -1°C

D. 4°C y -8°C

E. 10°C y -4°C

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Hallamos " a " y " b " en la recta L :

Si: $x = 0$

$$2(0) - 5(a) + 20 = 0 \rightarrow a = 4$$

Si: $y = 0$

$$2(b) - 5(0) + 20 = 0 \rightarrow b = -10$$

Hallamos el centro:

$$C(h; k) = \left(\frac{0 - 10}{2}; \frac{4 + 0}{2} \right)$$

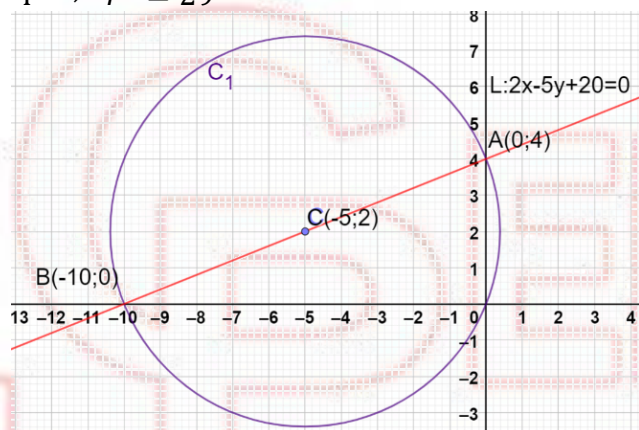
$$C(h; k) = (-5; 2)$$

Hallamos el radio: $(-5; 2)$ y $(0; 4)$

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$r^2 = (0 + 5)^2 + (4 - 2)^2$$

$$r^2 = 25 + 4 \rightarrow r^2 = 29$$



Hallamos la ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 29$$

Desarrollamos:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 - 29 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 4y = 0$$

Los coeficientes de los términos lineales son: 10 y -4

Por lo tanto, las temperaturas fueron: 10°C y 4°C

RPTA: E

8. Una alarma en un pueblo tiene un alcance en forma de circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

Si una calle tiene como puntos extremos $B(3; 3)$ y $A(7; 1)$. Calcular la distancia desde la ubicación de la alarma hasta dicha calle. Considera la unidad equivalente a 1 Km.

A. $12\sqrt{2}$ Km

B. $2\sqrt{5}$ Km

C. $\frac{35\sqrt{5}}{5}$ Km

D. $\frac{11\sqrt{5}}{5}$ Km

E. $\frac{33\sqrt{10}}{10}$ Km

RESOLUCIÓN:

De la ecuación hallaremos el centro que es el epicentro:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

Completando cuadrados:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 - 9 - 4 - 12 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

$$C(h; k) = (3; -2); r = 5$$

Con los puntos de los extremos de la cuerda hallamos la ecuación de la recta $\overline{AB}$:

$$B(3; 3) \text{ y } A(7; 1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

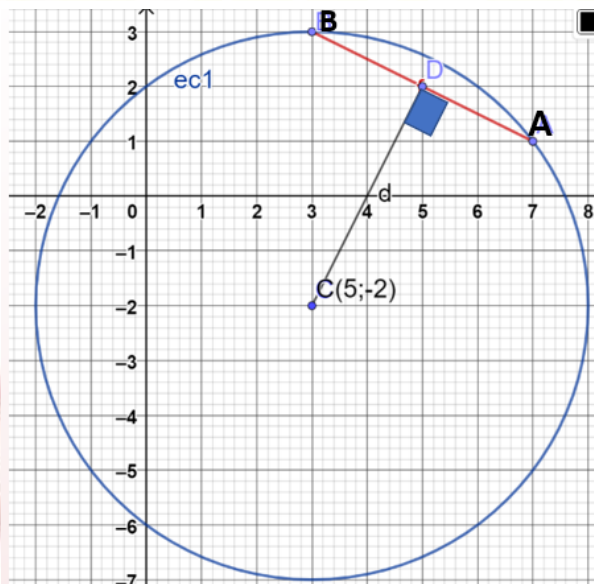
$$m = \frac{3 - 1}{3 - 7} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta

$$L: y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 7)$$

$$L: 2y - 2 = -x + 7$$

$$L: x + 2y - 9 = 0$$



Hallamos la distancia de la ubicación de la alarma a la calle $\overline{AB}$:

$C(3; -2)$ y $L: x + 2y - 9 = 0$

$$d(C, \vec{L}) = \frac{|(1)(3) + (2)(-2) - 9|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}}$$

$$d(C, \vec{L}) = \frac{|3 - 4 - 9|}{\sqrt{5}}$$

$$d(C, \vec{L}) = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$d(C, \vec{L}) = \frac{10\sqrt{5}}{5}$$

La distancia de la alarma hasta la calle $\overline{AB}$ es $2\sqrt{5}\text{Km}$

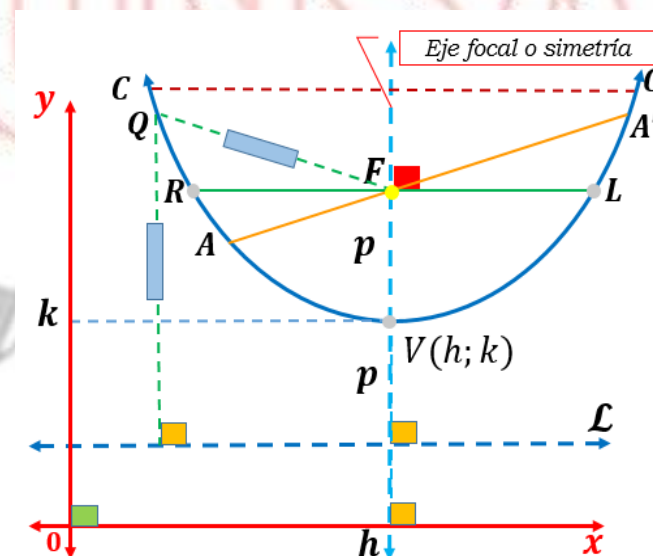
RPTA: B

8.5 LA PARÁBOLA

La parábola se define como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo (**el foco**) y de una recta fija (**la directriz**).

La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz es un eje de simetría de la curva y se denomina **eje de la parábola**. El punto de intersección del eje con la parábola se llama **vértice**. (ANALÍTICA, 2020)

8.5.1 ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA



Donde:

- ✓ Vértice: (h, k)
- ✓ Foco: $F(h; k + p)$
- ✓ Directriz: $\mathcal{L}$

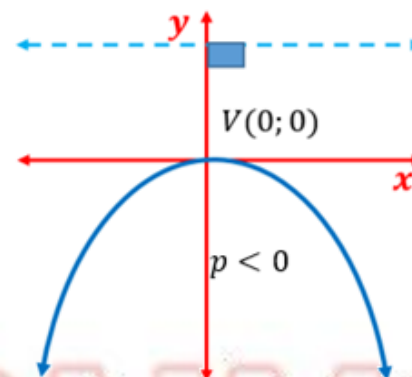
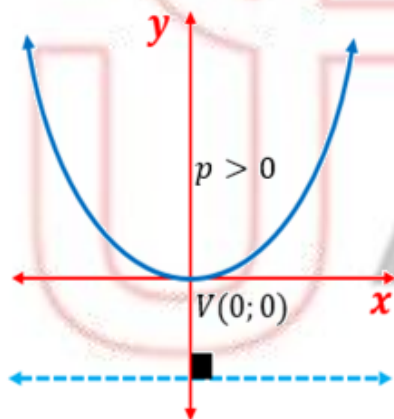
- ✓ Parámetro: p
- ✓ Lado Recto: $LR = |4p|$
- ✓ Cuerda Focal: AA'
- ✓ Cuerda: $\overline{CC'}$
- ✓ Excentricidad:

$$e = \frac{QF}{QL} = 1$$

8.5.2 ECUACIONES DE LA PARÁBOLA

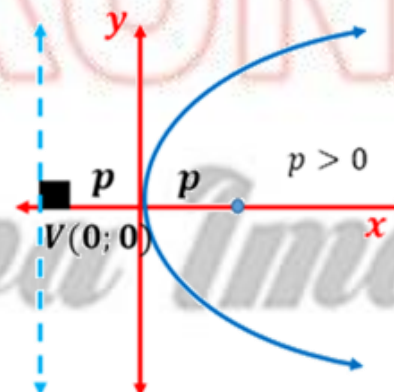
ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA

8.5.2.1 CUANDO EL EJE FOCAL COINCIDE CON EL EJE DE LAS ORDENADAS.

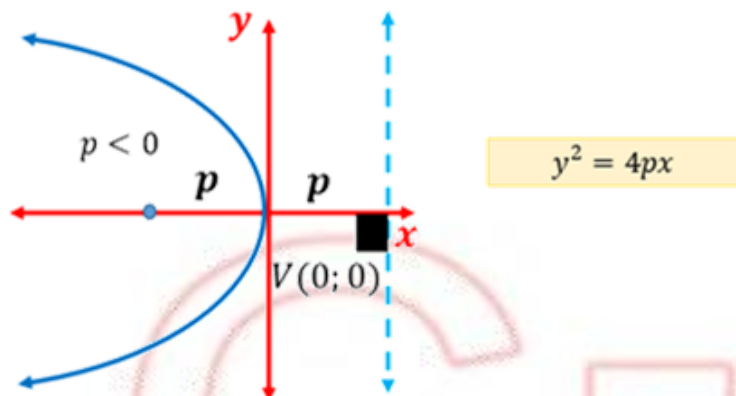


$$x^2 = 4py$$

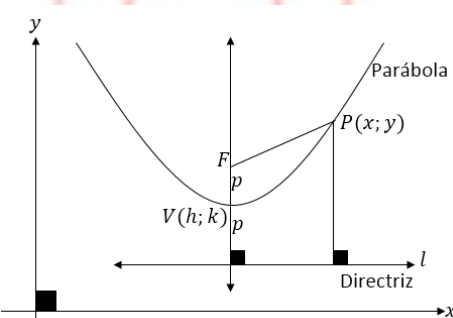
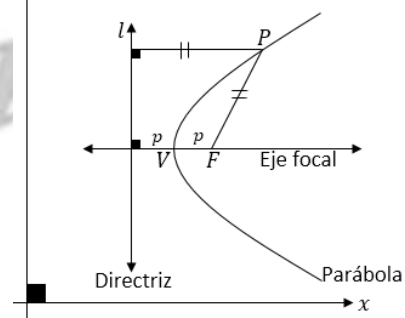
8.5.2.2 CUANDO EL EJE FOCAL COINCIDE CON EL EJE DE LAS ABSCISAS



$$y^2 = 4px$$



En general:

VERTICAL	HORIZONTAL
	
Ecuación General de la Parábola:	
$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$	$Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$

Ecuación Ordinaria de la Parábola:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Ecuación Canónica de la Parábola:

$$x^2 = 4py$$

$$y^2 = 4px$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Los puntos $A = (3; a)$ y $B = (b; -4)$, pertenecen a la parábola de ecuación $x^2 + 9y = 0$. Si $(B \in IIC)$ hallar la longitud del segmento $\overline{AB}$.

- A. 10
- B. $3\sqrt{11}$
- C. $3\sqrt{10}$
- D. $\sqrt{31}$
- E. 4

RESOLUCIÓN:

En la ecuación:

$$x^2 + 9y = 0$$

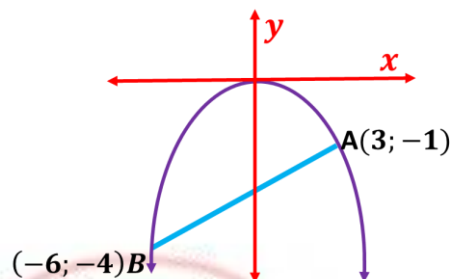
$A = (3; a)$ pertenece a la ecuación entonces:

$$3^2 + 9(a) = 0 \text{ así: } a = -1$$

$B = (b; -4)$ pertenece a la ecuación entonces:

$$b^2 + 9(-4) = 0 \text{ así: } b = \pm 6, B \in IIC, \rightarrow b = -6$$

De esta manera:



Luego, aplicamos distancia entre dos puntos

$$AB = \sqrt{(3+6)^2 + (-1+4)^2}$$

$$\therefore AB = 3\sqrt{10}$$

RPTA: C

2. Hallar las coordenadas del vértice y foco de la parábola cuya ecuación es:

$$y^2 - 6y - 12x - 39 = 0.$$

- A. $V(-4; 3); F(-1; 3)$
- B. $V(-4; 3); F(2; 2)$
- C. $V(-2; 2); F(-4; 2)$
- D. $V(2; -2); F(1; -3)$
- E. $V(-1; 3); F(-1; 5)$

RESOLUCIÓN:

De la ecuación de la parábola:

$$y^2 - 6y - 12x - 39 = 0$$

Completando cuadrados:

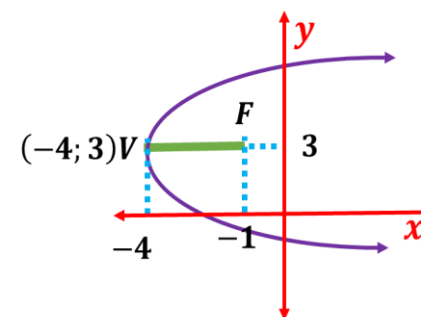
$$y^2 - 6y + 9 - 9 - 12x - 39 = 0$$

$$(y - 3)^2 = 12(x + 4)$$

De aquí: $V = (-4; 3)$

$12 = 4p$ entonces $p = 3$

Graficando:



Del gráfico, el foco será: $F = (-1; 3)$

Por lo tanto: $V = (-4; 3)$ y $F = (-1; 3)$

RPTA: A

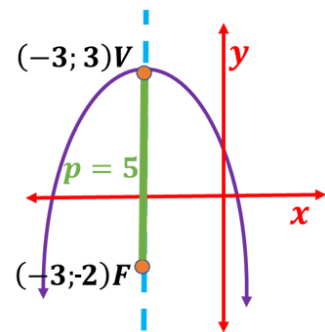
3. La longitud del lado recto de una parábola cuyo eje es paralelo al eje de ordenadas es 20 u. Las coordenadas del foco son $(-3, -2)$ y su vértice está arriba del foco. Hallar la ecuación de la parábola.

- A. $(x + 3)^2 = -18(y - 3)$
- B. $(x + 3)^2 = -20(y - 3)$
- C. $x^2 = -20y$
- D. $y^2 = -20x$
- E. $y^2 = -20(x - 3)$

RESOLUCIÓN:

Del lado recto: $LR = |4p| = 20$, entonces $p = 5$

Graficamos con los datos que tenemos:



Entonces ubicamos el vértice de la parábola:

$$V = (-3; -3)$$

Luego la ecuación será:

$$\begin{aligned}(x - h)^2 &= -4p(y - k) \\ (x + 3)^2 &= -4(5)(y - 3) \\ \therefore (x + 3)^2 &= -20(y - 3)\end{aligned}$$

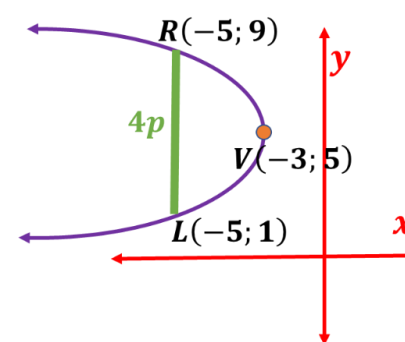
RPTA: B

4. Hallar la ecuación de la parábola que tiene el vértice en $V(-3, 5)$ y cuyos extremos del lado recto son $L(-5, 9)$ y $R(-5, 1)$.

- A. $(y - 5)^2 = -8(x + 3)$
- B. $(y - 3)^2 = -8(x + 5)$
- C. $(y - 2)^2 = -8(x - 3)$
- D. $(y + 5)^2 = -8(x - 3)$
- E. $(y - 2)^2 = -8(x + 3)$

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Deducimos que es una parábola horizontal que se abre para la izquierda.

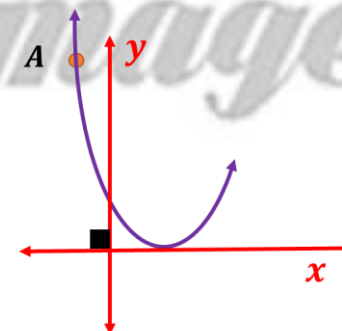
También $4p = 9 - 1 = 8$, de aquí $p = 2$

Luego la ecuación será:

$$\begin{aligned}(y - k)^2 &= -4p(x - h) \\ (y - 5)^2 &= -4(2)(x + 3) \\ \therefore (y - 5)^2 &= -8(x + 3)\end{aligned}$$

RPTA: A

5. En la figura mostrada, el punto A de la parábola $P: (x - 13)^2 = 4y$, dista 50 cm de su directriz. Hallar las coordenadas de A.



- A. $(-1; 49)$
- B. $(-3; 64)$
- C. $(1; 49)$
- D. $(-5; 81)$

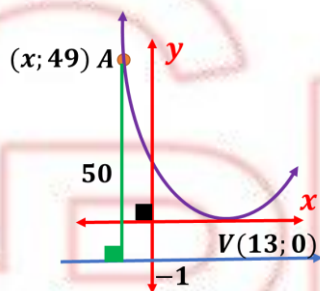
E. (27; 49)

RESOLUCIÓN:

De la ecuación tenemos: $4p = 4$, así $p = 1$
Por lo tanto, la ecuación de su directriz será:

$$L_D: y = -1$$

Graficamos:



Por dato A dista 50 cm de L_D , entonces: $A = (x; 49)$

$A \in P$ entonces en: $(x - 13)^2 = 4y$

$$(x - 13)^2 = 4(49)$$

$$x - 13 = \pm 14$$

$$x - 13 = 14 \quad \vee \quad x - 13 = -14$$

$$x = 29 \quad \quad \quad x = -1$$

Cumple: $x = -1$

$$\therefore A = (-1; 49)$$

RPTA: A

6. La parábola $P: y = m(x - 2)^2 - n$, pasa por el origen de coordenadas y por el punto $A(1; -9)$. Hallar la suma de coordenadas del vértice de la parábola.

A. 6

B. 8

C. 10

D. -10

E. -14

RESOLUCIÓN:

La parábola pasa por el origen $(0; 0)$, entonces cumple con la ecuación:

$$y = m(x - 2)^2 - n$$

$$0 = m(0 - 2)^2 - n$$

$$n = 4m$$

La parábola pasa por $A(1; -9)$ y con $n = 4m$, tenemos:

$$-9 = m(1 - 2)^2 - 4m$$

$$-9 = m - 4m$$

$$m = 3$$

De aquí $m = 3$, entonces $n = 12$

La ecuación de la parábola será:

$$y = 3(x - 2)^2 - 12$$

$$y + 12 = 3(x - 2)^2$$

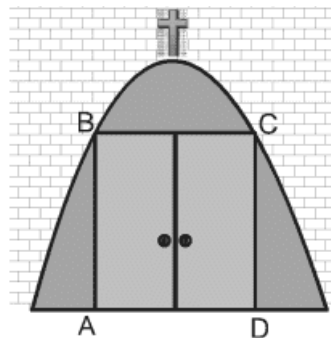
Por consiguiente el vértice será: $V = (2; -12)$

Piden la suma de coordenadas: $2 - 12 = -10$

$$\therefore \text{suma} = -10$$

RPTA: D

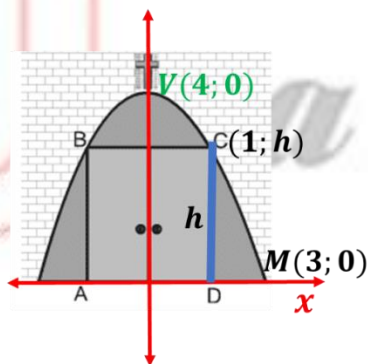
7. La entrada de una iglesia tiene forma parabólica con una puerta de forma rectangular ABCD, como se muestra en la figura. Si la altura de la entrada parabólica tiene 4 m de alto y 6 m de ancho en la base. Hallar la altura de la puerta si tiene un ancho de 2 metros.



- A. $12m$
- B. $11m$
- C. $\frac{31}{9}m$
- D. $\frac{32}{9}m$
- E. $\frac{35}{9}m$

RESOLUCIÓN:

Graficamos adecuadamente en el plano cartesiano:



Entonces la ecuación de la parábola será:

$$\begin{aligned}(x - h)^2 &= -4p(y - k) \\ (x - 0)^2 &= -4p(y - 4) \\ x^2 &= -4p(y - 4)\end{aligned}$$

$M(3; 0)$, pasa por la parábola, entonces:

$$\begin{aligned}3^2 &= -4p(0 - 4) \\ p &= \frac{-9}{16}\end{aligned}$$

La ecuación de la parábola será:

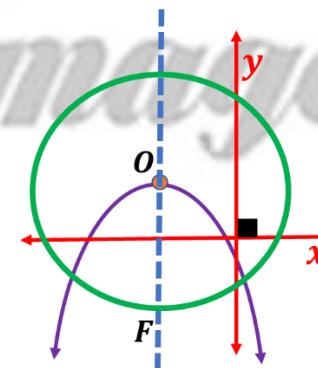
$$x^2 = \frac{-9}{4}(y - 4)$$

$C(1; h)$, pasa por la parábola, entonces:

$$\begin{aligned}1^2 &= \frac{-9}{4}(h - 4) \\ \frac{-4}{9} &= h - 4 \\ \frac{-4}{9} + 4 &= h \\ \therefore h &= \frac{32}{9}\end{aligned}$$

RPTA: D

8. En la figura, la ecuación de la circunferencia es $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$, F es el foco de la parábola. Calcular la ecuación de dicha parábola.



- A. $(x - 3)^2 = -20(y + 2)$
- B. $(y - 3)^2 = -20(x + 2)$
- C. $(x + 3)^2 = -20(y - 2)$

D. $(y + 3)^2 = -20(x - 2)$

E. $(x + 3)^2 = -5(y - 2)$

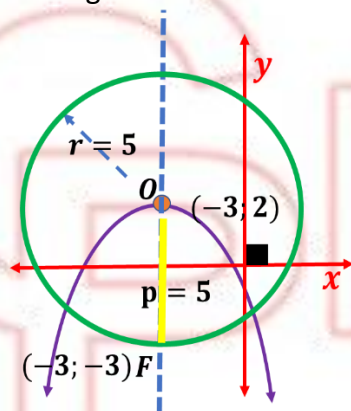
RESOLUCIÓN:

De la ecuación de la circunferencia:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

Tenemos $C = (-3; 2)$ y $r = 5$

Ubicando estos datos en el gráfico:



Del gráfico obtenemos el vértice y el parámetro de la parábola

$V = (-3; 2)$ y $p = 5$

Entonces la ecuación de la parábola será:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

$$(x + 3)^2 = -4(5)(y - 2)$$

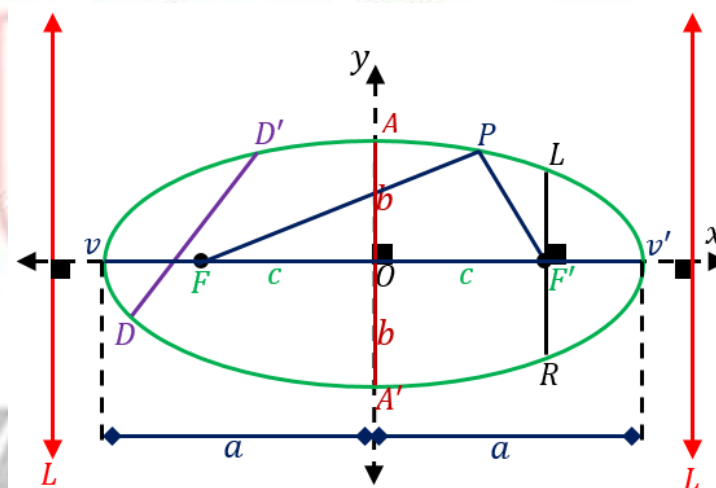
$$\therefore (x + 3)^2 = -20(y - 2)$$

RPTA: C

8.6 LA ELIPSE

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x; y)$ cuya ubicación en el plano es tal, que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (focos F y F') es siempre igual a una constante " $2a$ ". Es decir:

$$PF + PF' = 2a$$



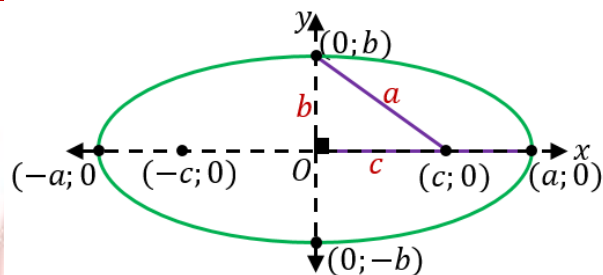
Donde:

$F; F'$: focos
 FF' : distancia focal: $2c$
 $V; V'$: vértices
 VV' : eje mayor = $2a$
 $A; A'$: co - vértices
 AA' : eje menor = $2b$

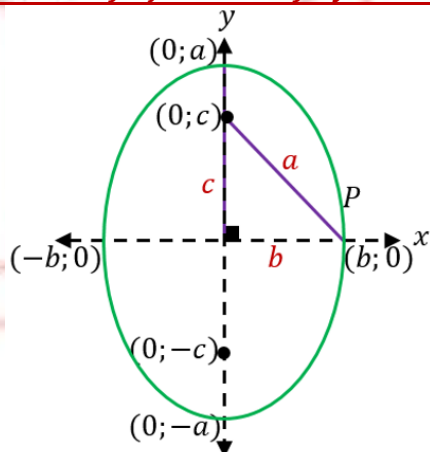
Eje y : eje normal
 Eje x : eje focal
 O : centro.
 $\overline{DD'}$: cuerda
 L : directrices
 $\overline{LR}$: lado recto

8.6.1 ECUACIÓN DE LA ELIPSE

ECUACIÓN CANÓNICA

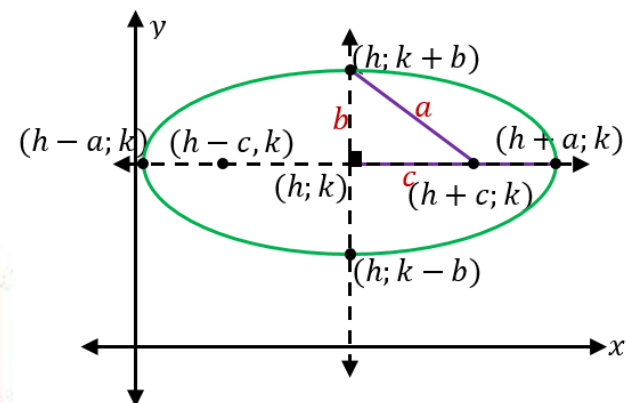
Centro = (0; 0)*Eje focal* = Eje *x*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

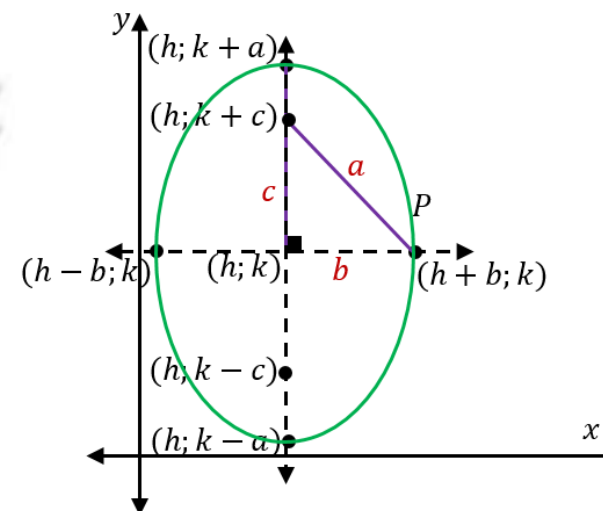
Eje focal = Eje *y*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ECUACIÓN ORDINARIA

Centro(*h*; *k*) ≠ (0; 0)*Eje focal* ∥ Eje *x*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Eje focal ∥ Eje *y*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Longitud del eje mayor: $2a$

Longitud del eje menor: $2b$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

Además:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ojo: siempre $a > b$

Longitud del lado recto: (si una cuerda pasa por cualquiera de los dos focos, se le llama cuerda focal. Si la cuerda focal es perpendicular al eje focal, la cuerda se llama **lado recto**).

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

Área de la Elipse:

$$A_{\text{elipse}} = \pi ab$$

ECUACIÓN GENERAL:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{-D}{2A}; \frac{-E}{2B} \right)$$

Eje focal || Eje x

Eje focal || Eje y

$$A < B$$

$$A > B$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Determinar la ecuación de la elipse cuya suma de las distancias de cualquiera de sus puntos a los puntos fijos $(-4; -5)$ y $(6; -5)$ es igual a 16.

A. $\frac{(x-1)^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{39} = 1$

B. $\frac{(x-1)^2}{60} + \frac{(y+5)^2}{30} = 1$

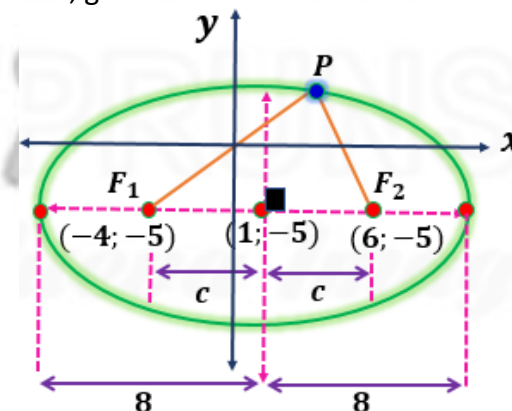
C. $\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y+5)^2}{36} = 1$

D. $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y+5)^2}{49} = 1$

E. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{25} = 1$

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado, graficamos:



Por condición: $F_1P + F_2P = 16$

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y+5)^2}{b^2} = 1$$

Dado que el centro es: $(1; -5)$

Conocemos que: $a^2 = b^2 + c^2$

Del gráfico:

$$a = 8 \quad c = 5 \Rightarrow b = \sqrt{39}$$

Luego:

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{39} = 1$$

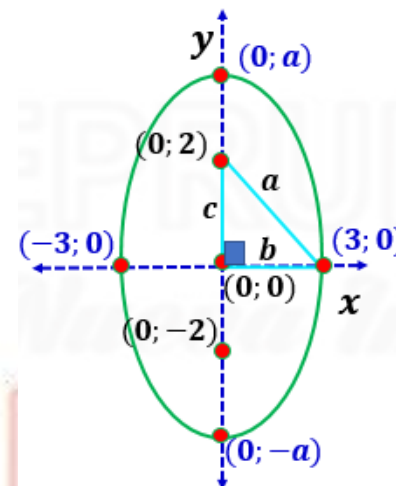
RPTA: A

2. Determinar la ecuación de la elipse, si uno de sus focos es $(0; 2)$ y la longitud del eje menor es 6.

- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
- B. $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$
- C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
- D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{13} = 1$
- E. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

RESOLUCIÓN:

A partir del enunciado esbozamos el gráfico:



Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Del gráfico:

$$b = 3 \quad c = 2 \Rightarrow a = \sqrt{13}$$

Luego:

$$\therefore \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{13} = 1$$

RPTA: D

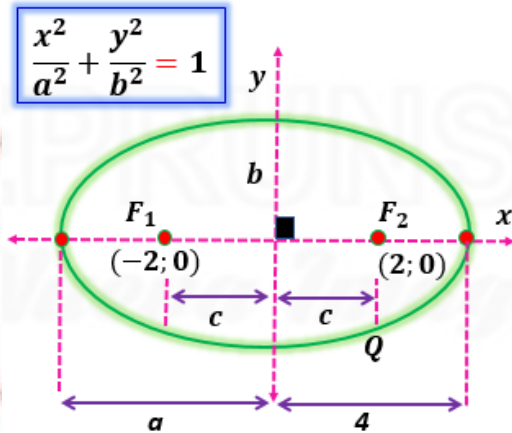
3. Los focos de una elipse son los puntos: $(-2; 0)$ y $(2; 0)$ y la longitud de su lado recto es igual a 6 u. Hallar la ecuación de la elipse.

- A. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$
- B. $\frac{x^2}{60} + \frac{y^2}{30} = 1$
- C. $\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y+5)^2}{36} = 1$
- D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

E. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{25} = 1$

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado, graficamos:



Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a} = 6 \Rightarrow b^2 = 3a$

Pero como: $a^2 = b^2 + c^2$

Del gráfico: $c = 2$

$$\begin{aligned} a^2 &= 3a + 4 \\ a^2 - 3a - 4 &= 0 \\ (a - 4)(a + 1) &= 0 \\ \Rightarrow a &= 4 \text{ y } b^2 = 12 \end{aligned}$$

Luego:

$$\therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

RPTA: D

4. Determinar las coordenadas de los vértices de la elipse $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y = 1$.

A. $(-3; 1) \wedge (1; 1)$

B. $(-1 - \sqrt{2}; 1) \wedge (-1 + \sqrt{2}; 1)$

C. $(-3; 0) \wedge (-3; 4)$

D. $(2\sqrt{2}; 1) \wedge (2\sqrt{2} + 2; 1)$

E. $(3; 1) \wedge (7; 1)$

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado:

$$E: x^2 + 2x + 2y^2 - 4y = 1$$

Completamos cuadrados:

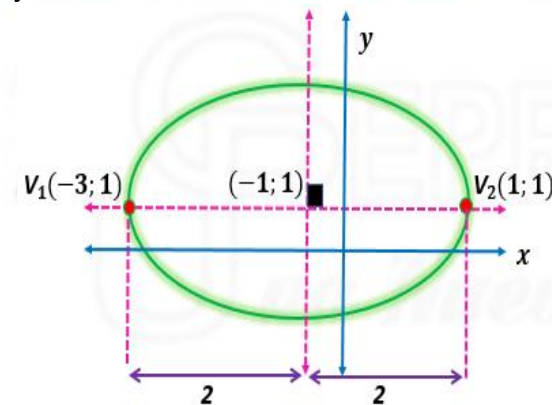
$$\begin{aligned} (x + 1)^2 + 2(y - 1)^2 &= 4 \\ \frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{2} &= 1 \end{aligned}$$

Graficamos:

Centro $(-1; 1)$

Longitud del eje mayor $2(2)$

Longitud del eje menor: $2\sqrt{2}$



Del gráfico:

Coordenadas de sus vértices:

$$\therefore V_1(-3; 1) \wedge V_2(1; 1)$$

RPTA: A

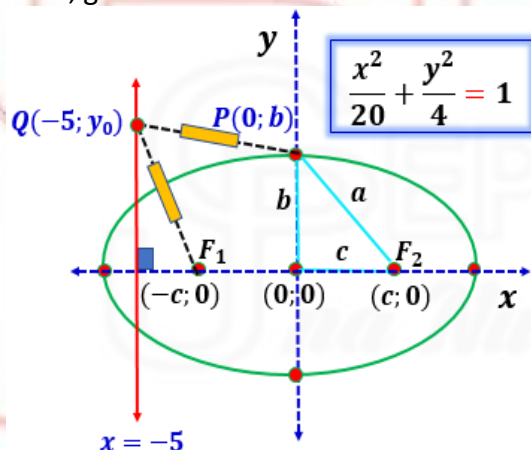
RPTA: D

5. Hallar sobre la recta $x + 5 = 0$ un punto que sea equidistante del foco izquierdo y del punto superior de la elipse: $x^2 + 5y^2 = 20$.

- A. $(-5; -7)$
 B. $(-5; 0)$
 C. $(-5; 5)$
 D. $(-5; 7)$
 E. $(5; 7)$

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado, graficamos:



Por condición:

$$a^2 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}; b^2 = 4; b = 2$$

$$\text{Como: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4$$

$$\text{Luego como: } QF_1 = QP$$

$$\sqrt{(y_0 - 0)^2 + (-5 + 4)^2} = \sqrt{(y_0 - 2)^2 + (-5 + 0)^2}$$

$$\text{Luego: } y_0 = 7$$

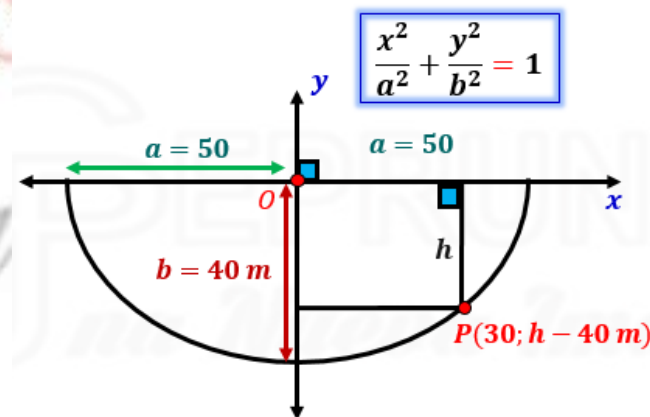
$$\therefore Q(-5; 7)$$

6. Una represa de sección vertical semielíptica tiene una profundidad máxima de 40 m y un ancho de 100 m en la parte superior. ¿Qué profundidad en m tiene la represa a una distancia de 30 m de su centro?

- A. 18 m
 B. 24 m
 C. 32 m
 D. 46 m
 E. 58 m

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado, graficamos:



Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Del gráfico: $a = 50; b = 40$

Luego como:

$$\frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1$$

Como: $P(30; h - 40)$

Evaluamos la ecuación.

Así tenemos que:

$$E = \frac{30^2}{50^2} + \frac{(h - 40)^2}{40^2} = 1$$

$$E = \frac{(h - 40)^2}{40^2} = 1 - \frac{30^2}{50^2}$$

$$(h - 40)^2 = \left(\frac{50^2 - 30^2}{50^2} \right) 40^2$$

$$(h - 40)^2 = 1024$$

Luego: $h = 8$

La profundidad es:

$$\therefore 32 \text{ m}$$

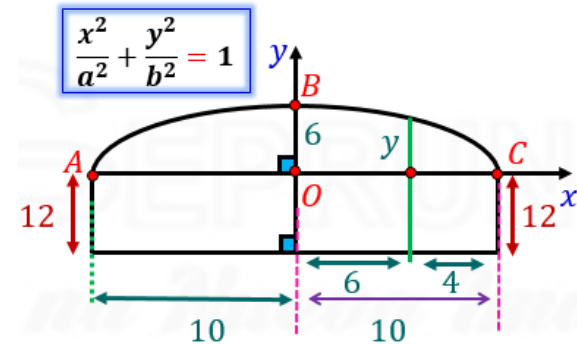
RPTA: C

7. El techo de 18 u de altura es el centro de un pasillo de 20 u de ancho, tiene la forma de una semielipse, las paredes laterales tienen una altura de 12 u, encontrar la altura del techo a 4 unidades de cualquier pared.

- A. $\frac{72}{5} u$
- B. $\frac{84}{5} u$
- C. $\frac{28}{5} u$
- D. $\frac{87}{5} u$
- E. $\frac{78}{5} u$

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado graficamos:



De la gráfica, evaluamos: $a = 10; b = 6$

$$E = \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Para: $x = 6$

$$\frac{6^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$\frac{y^2}{36} = 1 - \frac{36}{100}$$

$$y = 4,8$$

La altura pedida:

$$h = y + 12$$

$$h = 4,8 + 12$$

$$\therefore \frac{84}{5} u$$

RPTA: B

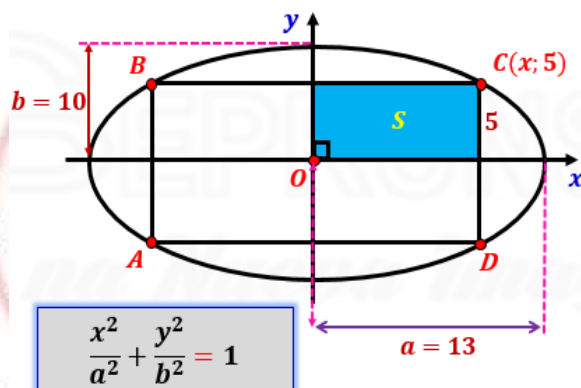
8. Determinar el área del rectángulo $ABCD$ inscrito en una elipse horizontal de semiejes de 13 y 10 unidades, si el ancho del rectángulo mide 10 unidades.

- A. $100 u^2$
- B. $110\sqrt{3} u^2$
- C. $120\sqrt{3} u^2$

- D. $130\sqrt{3} u^2$
E. $140\sqrt{3} u^2$

RESOLUCIÓN:

Según el enunciado, graficamos:



Dado que $C(x; 5)$ pertenece a la elipse, evaluamos:

$$E = \frac{x^2}{169} + \frac{5^2}{100} = 1$$

$$x = \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

Luego: $S = 5x$

$$S = \frac{65\sqrt{3}}{2}$$

$$S(ABCD) = 4S$$

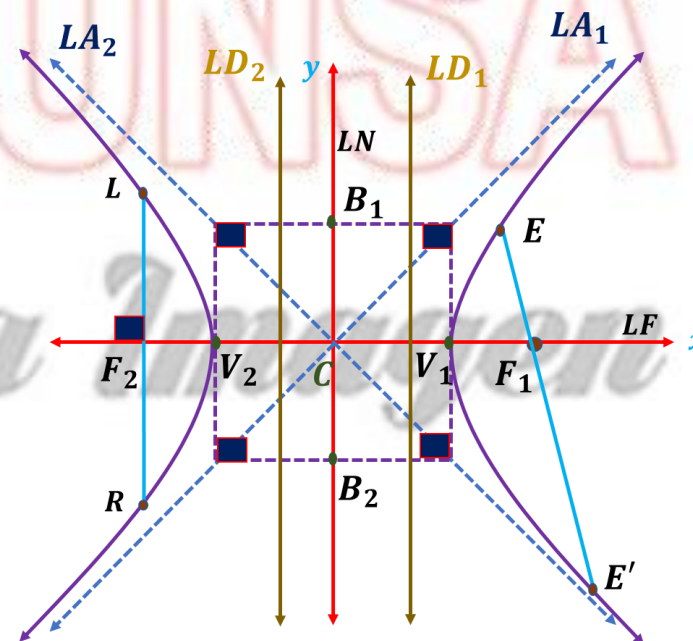
$$\therefore 130\sqrt{3} u^2$$

RPTA: D

8.7 HIPÉRBOLA

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ cuya ubicación en el plano es tal que la diferencia de distancias a dos puntos fijos (Focos F_1 y F_2), es siempre igual a una constante positiva ($2a$). Es decir:

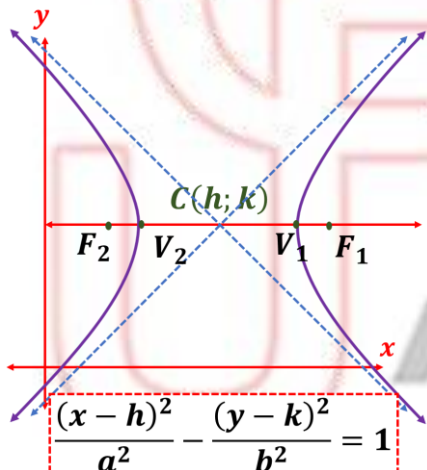
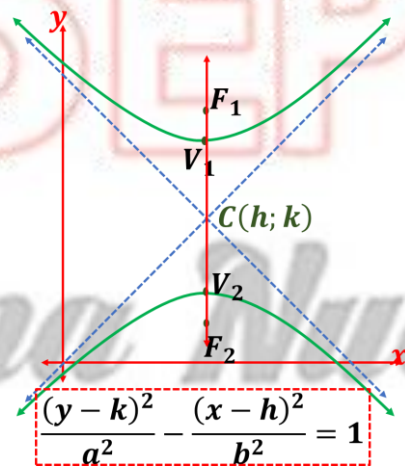
$$d(P; F_1) - d(P; F_2) = 2a$$

8.7.1 ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE LA HIPÉRBOLA

$V_1V_2 = (2a)$	: Eje transversal	C	: Centro
$B_1B_2 = (2b)$	: Eje conjugado	V_1 y V_2	: Vértices
$F_1F_2 = (2c)$	: Segmento focal	F_1 y F_2	: Focos
LD_1 y LD_2	: Directriz	LR	: Lado recto
LF	: Eje focal	EE'	: Cuerda focal
LN	: Eje normal		
LA_1 y LA_2	: Asíntotas		

8.7.2 ECUACIONES DE LA HIPÉRBOLA

8.7.2.1 ECUACIÓN ORDINARIA

ECUACIÓN ORDINARIA CENTRO $(h; k)$	
Eje focal al eje x	Eje focal al eje y
 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$
ECUACIÓN DE LAS ASÍNTOTAS	ECUACIÓN DE LAS ASÍNTOTAS
$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$	$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$
Longitud del lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$	

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

Longitud del eje transversal o real: $2a$

Longitud del eje conjugado o imaginario: $2b$

También:

$$c^2 = a^2 + b^2; \text{ siempre } c > a$$

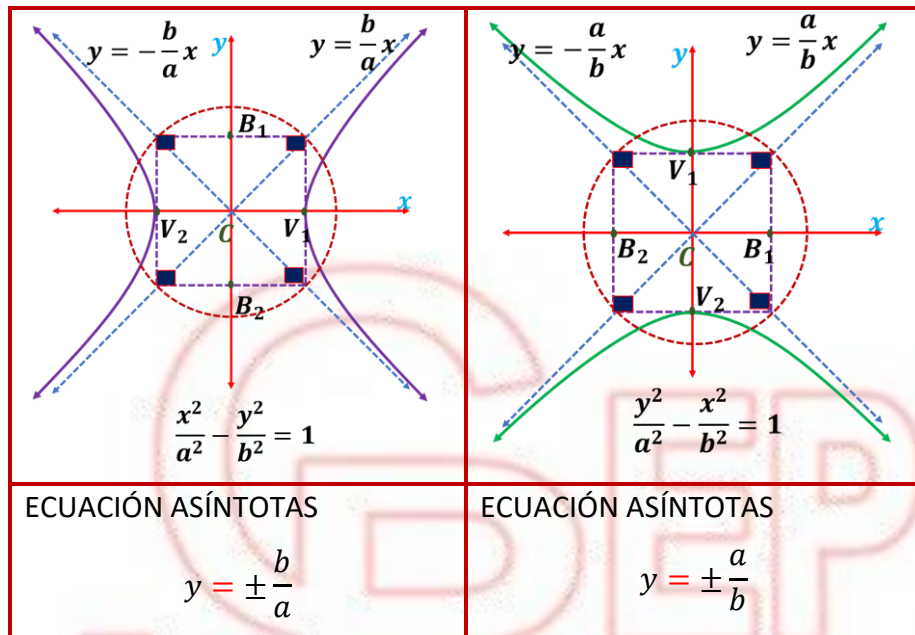
ECUACIÓN GENERAL DEL CENTRO: $C\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2B}\right)$

Eje focal al eje x	Eje focal al eje y
$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$	$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$
$A(+)$ y $B(-)$ tienen signos diferentes	$A(-)$ y $B(+)$ tienen signos diferentes

NOTA: Se dice que una hipérbola es equilátera si la longitud de su semieje transversal es igual a la longitud de su eje conjugado. Es decir: $a = b$.

8.7.2.2 ECUACIÓN CANÓNICA

ECUACIÓN CANÓNICA CENTRO: $C(0; 0)$	
Eje Focal = Eje x	Eje Focal = Eje y

**RESOLUCIÓN:**

Con los datos:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2$$

$$F_2 = (-6, -4) \text{ y } F_1 = (2, -4) \rightarrow 2c = 2 - (-6) = 8 \rightarrow c = 4$$

Utilizando la relación $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 16 = 4 + b^2 \rightarrow b^2 = 12$ También centro = $(-2, -4)$ con eje focal // eje "x". Luego la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{12} = 1$$

RPTA: C**2. Encontrar la longitud del eje transversal y del eje conjugado, de la hipérbola de ecuación:**

$$-\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$

- A. 8 y 10
 B. 6 y 12
 C. 10 y 8
 D. 11 y 4
 E. 5 y 8

RESOLUCIÓN:Centro $(h; k) = (6; 4)$ y eje focal paralelo al eje Y.

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 25 \rightarrow b = 5$$

$$c^2 = 41 \rightarrow c = \sqrt{41}$$

Luego

$$F_1(6; 4 + \sqrt{41}) \text{ y } F_2(6; 4 - \sqrt{41})$$

$$V_1(6; 8) \text{ y } V_2(6; 0)$$

Eje transversal: $2(4) = 8$ Eje conjugado: $2(5) = 10$ **PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:****1. Determinar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos $P(x; y)$ del plano, para los cuales la diferencia de sus distancias a los puntos fijos $(-6; -4)$ y $(2; -4)$ es 4.**

- A. $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{12} = 1$
 B. $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{12} = 1$
 C. $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{12} = 1$
 D. $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{16} = 1$
 E. $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{12} = 1$

RPTA: B

3. Determine la ecuación canónica de la hipérbola con el eje focal en el eje abscisas, la distancia entre los vértices es 12 y la distancia focal es 20.

- A. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{100} = 1$
 B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$
 C. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$
 D. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{64} = 1$
 E. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$

RESOLUCIÓN:

De los datos:

Distancia entre vértices ($V_1V_2 = 2a$):

$$2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

Distancia focal ($F_1F_2 = 2c$):

$$2c = 20 \Rightarrow c = 10$$

Teorema de Pitágoras:

$$6^2 + b^2 = 10^2 \Rightarrow b = 8$$

Ecuación canónica de la hipérbola con el eje focal en el eje abscisas:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1; C(0; 0)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

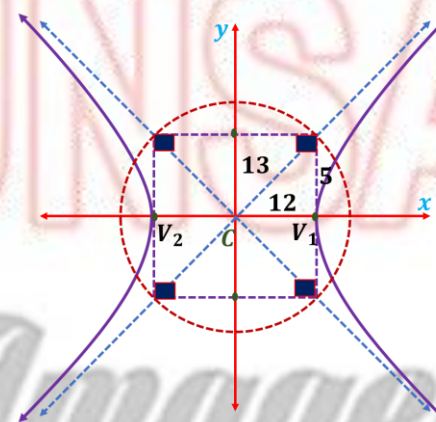
RPTA: C

4. Determinar la ecuación de la hipérbola cuyos vértice y focos son $V_1(-12; 0), V_2(12; 0), F_1(-13; 0), F_2(13; 0)$.

- A. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$
 B. $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$
 C. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25} = 1$
 D. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{36} = 1$
 E. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

RESOLUCIÓN:

De la figura:



$$a = 12; b = 5 \text{ y } c = 13$$

Ecuación de la hipérbola:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{(12)^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$$

RPTA: E

5. Calcular la excentricidad de la hipérbola $\frac{x^2}{441} - \frac{y^2}{400} = 1$.

- A. $\frac{28}{21}$
 B. $\frac{31}{29}$
 C. $\frac{21}{32}$
 D. $\frac{21}{21}$
 E. $\frac{21}{28}$

RESOLUCIÓN:

Del dato:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{(21)^2} - \frac{y^2}{(20)^2} = 1$$

$$\Rightarrow a = 21; b = 20$$

Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = (21)^2 + (20)^2$$

$$\Rightarrow c = 29$$

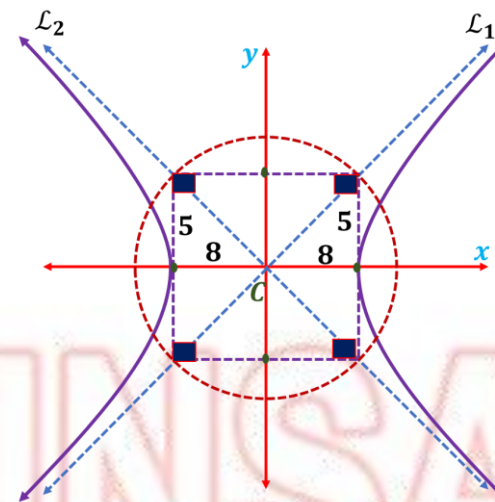
$$\text{Excentricidad: } e = \frac{29}{21}$$

6. Determinar la ecuación de una de las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25} = 1$.

- A. $y = -\frac{4}{7}x$
 B. $y = -\frac{5}{8}x$
 C. $y = -\frac{2}{7}x$
 D. $y = -\frac{9}{4}x$
 E. $y = -\frac{2}{8}x$

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Ecuación de la hipérbola:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1 \Rightarrow a = 8 \wedge b = 5$$

Ecuación de las asíntotas:

$$\vec{l}_1: y = \frac{5}{8}x$$

$$\vec{l}_2: y = -\frac{5}{8}x$$

RPTA: B

7. Determinar la ecuación canónica de la hipérbola con el eje focal en el eje de abscisas, cuya longitud de su lado recto es 9 y la magnitud de su excentricidad es 1,25.

- A. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$
 B. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$
 C. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25} = 1$

D. $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$
 E. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{36} = 1$

RESOLUCIÓN:

Ecuación de la hipérbola:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (I)$$

$$\text{Lado recto: } \frac{2b^2}{a} = 9 \Rightarrow 9a = 2b^2 \quad (II)$$

$$\text{Excentricidad: } \frac{c}{a} = 1,25 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow c = 5k \wedge a = 4k$$

$$\text{Teorema: } a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b = 3k$$

$$\text{En (II): } 9(4k) = 2(3k)^2 \Rightarrow k = 2$$

$$\text{Luego: } a = 8; b = 6 \text{ y } c = 10$$

$$\text{En (I): } \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

RPTA: A

8. Determinar la ecuación canónica de la hipérbola con el eje focal paralelo al eje abscisas cuyo centro es (16; 24), la distancia focal es 34 y la distancia entre los vértices es 30.

A. $\frac{(x-16)^2}{225} - \frac{(y-24)^2}{64} = 1$
 B. $\frac{(x-16)^2}{81} - \frac{(y-24)^2}{64} = 1$
 C. $\frac{(x-16)^2}{144} - \frac{(y-24)^2}{64} = 1$
 D. $\frac{(x-16)^2}{64} - \frac{(y-24)^2}{25} = 1$
 E. $\frac{(x-16)^2}{9} - \frac{(y-24)^2}{4} = 1$

RESOLUCIÓN:Distancia entre vértices ($V_1V_2 = 2a$):

$$2a = 30 \Rightarrow a = 15$$

Distancia entre focos ($F_1F_2 = 2c$):

$$2c = 34 \Rightarrow c = 17$$

Teorema de Pitágoras:

$$(15)^2 + b^2 = (17)^2 \Rightarrow b = 8$$

Ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje de abscisas y con centro $C(16; 24)$:

$$\mathcal{H}: \frac{(x-16)^2}{(15)^2} - \frac{(y-24)^2}{8^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{(x-16)^2}{225} - \frac{(y-24)^2}{64} = 1$$

RPTA: A

CAPÍTULO IX

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

La geometría del espacio, una rama esencial de las matemáticas, investiga las propiedades y relaciones de figuras tridimensionales como prismas, cilindros, esferas y pirámides. A través de conceptos clave como volumen, área y superficie, esta disciplina permite comprender y analizar las formas tridimensionales, siendo fundamental en campos como la arquitectura, la ingeniería y la física.



9 GEOMETRÍA DEL ESPACIO

9.1 RECTAS Y PLANOS

9.1.1 POSTULADOS DEL PLANO

- Todo plano contiene al menos tres puntos no colineales.
- Dos puntos cualesquiera de un plano determinan una recta, que está contenida en el plano.

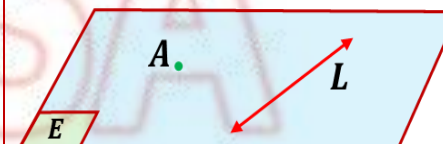
9.1.2 DETERMINACIÓN DE UN PLANO

Un plano P queda determinado por:

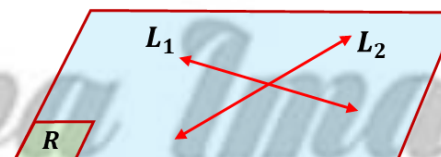
Tres puntos no colineales.



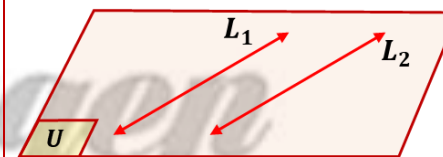
Una recta y un punto exterior a ella.



Dos rectas secantes.

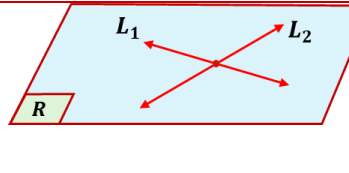


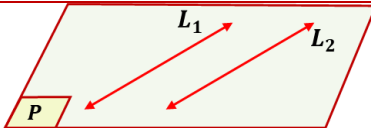
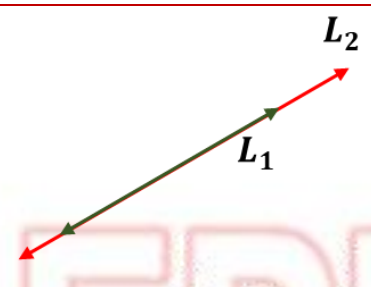
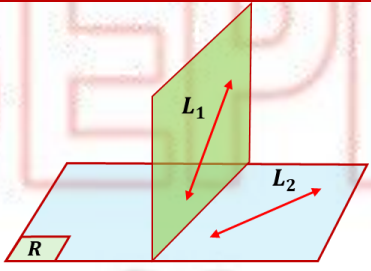
Dos rectas paralelas



9.1.3 POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

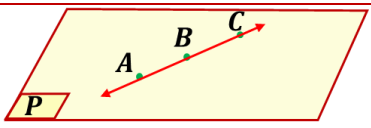
9.1.3.1 ENTRE RECTAS

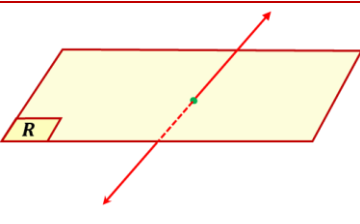
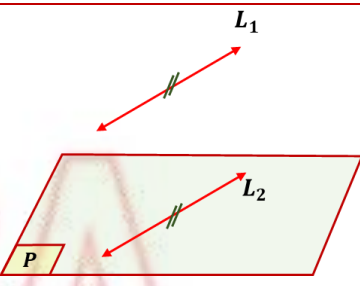
Rectas secantes	Cuando se intersectan y tiene por tanto un punto común. Las rectas secantes son coplanares.	
-------------------------------	--	---

Rectas paralelas	Cuando se encuentran en un mismo plano y no se intersectan.	
Rectas coincidentes	Cuando se superponen, para lo cual basta que tenga dos puntos comunes.	
Rectas alabeadas	Llamado también rectas que no se cruzan, son aquellas rectas que no están en un mismo plano y no tiene ningún punto común.	

9.1.3.2 ENTRE RECTA Y PLANO

Dados una recta L y un plano M , que pueden estar situadas de tres distintas maneras.

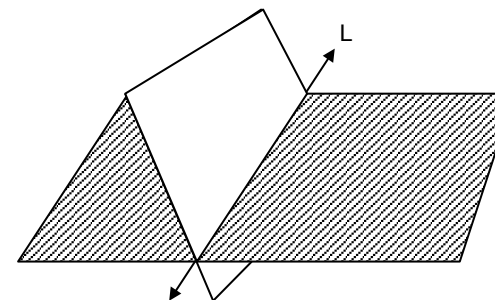
Recta contenida en un plano	Todos los puntos de dicha recta pertenecen al plano.	
------------------------------------	--	--

Recta secante a un plano	La recta tiene un punto en común con el plano.	
Recta paralela a un plano	Si no tienen ningún punto en común.	

Propiedad: Para que una recta sea paralela a un plano es condición necesaria y suficiente que dicha recta sea paralela a una recta del plano.

9.1.3.3 ENTRE PLANOS

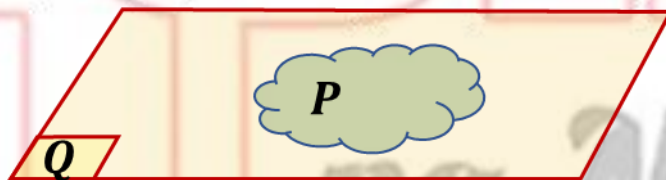
a) **Planos secantes.** - Cuando se intersectan y tiene por tanto una recta común llamada intersección de dos planos.



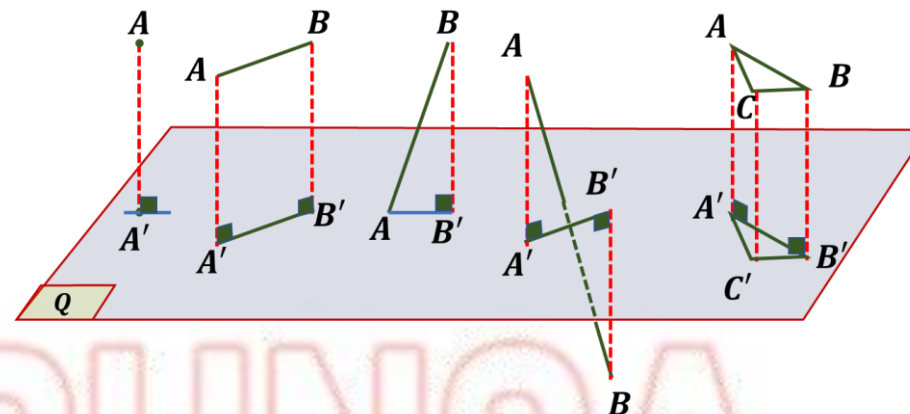
- b) **Planos paralelos.** - Son aquellos que no tienen punto común alguno.



- c) **Planos coincidentes.** - Cuando se superponen, para lo cual basta que tenga tres puntos comunes no colineales.



9.1.4 PROYECCIONES ORTOGONALES SOBRE UN PLANO



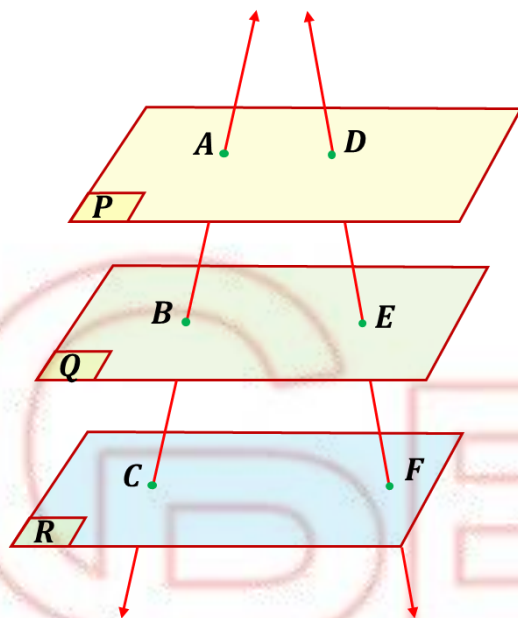
A' : Proyección del punto A sobre el plano Q .

$\overline{A'B'}$: Proyección $\overline{AB}$ sobre el plano Q .

$A'B'C'$: Proyección del $\triangle ABC$ sobre el plano Q .

9.1.5 TEOREMAS SOBRE PLANOS EN EL ESPACIO

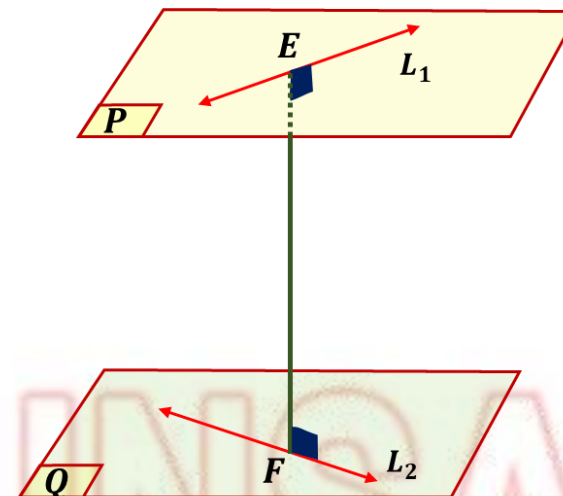
- a) **Teorema de Thales en el espacio.** Tres o más planos paralelos determinan en dos rectas secantes a ellos segmentos proporcionales



Si: $P \parallel Q \parallel R$

$$\rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

b) Menor distancia entre dos rectas cruzadas o alabeadas.

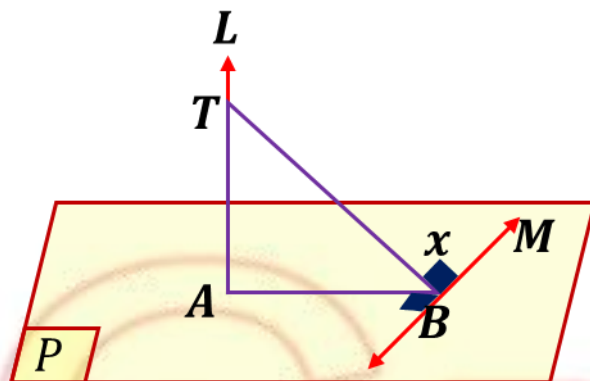


Si: $\vec{L_1} \in P \wedge \vec{L_2} \in Q$, entonces:

EF: menor distancia entre $\vec{L_1}$ y $\vec{L_2}$

9.1.6 TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

Si desde el pie de una recta perpendicular a un plano se traza otra perpendicular a una recta contenida en dicho plano, toda recta que pasa por un punto cualquiera de la primera perpendicular y el punto de intersección de las dos últimas, es perpendicular a la recta contenida en el plano.

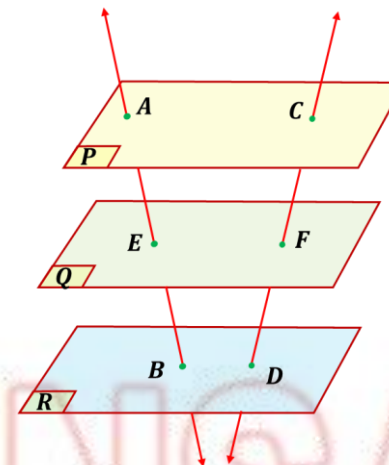


Si: $\vec{L} \perp P$: Primera perpendicular.

$\overline{AB} \perp \vec{M}$: Segunda perpendicular.

Entonces: $\overline{TB} \perp \vec{M}$: Tercera perpendicular.

$$x = 90^\circ$$



$$\frac{8}{EB} = \frac{12}{FD} \Rightarrow \frac{FD}{3} = \frac{EB}{2} = K$$

$$\Rightarrow FD = 3k; EB = 2k$$

$$\text{En dato: } 3k - 2k = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$FD = 3; EB = 2$$

$$\text{Luego: } CF = 12 - 3 \Rightarrow CF = 9$$

RPTA: A

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. En la figura, las dos rectas intersecan a los tres planos paralelos en los puntos A, E, B, C, F y D .

Si $AB = 8 \text{ cm}$; $CD = 12 \text{ cm}$ y $FD - EB = 1 \text{ cm}$, calcula CF .

- A. 9 cm
- B. 7 cm
- C. 8 cm
- D. 10 cm
- E. 11 cm

RESOLUCIÓN:

Teorema de Tales:

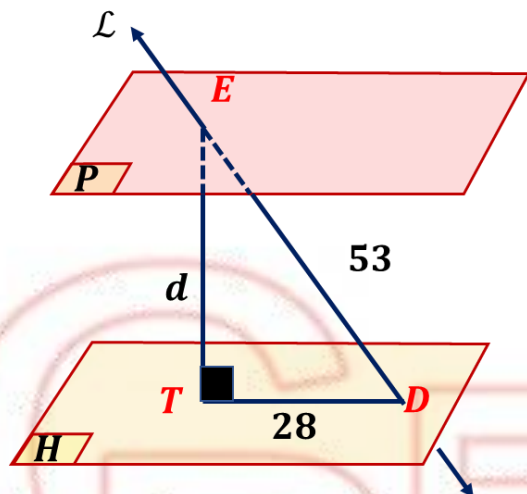
2. H y P son dos planos paralelos, y $\mathcal{L}$ es una recta que intercepta en D al plano H y en E al plano P , tal que la proyección ortogonal de $DE = 53 \text{ cm}$ sobre el plano H mide 28 cm .

Calcula la distancia entre dichos planos.

- A. 20 cm
- B. 45 cm
- C. 35 cm
- D. 15 cm
- E. 95 cm

RESOLUCIÓN:

Graficando:



$\overline{TD}$: proyección de $\overline{DE}$ en $\square H$

$\perp ETD$:

Pitágoras

$$d^2 + 28^2 = 53^2$$

$$\Rightarrow d^2 = (81)(25)$$

$$\therefore d = 45 \text{ cm}$$

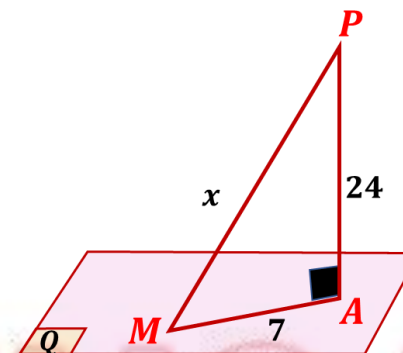
RPTA: B

3. La distancia de un punto P a un plano Q es 24 cm , se traza $\overline{PM}$ (M se encuentra en el plano Q) de modo que la proyección de $\overline{PM}$ sobre el plano es 7 cm . Hallar PM .

- A. 10 cm
- B. 12 cm
- C. 7 cm
- D. 18 cm
- E. 25 cm

RESOLUCIÓN:

En el $\triangle PAM$ por el teorema de Pitágoras:



$$x^2 = 7^2 + 24^2 = 625$$

$$\therefore x = 25 \text{ cm}$$

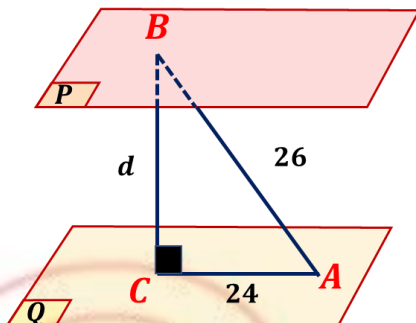
RPTA: E

4. Se tienen dos planos paralelos P y Q . A se ubica en el plano Q y B sobre el plano P . La distancia de A hacia B es 26 y la proyección de esta sobre el plano Q es 24 . Calcula la distancia de B al plano Q .

- A. 20
- B. 10
- C. 23
- D. 15
- E. 17

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Pitágoras:

$$d^2 = 26^2 - 24^2$$

$$d = 10$$

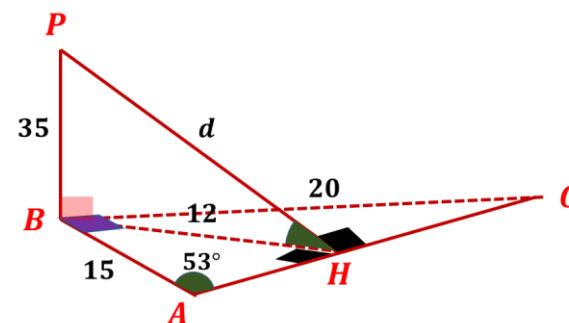
RPTA: B

5. Por el vértice B de un triángulo rectángulo ABC , recto en B , se traza BP perpendicular al plano del triángulo, tal que $BP = 35\text{ m}$; $AB = 15\text{ m}$ y $BC = 20\text{ m}$. Calcular la distancia P al segmento AC .

- A. 27 m
- B. 25 m
- C. 37 m
- D. 32 m
- E. 51 m

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Del $\triangle ABC$: notable de 37° y 53° .

Entonces: $BH = 12$

Por el teorema de Pitágoras en el triángulo PBH :

$$d^2 = 12^2 + 35^2$$

$$d = 37\text{ m}$$

RPTA: C

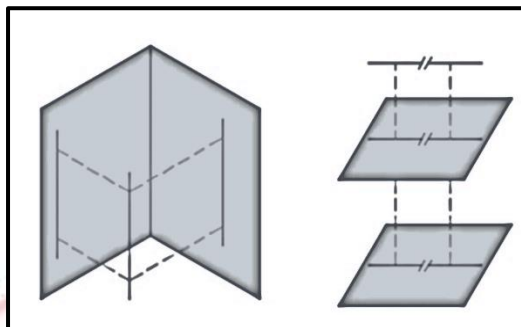
6. Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si dos planos son paralelos a una misma recta entonces los planos son paralelos entre sí.
- II. Si se tienen dos rectas que se cruzan entonces existe siempre una recta perpendicular a ambas.
- III. Todo plano determinado por dos rectas paralelas a otro plano es siempre paralelo a dicho plano.

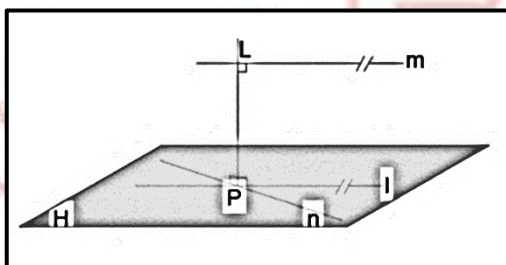
- A. VVV
- B. FFF
- C. FVF
- D. FFV
- E. VVF

RESOLUCIÓN:

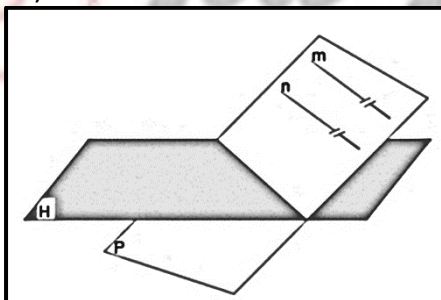
- I. Los planos paralelos a una recta dada pueden ser secantes o paralelos entre sí (FALSO)



II. (VERDADERO)



III. Las rectas paralelas m y n son paralelas también al plano H pero el plano P determinado por dichas rectas paralelas son secantes con el plano H . (FALSO)

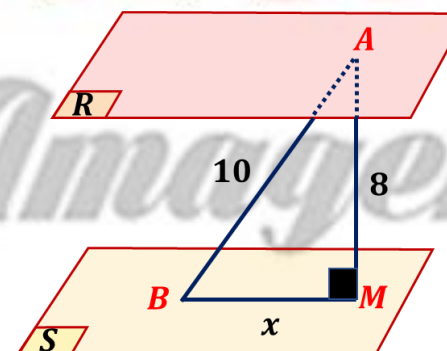


7. Un grifo tiene un techo que es un plano paralelo al piso que se encuentra a $8m$. de altura sobre el piso y una barra metálica oblicua de $10m$. soporta al plano del techo. Calcula la proyección de la barra metálica oblicua sobre el piso.

- A. $5m$
- B. $6m$
- C. $7m$
- D. $8m$
- E. $9m$

RESOLUCIÓN:

La distancia que los separa es un cateto del triángulo rectángulo y la barra metálica la hipotenusa
Piden la proyección $BM = x$



Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 8^2 = 10^2$$

$$x^2 = 100 - 64$$

Entonces $x = 6m$.

RPTA: C

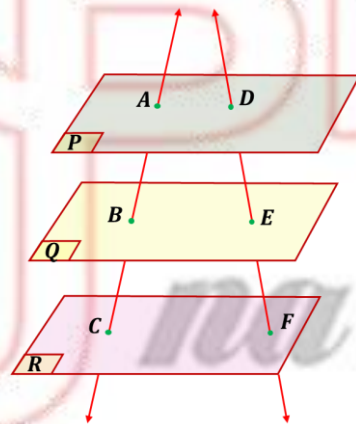
RPTA: B

8. En una construcción se forma una estructura de tres planos paralelos, que determina en los parantes que unen los 3 planos, segmentos como se muestra en la figura donde: $AC = 4\text{ m.}$, $DF = 6\text{ m.}$ y $EF - BC = 1\text{ m.}$ Hallar la distancia DE.

- A. 2,5 m
- B. 1,5 m
- C. 11 m
- D. 1 m
- E. 3 m

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Hacemos que: $DE = x \rightarrow EF = 6 - x$

Como $EF - BC = 1 \rightarrow BC = 5 - x$

Por el teorema de Tales:

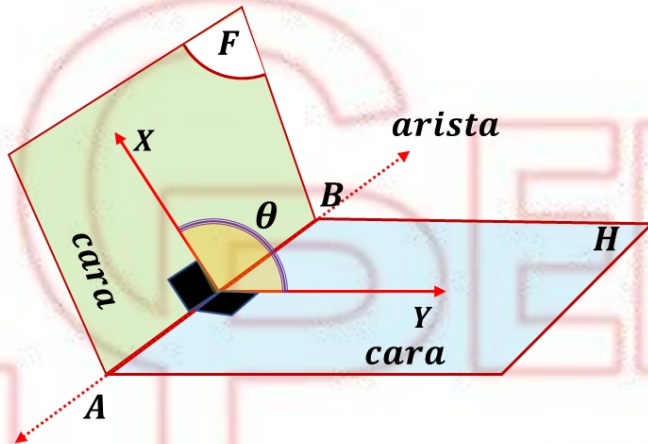
$$\frac{6 - x}{6} = \frac{5 - x}{4}$$
$$x = 3\text{ m.}$$

RPTA: E

9.2 ÁNGULO DIEDRO

9.2.1 DEFINICIÓN

Es el ángulo que forman entre si dos planos que se intersecan. Los planos son llamados caras y la recta de intersección es llamada arista del ángulo diedro.



REPRESENTACIÓN:

Ángulo Diedro: $F - \overleftrightarrow{AB} - H$

Ángulo plano o rectilíneo del ángulo diedro: $\angle XOY$:

Medida del ángulo diedro: θ

9.2.2 PROPIEDADES

- A un semiplano que parte de la arista de un diedro y lo divide en dos diedros iguales se le llama semiplano bisector.
- Todo punto sobre el semiplano bisector, se encuentra a igual distancia de las caras del diedro

- Dos planos son perpendiculares cuando determinan diedros que mide 90° .

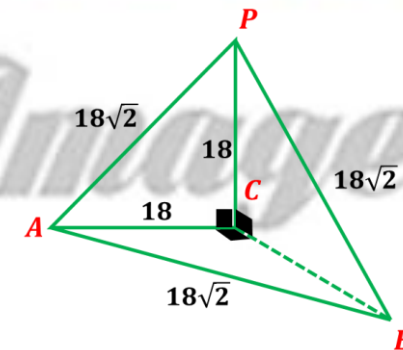
PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Por el vértice C de un triángulo rectángulo ABC se traza la perpendicular $\overline{CP}$ al plano ABC , tal que $CP = AC = BC = 18$. Calcular el área de la región triangular APB .

- $148\sqrt{3}$
- $162\sqrt{3}$
- 196
- $168\sqrt{3}$
- 224

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Nos piden:

$$S_{APB} = \frac{(18\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore S_{APB} = 162\sqrt{3}$$

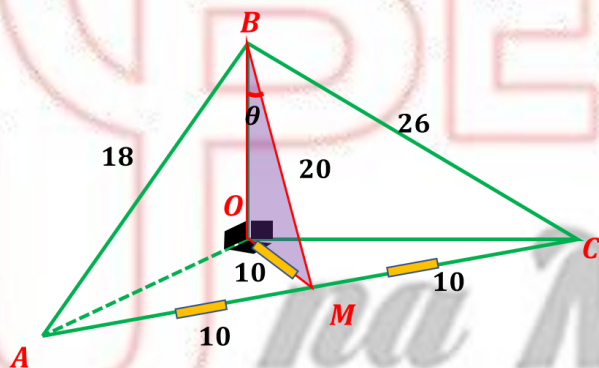
RPTA: B

2. En un triedro trirrectángulo $O - ABC$, M es punto medio de $\overline{AC}$. Si $AB = 18$, $BC = 26$ y $AC = 20$, calcula $m\angle OBM$.

- A. 75°
 B. 60°
 C. 45°
 D. 37°
 E. 30°

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Teorema de la mediana:

$$2(BM)^2 = 18^2 + 26^2 - \frac{20^2}{2} \Rightarrow BM = 20$$

 $\triangle BOM$: notable de 30° y 60° En dato: $3k - 2k = 1 \Rightarrow k = 1$

Por lo tanto:

$$\theta = 30^\circ$$

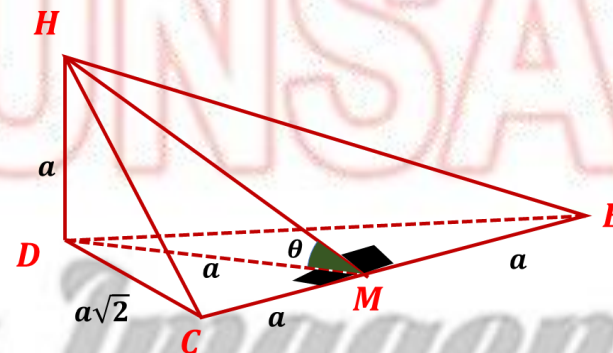
RPTA: E

3. Por el vértice D de un triángulo rectángulo CDE , se traza $\overline{DH}$ perpendicular al plano CDE , tal que $CD = DE = DH\sqrt{2}$. Calcular la medida del diedro HMD .

- A. 20°
 B. 85°
 C. 35°
 D. 75°
 E. 45°

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Luego:

$$DH = a \Rightarrow CD = DE = a\sqrt{2}$$

$$\wedge CE = 2a$$

$$\overline{DM} \perp \overline{CE}:$$

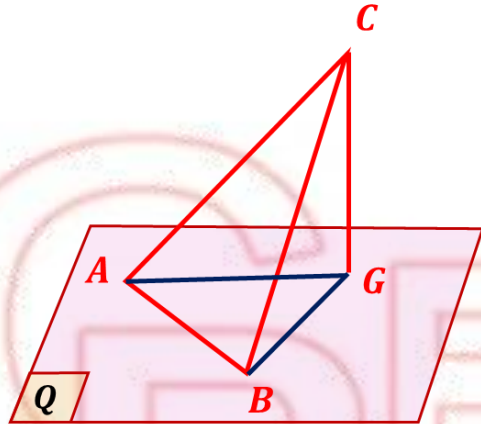
$$CM = ME = DM = a$$

Teorema de las 3 $\perp$ s: $\overline{HM} \perp \overline{CE}$ $\triangle HDM$: notable de 45°

$$\text{Entonces: } \theta = 45^\circ$$

RPTA: E

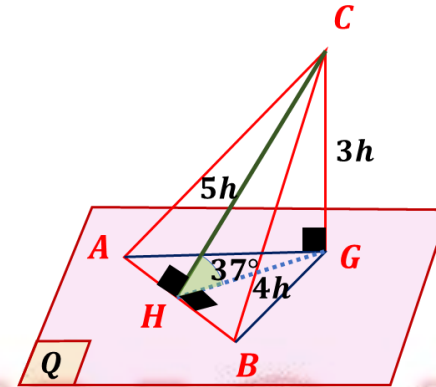
4. En la figura, G es la proyección de C sobre el plano Q . Si el área del triángulo ABC es 30 m^2 y el ángulo diedro que forman ABC y el plano Q mide 37° , calcular el área del triángulo AGB .



- A. 18 m^2
- B. 20 m^2
- C. 22 m^2
- D. 15 m^2
- E. 24 m^2

RESOLUCIÓN:

Del grafico se tiene:



Por el teorema de las tres perpendiculares:

$$\overline{CH} \perp \overline{AB}$$

$$\text{Sea: } CH = 5h$$

$$\text{Por dato: } A_{\triangle ABC} = 30 \text{ m}^2$$

Entonces:

$$\frac{(AB)(5h)}{2} = 30 \Rightarrow (AB)(h) = 12$$

Piden:

$$A_{\triangle AGB} = \frac{(AB)(4h)}{2} = 2(AB)(h)$$

$$\Rightarrow A_{\triangle AGB} = 2(12)$$

$$\therefore A_{\triangle AGB} = 24 \text{ m}^2$$

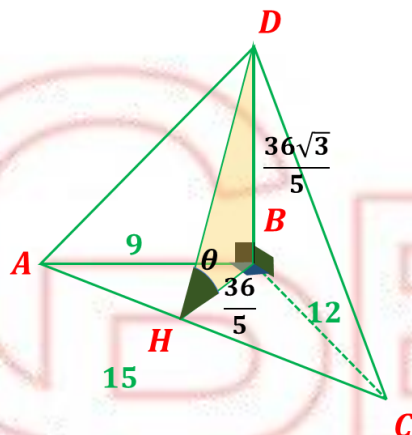
RPTA: E

5. Por el vértice B de un triángulo rectángulo ABC , recto en B , se traza $\overline{BD}$ perpendicular al plano ABC , y el punto D se une con los vértices A y C . Si $AB = 9 \text{ u}$, $BC = 12 \text{ u}$ y $BD = 36\sqrt{3}/5 \text{ u}$, entonces la medida del $\angle DHB$ (en grados sexagesimales) es:

- A. 37°
- B. 45°
- C. 53°

D. 54° E. 60° **RESOLUCIÓN:**

Graficando:



Por el teorema de relaciones métricas:

$$15(BH) = 9(12)$$

$$\Rightarrow BH = \frac{36}{5}$$

 $\triangle DBH$: notable de 30° y 60°

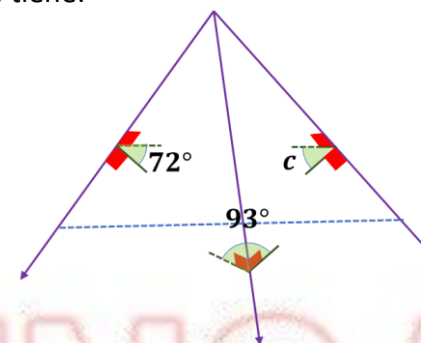
$$\therefore \theta = 60^\circ$$

RPTA: E

6. Dos diedros de un triedro miden 72° y 93° . Determinar el mínimo valor entero que toma la medida del tercer diedro.

A. 17° B. 15° C. 13° D. 16° E. 26° **RESOLUCIÓN:**

Del enunciado, se tiene:



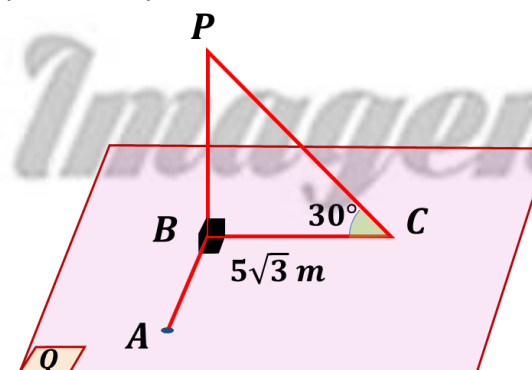
Teorema:

$$180^\circ < 72^\circ + 93^\circ + c$$

$$\Rightarrow 15^\circ < c$$

Por lo tanto, el mínimo valor entero de c es 16° .**RPTA: D**

7. En la figura, hallar AC , si $PA = 13$ m.



A. 20 m

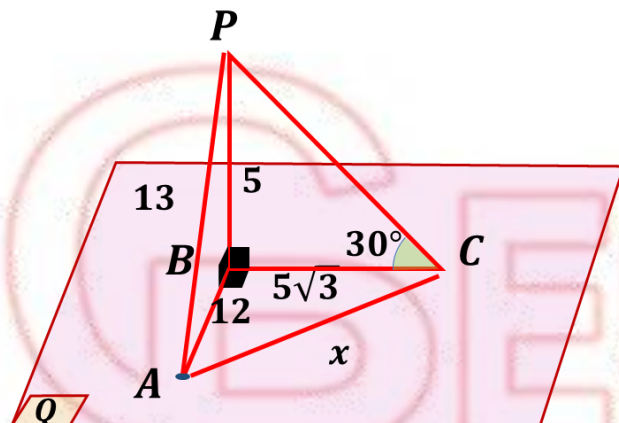
B. 15 m

C. $\sqrt{20}$ mD. $\sqrt{219}$ m

E. 30 m

RESOLUCIÓN:

Completando la grafica:



De la gráfica tenemos

Del $\triangle CBP$ notable de 30° y 60° : $BP = 5$ En el $\triangle PBA$ por el teorema de Pitágoras: $BA = 12$ En el $\triangle ABC$ por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 12^2 + (5\sqrt{3})^2 = 144 + 75$$

$$x^2 = 219$$

$$\therefore x = \sqrt{219} \text{ m}$$

RPTA: D

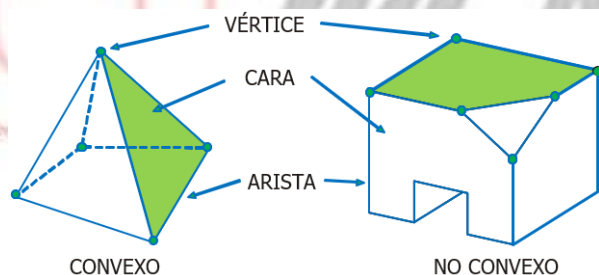
9.3 POLIEDROS

9.3.1 DEFINICIÓN

Un poliedro es un sólido formado por cuatro o más polígonos planos, donde cada lado de un polígono pertenece a dos caras del sólido.

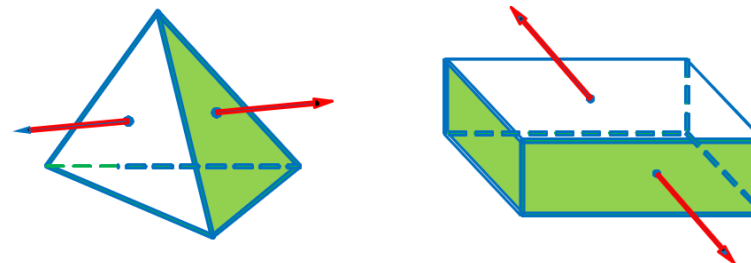
Además, debe cumplir las condiciones

- Cada arista pertenece a dos caras, y estas se denominan contiguas.
- Dos caras contiguas están ubicadas en planos distintos.
- Al lado común a dos caras contiguas se le denomina arista y al punto de concurrencia de tres o más aristas, vértice del poliedro.
- Al segmento que tiene por extremos dos vértices que no pertenecen a una misma cara se denomina diagonal del poliedro.



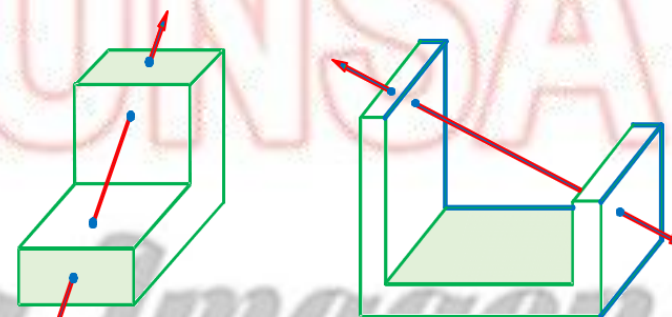
9.3.2 POLIEDRO CONVEXO

Un poliedro se llama convexo, si determina sobre una recta secante a su superficie, como máximo dos puntos de intersección.



9.3.3 POLIEDRO NO CONVEXO O CÓNCAVO

Es aquel que determina sobre una recta secante más de dos puntos de intersección.



El nombre del poliedro depende del número de caras. Puede ser: tetraedro (4 caras); pentaedro (5 caras); hexaedro (6 caras), etc.

9.3.4 PROPIEDADES

Si " V ", " C " y " A ", representan los números de vértices, caras y aristas de un poliedro, respectivamente:

A. La suma de los ángulos, en todas las caras es:

$$S_{\text{CARAS}} = 360^\circ(V - 2)$$

Además, todo poliedro regular se puede inscribir y circunscribir en una esfera.

B. Teorema de Euler: La suma del número de caras y vértices, excede en dos al total de aristas:

$$C + V = A + 2$$

C. En todo poliedro se cumple:

$$D = C_2^V - \#A - \#d$$

D : Número de diagonales del poliedro.

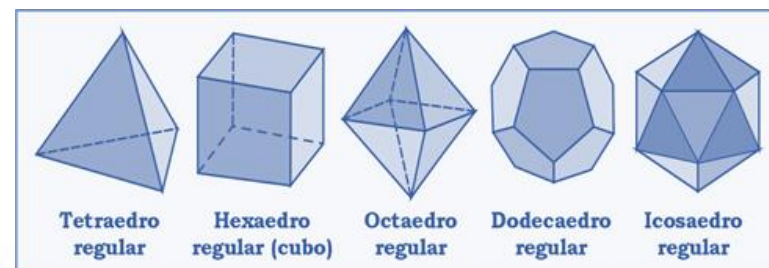
V : Número de vértices.

$\#A$: Número de aristas.

$\#d$: Número de diagonales de todas las caras.

D. El número de aristas de un poliedro formado por " k " polígonos de " n " lados, k_1 polígonos de n_1 lados, hasta k_m polígonos de n_m lados está dado por:

$$A = \frac{k \cdot n + k_1 \cdot n_1 + k_2 \cdot n_2 + \dots + k_m \cdot n_m}{2}$$

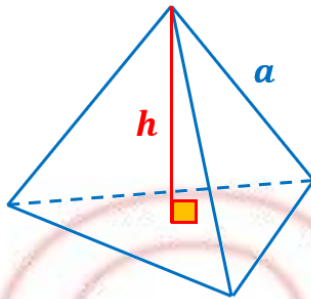


POLIEDROS REGULARES	Forma de las caras	Nº Caras	Nº Vértices	Nº Aristas
TETRAEDRO	4 triángulos equiláteros	4	4	6
HEXAEDRO	6 cuadrados	6	8	12
OCTAEDRO	8 triángulos equiláteros	8	6	12
DODECAEDRO	12 pentágonos regulares	12	20	30
ICOSAEDRO	20 triángulos equiláteros	20	12	30

9.3.5 POLIEDROS REGULARES

Son aquellos que tienen por caras, regiones poligonales regulares y congruentes entre sí, y en cada vértice concurren el mismo número de aristas.

9.3.5.1 TETRAEDRO REGULAR

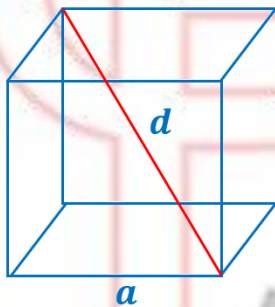


$$A = a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

9.3.5.2 HEXAEDRO REGULAR

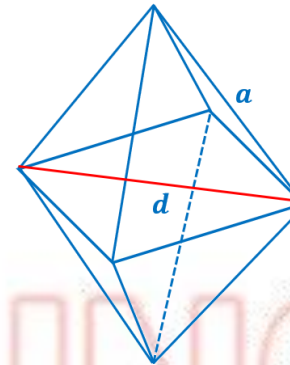


$$A = 6a^2$$

$$V = a^3$$

$$d = a\sqrt{3}$$

9.3.5.3 OCTAEDRO REGULAR



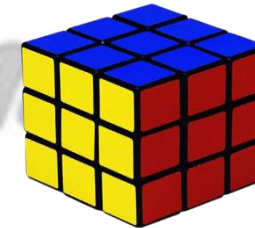
$$A = 2a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

$$d = a\sqrt{2}$$

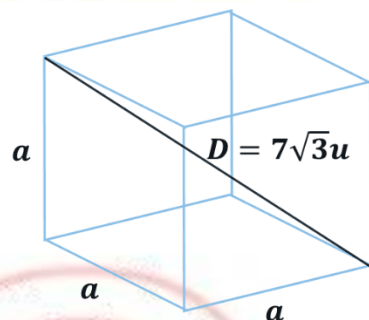
PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Un estudiante del Ceprunsa Quintos 2024 da clases particulares y gana semanalmente el valor numérico del área lateral de un cubo de Rubik en soles cuya diagonal mide $7\sqrt{3}u$. ¿Cuánto recibe semanalmente?



- A. 197 soles
- B. 195 soles
- C. 196 soles
- D. 199 soles
- E. 198 soles

RESOLUCIÓN:

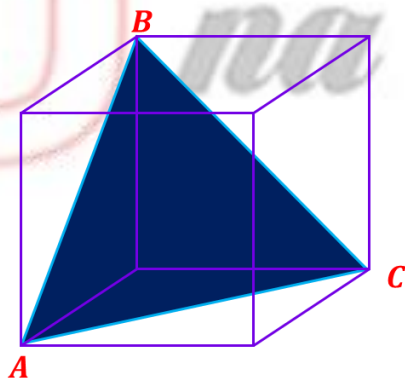


Por la fórmula: $D = a\sqrt{3}$
 Reemplazando: $7\sqrt{3} = a\sqrt{3}$
 Resolviendo: $a = 7$
 Por la fórmula: $A_L = 4a^2$
 Reemplazando: $A_L = 4(7)^2$
 $A_L = 196u^2$

∴ Recibe semanalmente: 196 soles

RPTA: C

2. Si el área de la región sombreada es $6\sqrt{3}u^2$. Calcula el área total del cubo.

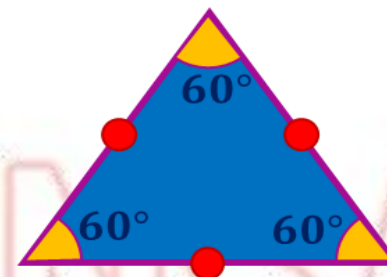


- A. $73u^2$
- B. $72u^2$

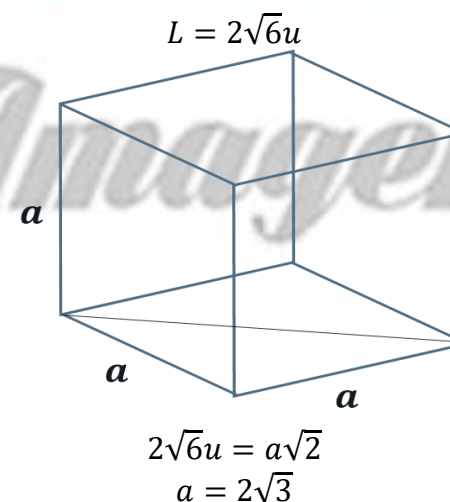
- C. $71u^2$
- D. $70u^2$
- E. $69u^2$

RESOLUCIÓN:

Del gráfico:



Por la fórmula: $A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$
 Reemplazando: $6\sqrt{3} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$
 Resolviendo: $L^2 = 24$



Por la fórmula: $A_t = 6a^2$
 Reemplazando: $A_t = 6(2\sqrt{3})^2$

$$\therefore A_t = 72u^2$$

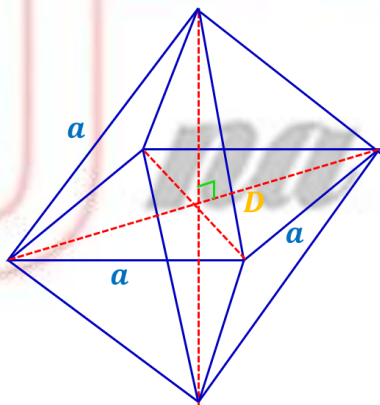
RPTA: B

3. La propina en soles que recibe un estudiante por resolver 500 problemas de matemática es equivalente al valor del área de un octaedro regular multiplicado por $\sqrt{3}$. Si la diagonal del poliedro regular mide $20\sqrt{2}u$. Calcular cuánto recibe por resolver 4 problemas de matemática.

- A. 19.9 soles
- B. 19.8 soles
- C. 19.6 soles
- D. 19.7 soles
- E. 19.2 soles

RESOLUCIÓN:

Graficando:

Por la fórmula: $D = a\sqrt{2}$ Reemplazando: $20\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ Resolviendo: $a = 20u$ Por la fórmula: $A = 2a^2\sqrt{3}$ Reemplazando: $A = 2(20)^2\sqrt{3}$

$$A = 800\sqrt{3}u^2$$

$$500 \text{ problemas} = 800\sqrt{3}x\sqrt{3} = 2400 \text{ soles}$$

$$1 \text{ problema} = \frac{2400}{500} = 4.8 \text{ soles}$$

$$\therefore 4 \text{ problemas} = 4(4.8) = 19.2 \text{ soles}$$

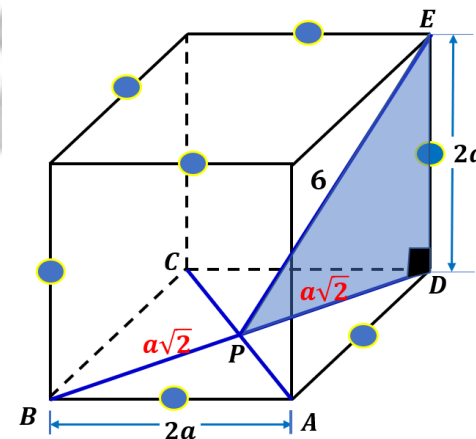
RPTA: E

4. Calcular el volumen de un cubo, si la distancia del centro de una cara a cualquiera de los vértices de la cara opuesta es 6 u.

- A. $\sqrt{6} u^3$
- B. $3\sqrt{6} u^3$
- C. $12\sqrt{6} u^3$
- D. $6\sqrt{6} u^3$
- E. $48\sqrt{6} u^3$

RESOLUCIÓN:

Graficando:

En el triángulo DEP por el Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$6^2 = (2a)^2 + (a\sqrt{2})^2$$

$$36 = 4a^2 + 2a^2$$

$$36 = 6a^2$$

$$\sqrt{6} = a$$

El volumen del cubo es:

$$V = (2a)^3 = (2\sqrt{6})^3 = 48\sqrt{6} u^3$$

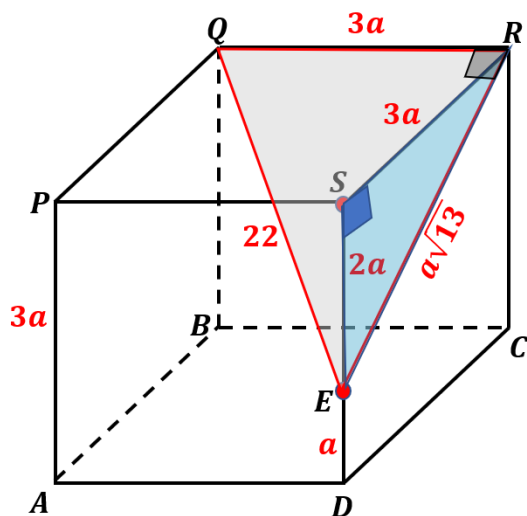
RPTA: E

5. Si $ED = a$; $AP = 3a$ y $QE = 22$ cm. Calcular el área total del cubo de la siguiente figura:

- A. 1120 cm^2
- B. 1126 cm^2
- C. 1188 cm^2
- D. 1168 cm^2
- E. 1180 cm^2

RESOLUCIÓN:

Graficando y completando, se tiene:



Por el Teorema de Pitágoras en el $\triangle ERS$:

$$ER^2 = (2a)^2 + (3a)^2$$

$$ER = a\sqrt{13}$$

Nuevamente por el Teorema de Pitágoras en el $\triangle EQR$:

$$(22)^2 = (3a)^2 + (a\sqrt{13})^2$$

$$22^2 = 9a^2 + 13a^2$$

$$22^2 = 22a^2$$

$$\sqrt{22} = a$$

El área total del cubo es:

$$A_T = 6(3a)^2 = 6(3\sqrt{22})^2 = 1188 \text{ cm}^2$$

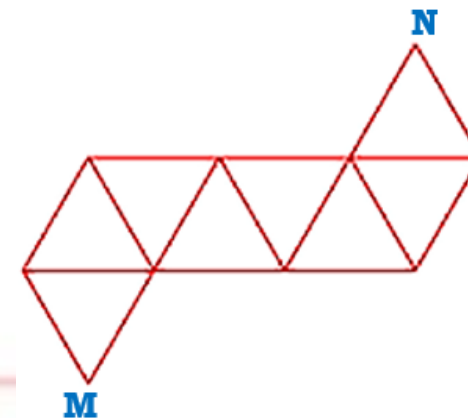
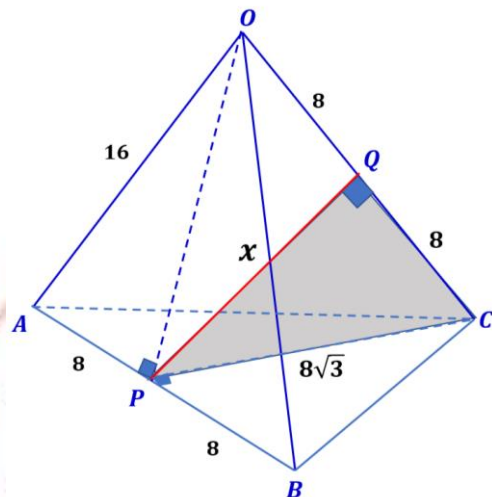
RPTA: C

6. La familia Vasíliev sustenta el récord de la mayor cantidad de hijos de una misma pareja. Si la cantidad de hijos que dio a luz en total la Sra. Vasíliev está dada por $\frac{(a-b)(a+1)}{1}$. Si se sabe que en un tetraedro regular de arista $16u$, la distancia entre dos aristas opuestas es $a\sqrt{b}$. ¿Cuál fue la cantidad de hijos que tuvo?

- A. 15 hijos
- B. 21 hijos
- C. 38 hijos
- D. 54 hijos
- E. 69 hijos

RESOLUCIÓN:

Graficando:



En el triángulo PQC , recto en P , el lado $PC = 8\sqrt{3}$ por ser triángulo notable de $30^\circ - 60^\circ$.

En el triángulo CPQ por el Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$x^2 + (8)^2 = (8\sqrt{3})^2$$

$$x^2 = 192 - 64$$

$$x = \sqrt{128}$$

$$x = 8\sqrt{2}$$

Por comparación con el dato del enunciado la distancia entre aristas opuestas es:

$$x = a\sqrt{b} = 8\sqrt{2}$$

$$a = 8 \text{ y } b = 2$$

La cantidad de hijos que tuvo la familia Vasíliev es:

$$(a - b)(a + 1) = (8 - 2)(8 + 1) = 69 \text{ hijos}$$

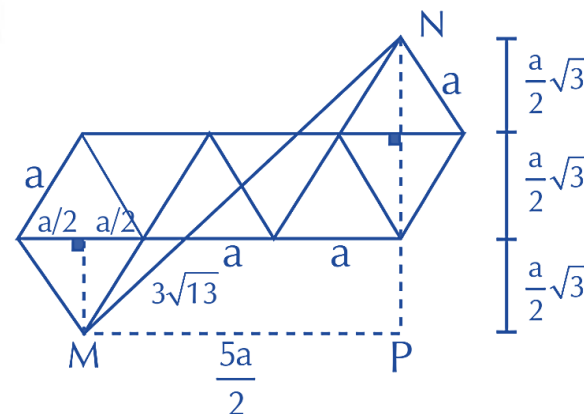
RPTA: E

7. La figura muestra el desarrollo de la superficie de un octaedro regular, siendo $MN = 3\sqrt{13}$. Calcular en cm^2 , la superficie total.

- A. $10\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- B. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- C. $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- D. $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- E. $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Sea a la arista del octaedro regular, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle MPN$:

$$\begin{aligned}(3\sqrt{13})^2 &= \left(\frac{5a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ 117 &= \frac{25a^2}{4} + \frac{27a^2}{4} \\ 117 &= \frac{52a^2}{4} \\ 117 &= a^2 \\ 9 &= a^2 \\ 3 &= a\end{aligned}$$

Calculando el área total:

$$\begin{aligned}A &= 2\sqrt{3}a^2 \\ A &= 2\sqrt{3}(9) \\ A &= 18\sqrt{3} \text{ cm}^2\end{aligned}$$

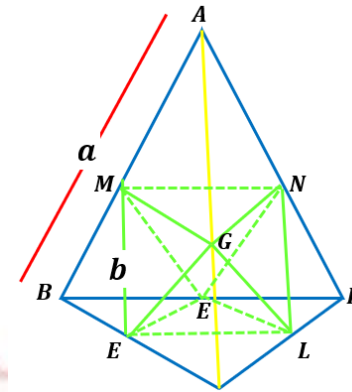
RPTA: C

8. Calcular en cm^2 , la superficie total. Calcular el volumen del poliedro formado al unir los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular de altura $2\sqrt{6} \text{ cm}$.

- A. $5\sqrt{2}\text{cm}^3$
- B. $6\sqrt{2}\text{cm}^3$
- C. $7\sqrt{2}\text{cm}^3$
- D. $8\sqrt{2}\text{cm}^3$
- E. $9\sqrt{2}\text{cm}^3$

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Si su volumen es V y su arista " b ", entonces:

$$V = \frac{b^3\sqrt{2}}{3}$$

Dato del problema la altura del tetraedro regular de arista " a " mide $2\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned}2\sqrt{6} &= \frac{a\sqrt{6}}{3} \\ a &= 6\end{aligned}$$

En el $\triangle BAC$:

$$EG = b = \frac{a}{2} = 3$$

Reemplazamos en el V :

$$\begin{aligned}V &= \frac{b^3\sqrt{2}}{3} \\ V &= \frac{3^3\sqrt{2}}{3} \\ V &= 9\sqrt{2}\text{cm}^3\end{aligned}$$

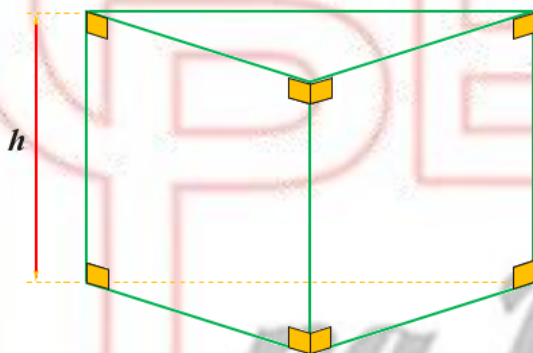
RPTA: E

9.4 PRISMA

Es aquel sólido geométrico que se encuentra limitado superior e inferiormente por dos regiones poligonales paralelas y congruentes, y lateralmente se encuentra limitado por paralelogramos.

9.4.1 PRISMA RECTO

Es aquel prisma que tiene sus aristas laterales perpendiculares a las bases y sus caras laterales son rectángulos.



$(2p)_B$: Perímetro de la base.

h : Altura.

A_L : Área lateral.

A_T : Área total.

A_B : Área de la base.

V : Volumen.

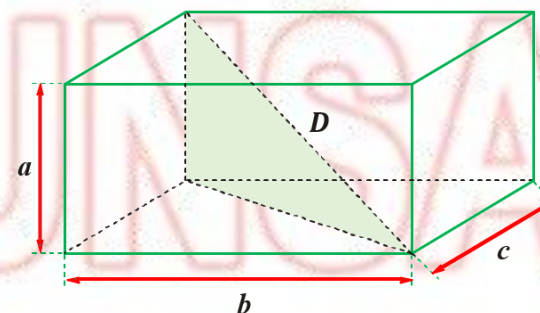
$$A_L = (2p)_B \cdot h$$

$$A_T = A_L + 2A_B$$

$$V = A_B \cdot h$$

9.4.2 PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR

Es un poliedro de 6 caras que son rectángulos. Llamado también rectoedro u ortoedro.



$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

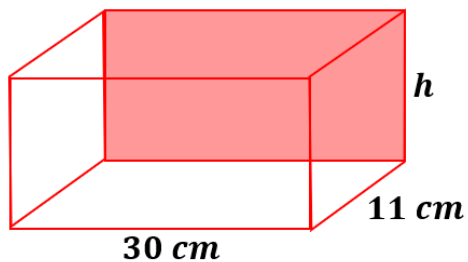
PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Elsa tiene una caja de zapatos en forma de paralelepípedo y desea calcular la altura sabiendo que el volumen, largo y ancho son 2640 cm^3 , 30 cm y 11 cm respectivamente, entonces, ¿cuál será la altura pedida?

- A. 9 cm
- B. 6 cm
- C. 5 cm
- D. 4 cm
- E. 8 cm

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



$$\begin{aligned} V &= a \cdot b \cdot c \\ 2640 &= 30 \cdot 11 \cdot (h) \\ 2640 &= 330 \cdot (h) \\ h &= 8 \end{aligned}$$

La altura de la caja de zapatos es 8 cm

RPTA: E

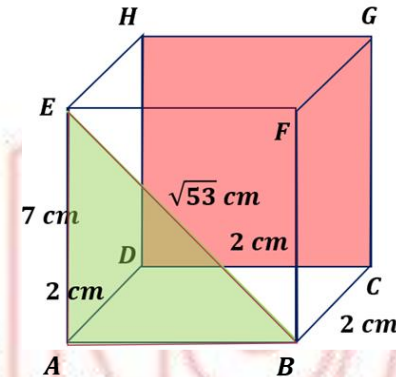
2. Hallar el área lateral de un prisma cuadrangular regular recto cuya altura mide 7 cm y la diagonal $\sqrt{53}$.

- A. 56 cm^2
- B. 57 cm^2

- C. 58 cm^2
- D. 59 cm^2
- E. 60 cm^2

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Por el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (\sqrt{53})^2 &= (7)^2 + (AB)^2 \\ 4 &= (AB)^2 \end{aligned}$$

$$2 = AB$$

Luego hallamos el Área Lateral:

$$AL = P_B \cdot h$$

$$AL = (8)(7)$$

$$\therefore AL = 56 \text{ cm}^2$$

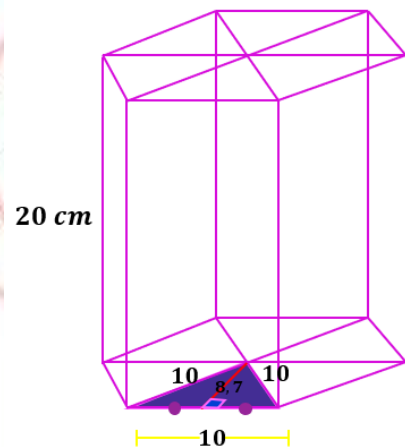
RPTA: A

3. Daniela en su fiesta de 15 años reparte recuerdos en forma de prisma hexagonal regular recto cuyo lado de la base es 10 cm , su altura 20 cm y apotema $8,7 \text{ cm}$. ¿Cuál será el volumen de 50 recuerdos?

- A. 283000 cm^3
 B. 383000 cm^3
 C. 261000 cm^3
 D. 273000 cm^3
 E. 223000 cm^3

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Hallamos el perímetro:

$$(2P_B) = 10(6)$$

$$(2P_B) = 60$$

Ahora hallamos el volumen de una sorpresa:

$$V = \frac{P_B \cdot A_p}{2} h$$

$$V = \frac{60(8,7)}{2} (20)$$

$$V = \frac{522}{2} (20)$$

$$V = 261 (20)$$

$$V = 5220$$

Nos pide el volumen de 50 recuerdos:

$$V = (50)(5220)$$

$$V = 261000 \text{ cm}^3$$

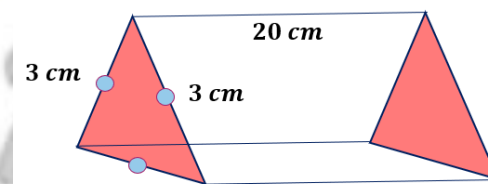
RPTA: C

4. Por el día de la amistad se desea repartir a los alumnos del CEPRUNSA chocolates en barra en forma de prisma triangular regular recto. Calcular el volumen de una barra de chocolate sabiendo que la altura es 20 cm y el lado de la base es 3 cm .

- A. $48\sqrt{3} \text{ cm}^3$
 B. $45\sqrt{3} \text{ cm}^3$
 C. $36\sqrt{3} \text{ cm}^3$
 D. $38\sqrt{3} \text{ cm}^3$
 E. $24\sqrt{3} \text{ cm}^3$

RESOLUCIÓN:

Graficamos y ubicamos los datos $h=20 \text{ cm}$ y lado de la base 3 cm .



Ahora hallamos el volumen:

$$V = A_B (h)$$

$$V = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} (h)$$

$$V = \frac{(3)^2 \sqrt{3}}{4} (20)$$

$$V = \frac{9\sqrt{3}}{4} (20)$$

$$V = 45\sqrt{3}$$

Por lo tanto, el volumen de una barra de chocolate es $45\sqrt{3} \text{ cm}^3$

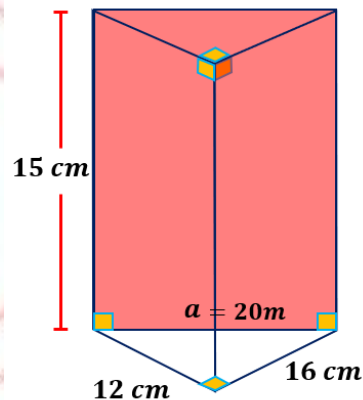
RPTA: B

5. La base de un prisma es un triángulo rectángulo de catetos 12 y 16 metros respectivamente y la altura del prisma es de 15 metros. Calcular el área total.

- A. $720 m^2$
- B. $816 m^2$
- C. $118 m^2$
- D. $912 m^2$
- E. $680 m^2$

RESOLUCIÓN:

Graficamos y ubicamos datos:

Por triángulos notables: $a = 20m$ Luego: $AL = (2P_B) \cdot h$

$$AL = (48)(15)$$

$$AL = 720 cm^2$$

Ahora calculamos Área total:

$$AT = AL + 2A_B$$

$$AT = 720 + 2 \left[\frac{(12)(16)}{2} \right]$$

$$AT = 720 + 192$$

$$AT = 912$$

Por lo tanto, el Área Total es $912 m^2$

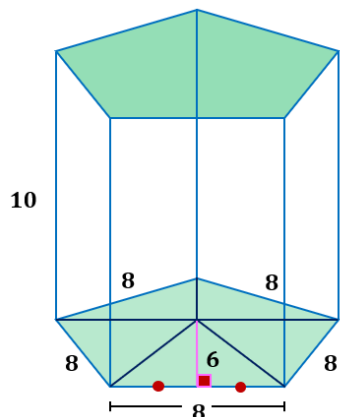
RPTA: D

6. Paolito está en la playa y quiere construir su castillo de arena, está pensando colocar cuatro torres de las mismas dimensiones; para lo cual, tiene un recipiente de forma de prisma pentagonal regular recto que tiene 10cm. de altura, 8cm de lado de la base y apotema 6cm. Si para construir una torre emplea dos recipientes llenos. ¿Cuánto de arena en total utiliza en la parte preliminar de su construcción?

- A. $9600 cm^3$
- B. $4800 cm^3$
- C. $2400 cm^3$
- D. $4500 cm^3$
- E. $3600 cm^3$

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Luego reemplazamos datos:

$$V = \frac{P_B \cdot Ap}{2} h$$

$$V = \frac{(5)(8)(6)}{2} (10)$$

$$V = \frac{240}{2} (10)$$

$$V = 120 (10)$$

$$V = 1200$$

Como cada torre esta hecha de dos recipientes y son cuatro torres en total, entonces, el volumen total de arena es igual a:

$$V_t = (1200)(8)$$

$$V_t = 9600 \text{ cm}^3$$

RPTA: A

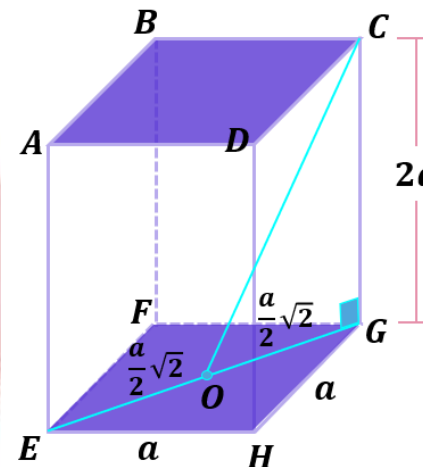
7. La superficie lateral de un prisma cuadrangular regular $ABCD - EFGH$ es 32 cm^2 . Calcular la longitud de OC , siendo "O" centro de la cara $EFGH$ ($2AB = BF$).

- A. $3\sqrt{2} \text{ cm}$
 B. $4\sqrt{2} \text{ cm}$
 C. $5\sqrt{2} \text{ cm}$

- D. $6\sqrt{2} \text{ cm}$
 E. $7\sqrt{2} \text{ cm}$

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Por dato:

$$A_L = P_{BASE} \cdot h$$

$$A_L = 4a \cdot 2a$$

$$32 = 8a^2$$

$$4 = a^2$$

$$2 = a$$

El en $\triangle OGC$ por T. de Pitágoras:

$$(OC)^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + (2a)^2$$

$$(OC)^2 = \frac{9a^2}{2} = \frac{9(2)^2}{2}$$

$$OC = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

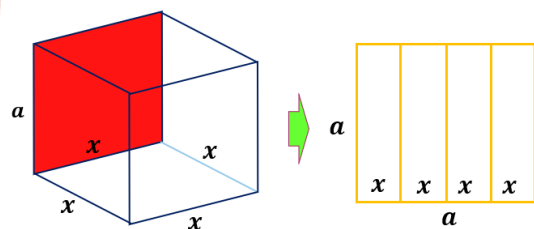
RPTA: A

8. La base y el desarrollo de la superficie lateral de un prisma recto son cuadrados; si “ a ” es la longitud del lado del cuadrado mayor. Hallar su volumen.

- A. $\frac{a^3}{16}u^3$
B. $\frac{a^3}{4}u^3$
C. $\frac{a^3}{12}u^3$
D. $\frac{a^3}{8}u^3$
E. $\frac{a^3}{24}u^3$

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Sea “ x ” la longitud del lado del cuadrado de la base del prisma:

$$4x = a \rightarrow x = \frac{a}{4}$$

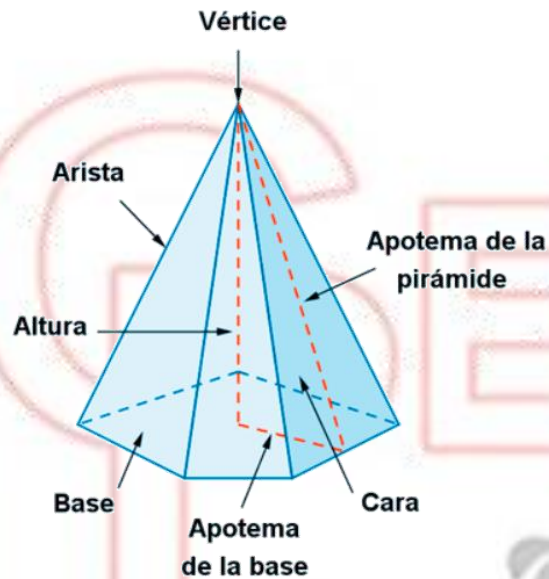
El volumen del prisma será:

$$V = \left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot a$$
$$v = \frac{a^3}{16}u^3$$

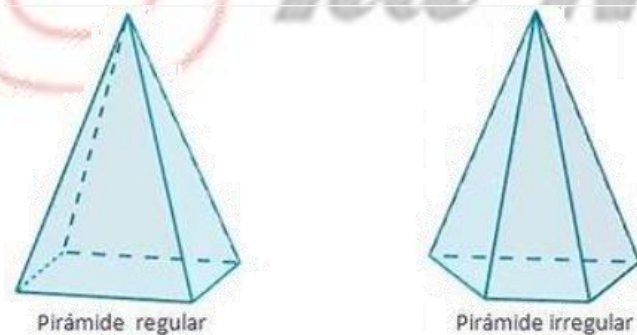
RPTA: A

9.5 PIRÁMIDE

Las pirámides son poliedros que tienen una sola base, que es un polígono cualquiera y sus otras caras son triángulos que se unen en un vértice común que se llama cúspide o vértice de la pirámide



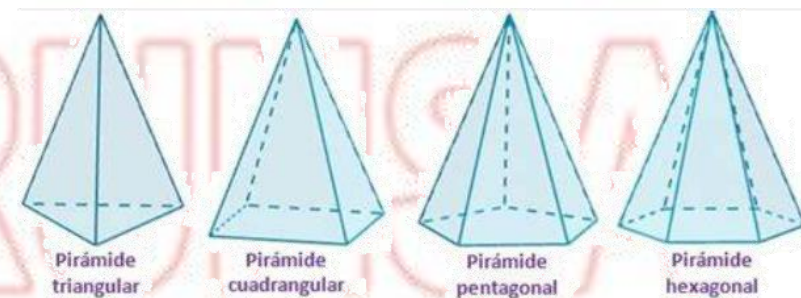
Las pirámides se clasifican:



9.5.1 PIRÁMIDE RECTA REGULAR

En la pirámide recta todas sus caras laterales son triángulos isósceles y la altura cae al punto medio de la base. La cara que es una región poligonal cualquiera se llama base de la pirámide y las otras, se denominan caras laterales. El vértice común de las caras laterales es el vértice de la pirámide.

En una pirámide regular las aristas laterales tienen longitudes iguales.



En la pirámide regular la altura de la cara lateral trazada del vértice de la pirámide se denomina apotema de la pirámide.

En la pirámide regular las caras laterales son congruentes.

P_B : Semiperímetro de la base.

h : Altura.

Ap : Apotema de la pirámide.

ap : Apotema de la base.

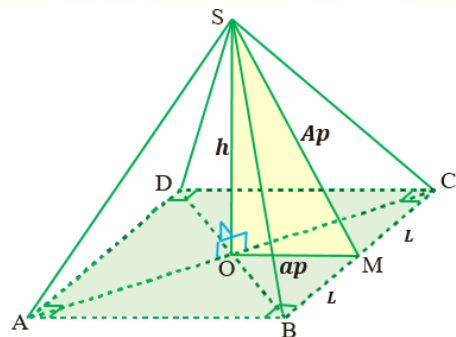
A_L : Área lateral.

A_T : Área total.

A_B : Área de la base.

V : Volumen.

P_B : semiperímetro de la base



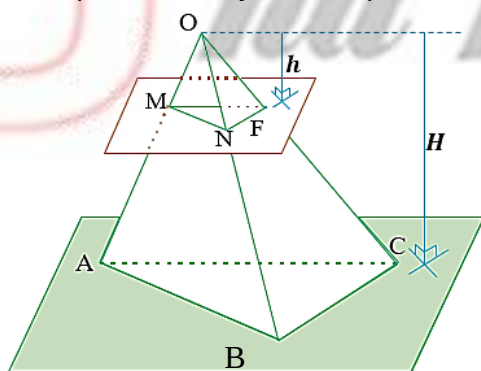
$$A_L = (P_B) \cdot Ap$$

$$A_T = A_L + A_B$$

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

9.5.2 PIRÁMIDES SEMEJANTES

Si se corta una pirámide cualquiera por un plano paralelo a la base, se obtiene una pirámide parcial semejante a la pirámide total.



Pirámide: $O - MNF$

Pirámide: $O - ABC$

Luego se cumple:

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{OF}{OC} = \frac{h}{H} = k$$

$$\frac{S_{MNF}}{S_{ABC}} = \frac{(OM)^2}{(OA)^2} = \dots = \frac{h^2}{H^2} = k^2$$

$$\frac{V_{O-MNF}}{V_{O-ABC}} = \frac{(OM)^3}{(OA)^3} = \dots = \frac{h^3}{H^3} = k^3$$

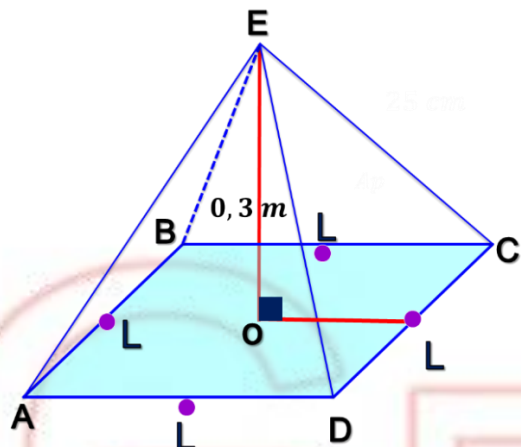
PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Una caja con forma de pirámide recta cuadrangular regular, tiene un volumen de $8,1 \text{ m}^3$; y una altura de $0,3 \text{ m}$. Calcular la longitud de la arista de la base.

- A. $5,3 \text{ m}$
- B. 64 m
- C. $5,2 \text{ m}$
- D. 8 m
- E. 9 m

RESOLUCIÓN:

Representamos gráficamente:



Por dato: $V_{pirámide} = 8,1 \text{ m}^3$

Se sabe que: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$

Reemplazamos datos:

$$8,1 = \frac{1}{3} L^2 (0,3)$$

$$10(8,1) = 10 \left[\frac{1}{3} L^2 (0,3) \right]$$

$$81 = \frac{1}{3} L^2 (3)$$

$$L^2 = 81$$

$$L = \pm 9$$

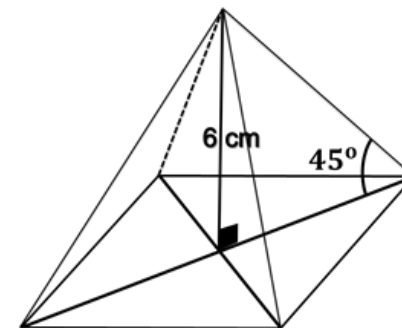
Consideramos longitud positiva:

$$L = 9$$

$\therefore$ La longitud de la arista de la base es 9 m.

RPTA: E

2. El juguete mostrado, está compuesto por dos pirámides de bases cuadrangulares regulares iguales a la figura mostrada. Calcular el volumen del juguete.



A. 144 cm^3

B. 288 cm^3

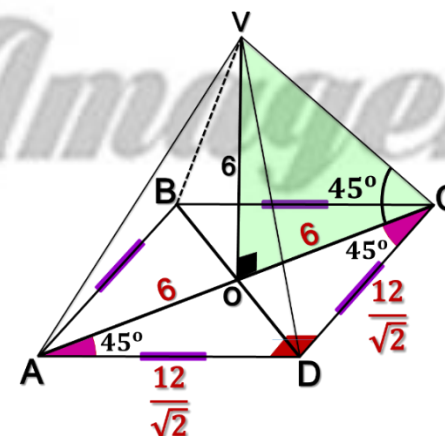
C. 260 cm^3

D. 165 cm^3

E. 153 cm^3

RESOLUCIÓN:

En el gráfico:



$\triangle VOC$: Notable de $45^\circ - 45^\circ$: $OC = 6 \text{ cm}$

$\triangle ADC$: Notable de $45^\circ - 45^\circ$: $AC = 12 \text{ cm}$

$$\therefore DC = AD = \frac{12}{\sqrt{2}} \text{ cm}$$

Calculamos el volumen de la pirámide V-ABCD:

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \left(\frac{12}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot 6$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \left(\frac{144}{2} \right) \cdot 6$$

$$V_{\text{pirámide}} = 144 \text{ cm}^3$$

Calculamos el volumen del juguete:

$$V_{\text{juguete}} = 2(144) = 288 \text{ cm}^3$$

$\therefore$ El volumen del juguete es 288 cm^3 .

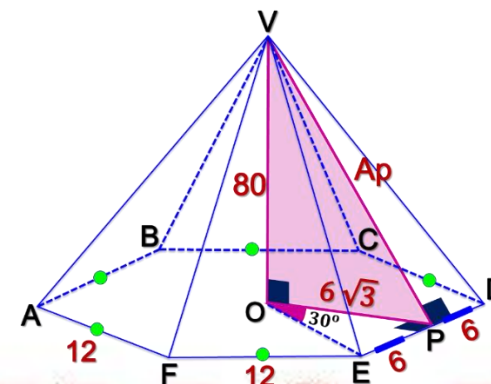
RPTA: B

3. Un contenedor para acopiar botellas de plástico tiene en la parte superior un techo en forma de pirámide la cual tiene 80 cm de altura y su base es un hexágono de 12 cm de lado. Si se quiere revestir con plástico impermeable la parte lateral de este techo, ¿cuál será la cantidad de plástico impermeable que se necesita?

- A. $36\sqrt{6503} \text{ cm}^2$
- B. $14\sqrt{6504} \text{ cm}^2$
- C. $12\sqrt{6505} \text{ cm}^2$
- D. $36\sqrt{6508} \text{ cm}^2$
- E. $28\sqrt{6506} \text{ cm}^2$

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



$\triangle OPE$: Notable de $30^\circ - 60^\circ$: $EP = 6 \text{ cm}$

$$\therefore OP = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Calculamos la apotema de la pirámide:

$\triangle VOP$: Teorema Pitágoras:

$$A_p^2 = 80^2 + (6\sqrt{3})^2$$

$$A_p = \sqrt{6400 + 108}$$

$$A_p = \sqrt{6508} \text{ cm}$$

Se sabe que:

$$A_L = \text{Semiperímetro} \cdot A_p$$

Reemplazamos datos:

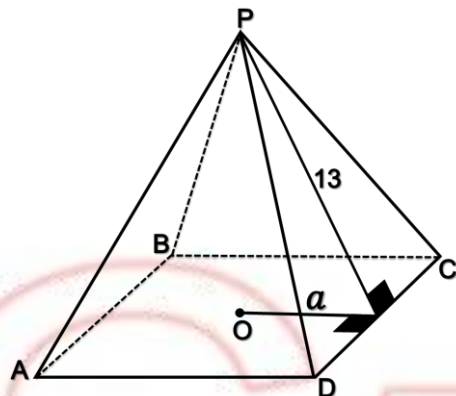
$$A_L = \frac{12(6)}{2} (\sqrt{6508})$$

$$A_L = 36\sqrt{6508} \text{ cm}^2$$

$\therefore$ La cantidad de plástico impermeable que se necesita es $36\sqrt{6508} \text{ cm}^2$.

RPTA: D

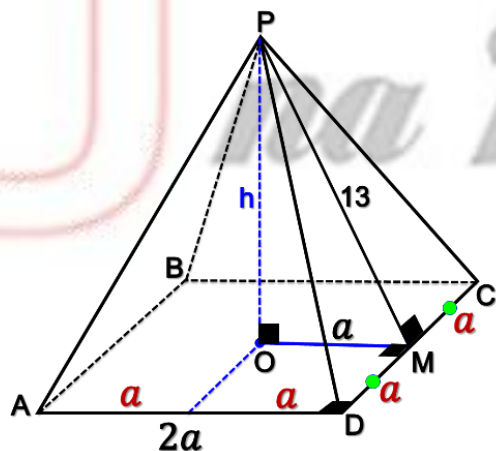
4. El Cristo del Pacífico, monumento de Chorrillos, mide " $7a$ " metros. Si el valor de " a " se encuentra en la figura de la pirámide regular de área total 360 m^2 , donde " O " es centro de la base (tal como se muestra en la figura). ¿Cuál es la altura del Cristo del Pacífico?



- A. 14 m
- B. 21 m
- C. 28 m
- D. 42 m
- E. 35 m

RESOLUCIÓN:

En el gráfico:



Por dato: $A_T = 360 \text{ m}^2$

Se sabe que:

$$A_T = A_L + A_B$$

Reemplazando:

$$360 = \frac{8a}{2}(13) + (2a)^2$$

$$360 = 4a(13) + 4a^2$$

Simplificamos:

$$90 = a(13) + a^2$$

$$a^2 + 13a - 90 = 0$$

Por aspa simple:

$$(a + 18)(a - 5) = 0$$

$$a = -18 \quad \vee \quad a = 5$$

Por ser longitud: $a > 0$

$$\therefore a = 5$$

Nos pide la altura del Cristo del Pacífico:

$$7a = 7(5) = 35 \text{ m}$$

$\therefore$ El cristo del Pacífico de Chorrillos mide 35 m

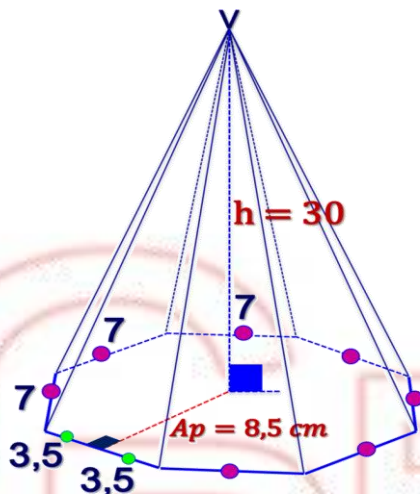
RPTA: E

5. Se van a elaborar 20 envases iguales de Tetra Pak, para jugos. Los envases tienen forma de pirámide regular octogonal, cuya arista de la base mide 7 cm, la apotema de la base es aproximadamente 8,5 cm y la altura es 30 cm. Si los envases se llenarán completamente, ¿cuántos mililitros de jugo se necesitará aproximadamente?

- A. 47 000 ml
- B. 47 600 ml
- C. 42 000 ml
- D. 66 340 ml
- E. 60 040 ml

RESOLUCIÓN:

Graficamos



Calculamos el área de la base

$$A_B = \text{Semiperímetro} \cdot A_p$$

Reemplazamos datos:

$$A_B = \frac{8(7)}{2} (8,5)$$

$$A_B = 238 \text{ cm}^2$$

Calculamos el volumen de la pirámide:

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} (238) 30$$

$$V_{\text{pirámide}} = 2380 \text{ cm}^3$$

La cantidad de jugo que se necesita para 20 envases:

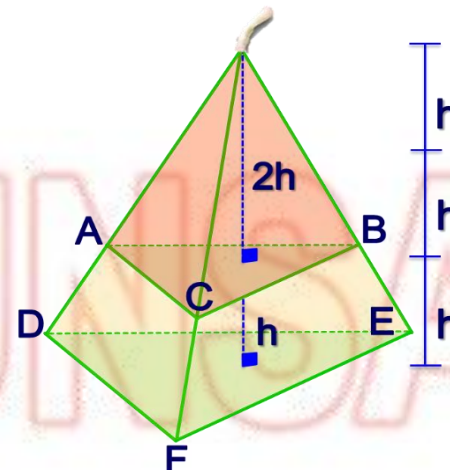
$$20 (2380) = 47600 \text{ cm}^3$$

Se sabe que: $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$

$$47600 \text{ cm}^3 = 47600 \text{ ml}$$

∴ Se necesitará 47600 ml de jugo.

6. Una vela de forma piramidal regular de volumen 432 cm^3 y altura $3h$, quedó dividida como se muestra en la figura, si las bases ABC y DEF son paralelas. Hallar la cantidad de cera que contiene el tronco de pirámide.



A. 300 cm^3

B. 304 cm^3

C. 340 cm^3

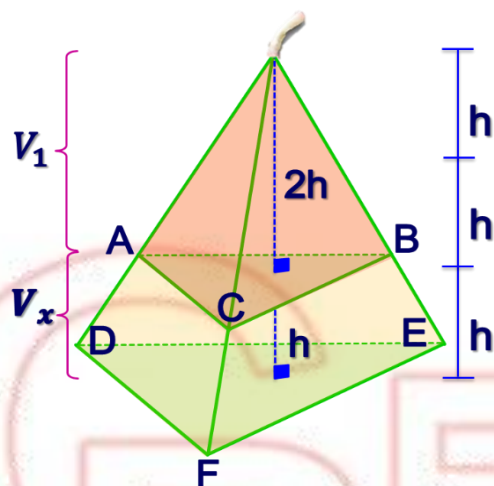
D. 280 cm^3

E. 120 cm^3

RESOLUCIÓN:

En la gráfica:

RPTA: B



Se observa pirámides semejantes.

Se cumple que:

$$\frac{V_1}{V_{\text{total}}} = \frac{h_1^3}{h_{\text{total}}^3}$$

Reemplazando datos:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{432} &= \frac{(2h)^3}{(3h)^3} \\ \frac{V_1}{432} &= \frac{8h^3}{27h^3} \\ V_1 &= \frac{8(432)}{27} \\ V_1 &= 128 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Se cumple:

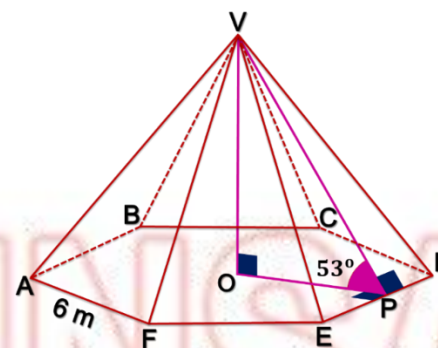
$$V_1 + V_x = V_{\text{total}}$$

Reemplazando V_1 :

$$\begin{aligned} 128 + V_x &= 432 \\ V_x &= 304 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$\therefore$ El tronco de pirámide contiene 304 cm^3 de cera.

7. Se va a elaborar una carpa para un circo de forma de pirámide hexagonal regular (como se muestra en la figura). Calcular la cantidad de lona para su elaboración.

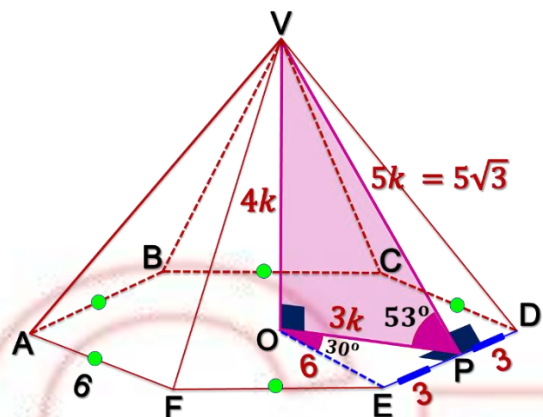


- A. $10\sqrt{3} \text{ m}^2$
- B. $20\sqrt{3} \text{ m}^2$
- C. $40\sqrt{3} \text{ m}^2$
- D. $\sqrt{3} \text{ m}^2$
- E. $90\sqrt{3} \text{ m}^2$

RESOLUCIÓN:

De la gráfica:

RPTA: B



$\triangle OPE$: Notable de $30^\circ - 60^\circ$:

$$\begin{aligned} EP &= 3 \\ OP &= 3\sqrt{3} \\ OE &= 6 \end{aligned}$$

$\triangle VOP$: Notable de $37^\circ - 53^\circ$:

$$\begin{aligned} 3k &= 3\sqrt{3} \\ k &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

La apotema de la pirámide:

$$\begin{aligned} A_p &= 5k \\ A_p &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Se sabe que:

$$A_L = \text{Semiperímetro} \cdot A_p$$

Reemplazamos datos:

$$A_L = \frac{6(6)}{2} (5\sqrt{3})$$

$$A_L = 18(5\sqrt{3})$$

$$A_L = 90\sqrt{3} \text{ m}^2$$

$\therefore$ la cantidad de lona necesaria es de $90\sqrt{3} \text{ m}^2$.

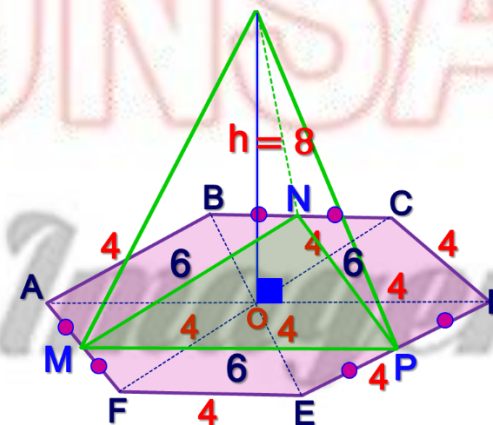
RPTA: E

8. La base de una pirámide regular, es un triángulo formado al unir los puntos medios de tres lados no consecutivos de un hexágono regular de lado 4 cm . Calcular el volumen de la pirámide, sabiendo que, su altura es el doble del lado del hexágono.

- A. $24\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- B. $12\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- C. $36\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- D. $15\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- E. $10\sqrt{3} \text{ cm}^3$

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



El hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros.

$$\therefore FC = 8$$

$\overline{MN}$: Base media en el trapecio $ABCF$:

$$\begin{aligned} MN &= \frac{AB + FC}{2} \\ MN &= \frac{4 + 8}{2} \\ MN &= 6 \end{aligned}$$

Calculamos el volumen de la pirámide:

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \left(\frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \right) h$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \left(\frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \right) (8)$$

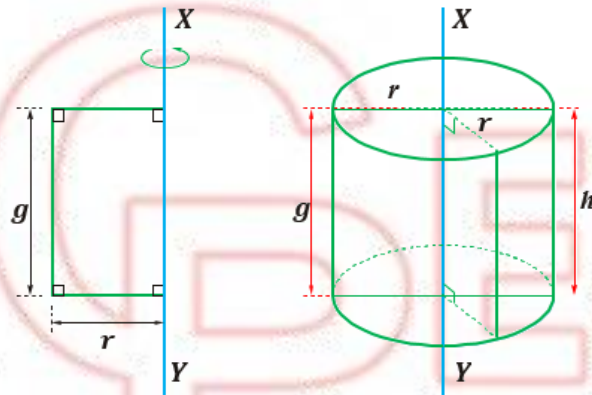
$$V_{\text{pirámide}} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

RPTA: A

9.6 SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

9.6.1 CILINDRO RECTO

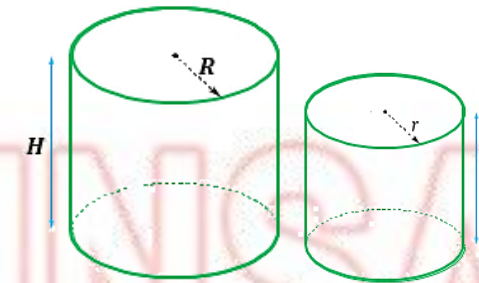
Se genera al girar una región rectangular, una vuelta, alrededor de un eje que contiene a un lado. Las bases son círculos y la altura mide igual que la generatriz. Es también llamado cilindro circular recto.



$$A_T = 2\pi r(r + g)$$

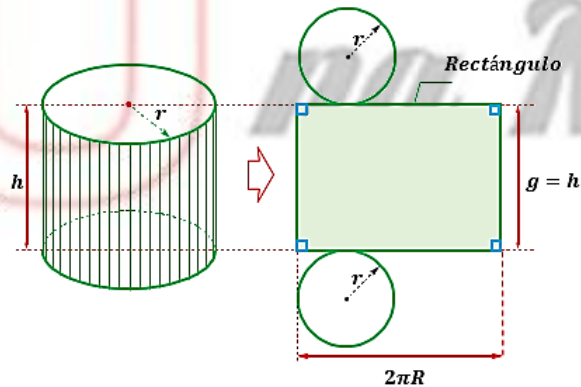
$$V = \pi r^2 h$$

En cilindros semejantes se cumple:



$$\frac{A_T}{A_t} = \frac{A_L}{A_l} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{R^2}{r^2}$$

Desarrollo de la superficie total de un cilindro recto:

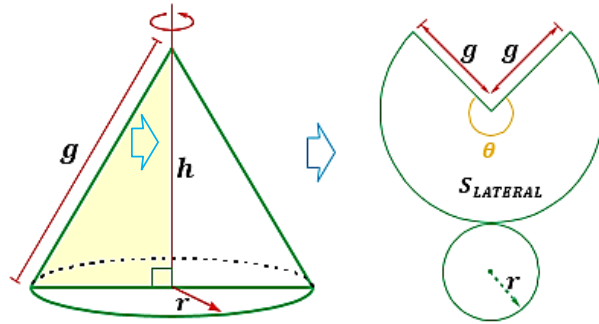


$$A_L = 2\pi r g$$

9.6.2 CONO RECTO

Es el sólido generado por la rotación de un triángulo rectángulo cuando gira alrededor de uno de sus catetos, tomado como eje. El cateto eje es la altura del cono, el otro cateto es el radio de la base y la hipotenusa es la generatriz del cono.

Desarrollo de su superficie

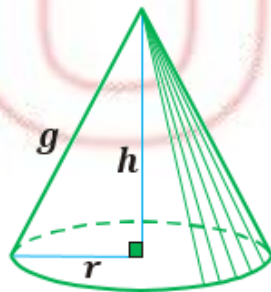


$$A_L = \pi r g$$

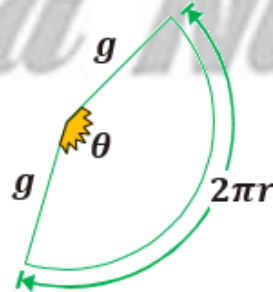
$$A_T = \pi r(r + g)$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Ángulo del desarrollo del cono recto:

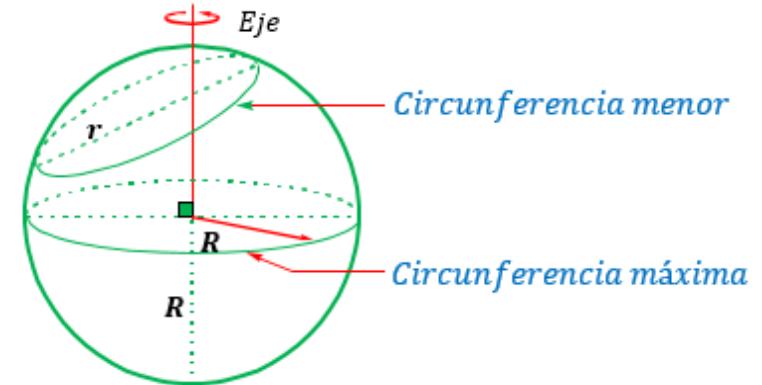


$$\theta = \frac{2\pi r}{g}$$



9.6.3 ESFERA

Es el sólido generado por la rotación de una semicircunferencia alrededor de su diámetro.



$$S_e = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

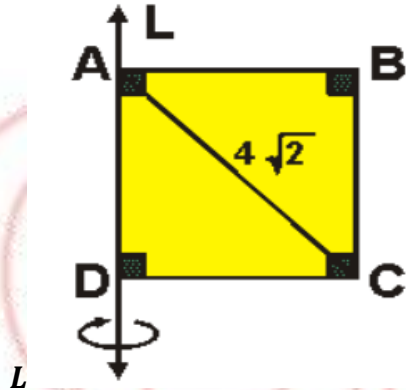
Donde:

S_e :superficie esférica

V :volumen

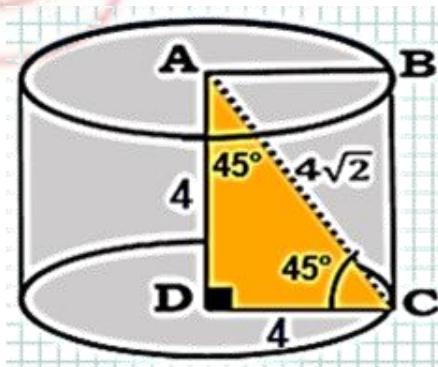
PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular el volumen del sólido geométrico que se genera cuando el cuadrado de la figura gira 360° alrededor del eje



- A. $64\pi u^3$
B. $32\pi u^3$
C. $12\pi u^3$
D. $16\pi u^3$
E. $2\pi u^3$

RESOLUCIÓN:



El sólido que se genera es un cilindro de revolución.

El triángulo rectángulo ADC, es notable $45^\circ - 45^\circ$ por lo tanto la altura y el radio miden $4u$.

Luego calculamos el volumen del cilindro:

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi 4^2 (4)$$

$$V = \pi 16 (4)$$

$$V = 64\pi u^3$$

RPTA: A

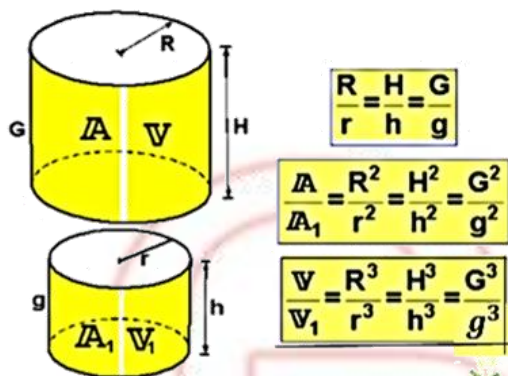
2. Se tienen dos cilindros de revolución semejantes, cuyos volúmenes están en relación de 64 a 216 . ¿Cuál es el radio del cilindro más grande, si el radio del pequeño es de 4 cm ?

- A. 3 cm
B. 6 cm
C. 12 cm
D. 4 cm
E. 2 cm

RESOLUCIÓN:

Aplicando semejanza de cilindros:

CILINDROS SEMEJANTES



Reemplazando, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{64}{216} &= \frac{4^3}{x^3} \\ \frac{64}{216} &= \frac{64}{x^3} \\ 64x^3 &= 216(64) \\ x^3 &= 216 \\ x &= \sqrt[3]{216} \\ x &= 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

RPTA: B

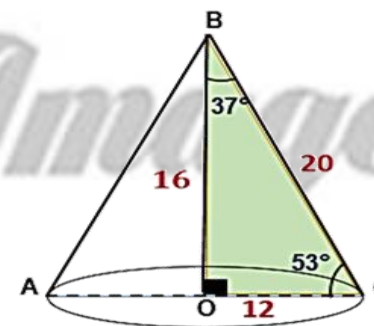
3. Bárbara y Astrid confeccionarán 6 gorritos en forma de cono circular recto para el cumpleaños de su hermanito, cada una con las siguientes medidas: altura 16 cm y diámetro 24 cm. ¿Qué cantidad de papel tienen que comprar para la confección?.



- A. $2\,400\pi \text{ cm}^2$
- B. $440\pi \text{ cm}^2$
- C. $840\pi \text{ cm}^2$
- D. $1\,240\pi \text{ cm}^2$
- E. $1\,440\pi \text{ cm}^2$

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:



El triángulo rectángulo BOC es notable $37^\circ - 53^\circ$, por lo tanto, la generatriz del cono es de 20 cm.

Entonces, para saber la cantidad de papel decorativo que se tiene que comprar, se calculará el área lateral del cono:

$$A_L = \pi r g$$

$$A_L = \pi(12)(20)$$

$$A_L = 240\pi \text{ cm}^2$$

Finalmente tendrá que comprar:

$$240\pi \text{ cm}^2(6) = 1440\pi \text{ cm}^2$$

RPTA: E

4. Hallar el volumen de un cono circular recto, si las medidas de su altura y generatriz están en una relación de 4 a 5 respectivamente, además, el área total de dicho cono es $216\pi \text{ m}^2$.

A. $324\pi \text{ m}^3$

B. $256\pi \text{ m}^3$

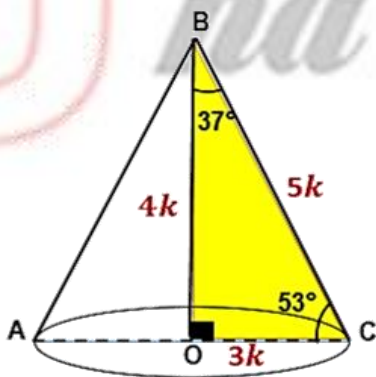
C. $360\pi \text{ m}^3$

D. $144\pi \text{ m}^3$

E. $590\pi \text{ m}^3$

RESOLUCIÓN:

Graficamos el cono y completamos los datos proporcionados por el problema:



Por dato:

$$A_T = 216\pi$$

$$A_T = \pi r(r + g)$$

$$216\pi = \pi(3k)(3k + 5k)$$

$$216\pi = \pi 24k^2$$

$$k = 3$$

Calculando el volumen:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi(9)^2 12}{3}$$

$$V = 324\pi \text{ m}^3$$

RPTA: A

5. En un cilindro circular recto de 6 dm de radio, que contiene suficiente agua, se introduce una esfera de plomo de 3 dm de radio. ¿En cuánto sube el nivel del agua en el cilindro?

A. 2 dm

B. 5 dm

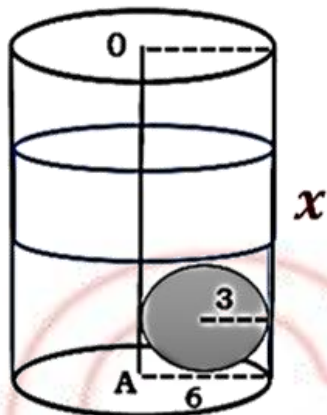
C. 3 dm

D. 4 dm

E. 1 dm

RESOLUCIÓN:

Graficamos la situación planteada:



Calculamos el volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(3)^3$$

$$V = 36\pi \text{ dm}^3$$

El volumen del agua que se incrementó en el cilindro es igual al volumen de la esfera (V_e) que se introdujo, entonces:

$$V_e = V_{\text{cilindro incrementado}}$$

$$36\pi = \pi 6^2 x$$

$$36\pi = 36\pi x$$

$$x = 1 \text{ dm}$$

El nivel del agua sube 1 dm.

RPTA: E

6. La superficie de un tanque esférico para almacenar gas licuado tiene como área $144\pi \text{ m}^2$. ¿Cuál será su capacidad de almacenamiento?

A. $288\pi \text{ m}^3$

B. $218\pi \text{ m}^3$

C. $50\pi \text{ m}^3$

D. $144\pi \text{ m}^3$

E. $38\pi \text{ m}^3$

RESOLUCIÓN:

Por dato el área de la superficie esférica:

$$A = 4\pi r^2$$

$$144\pi = 4\pi r^2$$

$$36 = r^2$$

$$6 = r$$

Calculamos el volumen del tanque:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

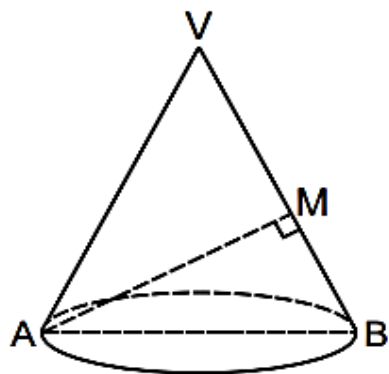
$$V = \frac{4}{3}\pi(6)^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(216)$$

$$V = 288\pi \text{ m}^3$$

RPTA: A

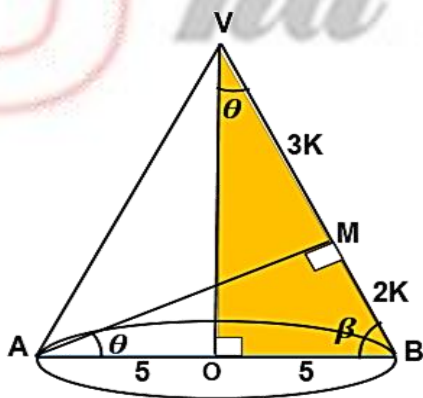
7. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro, $3MB = 2VM$ y $AB = 10 \text{ m}$. Hallar el área lateral del cono de revolución.



- A. $20\sqrt{5}\pi \text{ m}^2$
- B. $25\sqrt{3}\pi \text{ m}^2$
- C. $40\sqrt{5}\pi \text{ m}^2$
- D. $30\sqrt{5}\pi \text{ m}^2$
- E. $25\sqrt{5}\pi \text{ m}^2$

RESOLUCIÓN:

Completamos la gráfica con los datos proporcionados por el problema:



Por dato:

$$3MB = 2VM$$

$$\frac{MB}{VM} = \frac{2k}{3k}$$

Aplicamos semejanza de triángulos:

$$\frac{5k}{5} = \frac{10}{2k}$$

$$10k^2 = 50$$

$$k^2 = 5$$

$$k = \sqrt{5}$$

Luego, calculamos el área lateral del cono

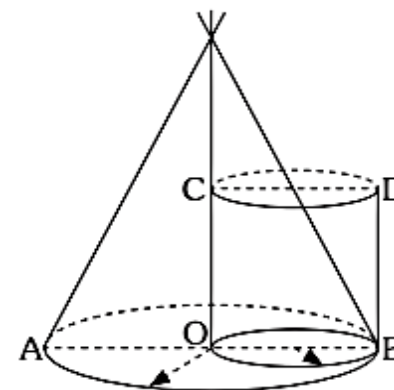
$$A_L = \pi r g$$

$$A_L = \pi(5)(5\sqrt{5})$$

$$A_L = 25\sqrt{5}\pi \text{ m}^2$$

RPTA: E

8. En el gráfico se muestra un cono circular recto y un cilindro de revolución, tal que, $AC = 2CO$ y el área de la superficie lateral del cono es cuatro veces el área de la superficie lateral del cilindro. Calcular la razón de sus volúmenes.



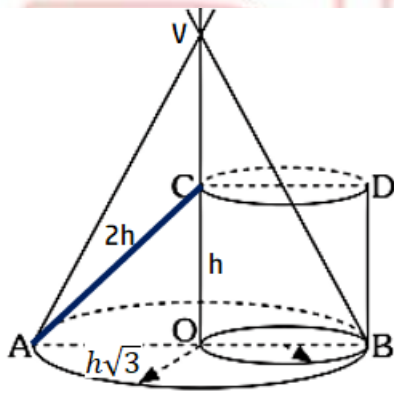
A. $\frac{5}{3}\sqrt{13}$

- B. $\frac{1}{3}\sqrt{13}$
 C. $\frac{\sqrt{13}}{3}$
 D. $\frac{7}{3}\sqrt{13}$
 E. $\frac{4}{3}\sqrt{13}$

RESOLUCIÓN:

Por dato: $AC = 2CO$

Entonces:



$$AC = 2h$$

$$\text{Luego } A_{L \text{ cono}} = 4A_{L \text{ cilindro}}$$

$$\pi(h\sqrt{3})g = 4 \left[2\pi \left(\frac{h\sqrt{3}}{2} \right) h \right]$$

$$hg\sqrt{3} = 4\sqrt{3}h^2$$

$$g = 4h$$

Calculamos la altura del cono con Pitágoras, en el triángulo rectángulo

VOB:

$$H^2 = (4h)^2 - (h\sqrt{3})^2$$

$$H^2 = 13h^2$$

$$H = h\sqrt{13}$$

Calculamos la razón de los volúmenes:

$$\text{Razón} = \frac{\frac{\pi R^2 H}{3}}{\pi r^2 h}$$

$$\text{Razón} = \frac{\frac{\pi(h\sqrt{3})^2(h\sqrt{13})}{3}}{\pi\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}\right)^2 h}$$

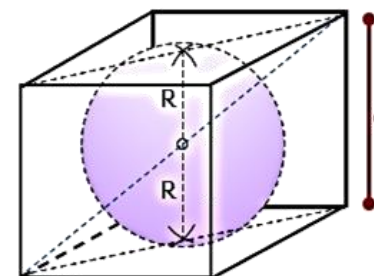
$$\text{Razón} = \frac{\pi h^3 \sqrt{13}}{\frac{\pi 3h^3}{4}}$$

$$\text{Razón} = \frac{4}{3}\sqrt{13}$$

RPTA: E

9.7 SÓLIDOS COMPUESTOS

Los sólidos compuestos son figuras tridimensionales formadas por la combinación de dos o más sólidos básicos, como prismas, cilindros, conos, esferas y pirámides. Estos sólidos pueden estar unidos de diversas maneras, ya sea intersectándose, adyacentes o combinados de otras formas. El análisis de sólidos compuestos a menudo implica descomponer la figura en sus componentes más simples para calcular propiedades como el volumen y el área de superficie.



Observamos en el gráfico que:

$$a = 2R$$

$$6 = 2R$$

$$3 = R$$

Finalmente, el volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(3)^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi 27$$

$$V = 36\pi m^3$$

RPTA. D

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. La arista de un cubo es $6m$. Calcular el volumen de la esfera inscrita en el cubo

- A. $18\pi m^3$
- B. $17\pi m^3$
- C. $24\pi m^3$
- D. $36\pi m^3$
- E. $27\pi m^2$

RESOLUCIÓN:

Una esfera está inscrita en un cubo cuando es tangente a las 6 caras del cubo, por lo cual graficamos.

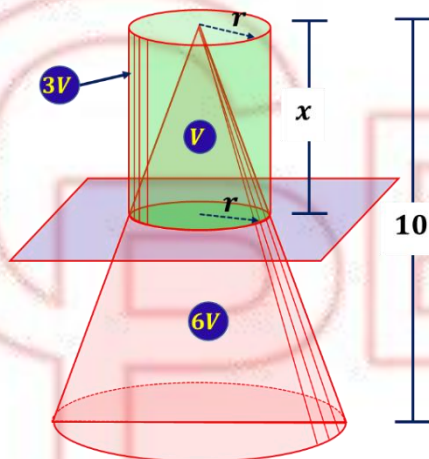
2. Se tiene un cono circular recto, cuya altura mide 10 cm , a éste se traza un plano secante y paralelo a la base. Sobre la sección determinada se construye un cilindro recto cuya base superior pasa por el vértice del cono. Calcular la altura del cilindro para que su volumen sea la mitad del volumen del tronco del cono.

- A. $\frac{7}{10} \sqrt[3]{49}\text{ cm}$
- B. $\frac{10}{7} \sqrt[3]{7}\text{ cm}$

- C. $\frac{1}{3} \sqrt[3]{49} \text{ cm}$
 D. $\sqrt[3]{4} \text{ cm}$
 E. $\frac{10}{7} \sqrt[3]{49} \text{ cm}$

RESOLUCIÓN:

Graficamos y asumimos que el volumen del cono es $6V$



Para el volumen del cilindro recto:

$$3V = \pi \cdot r^2 \cdot x$$

Para el cono parcial de radio "r":

$$V_{\text{cono parcial}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot x$$

$$V_{\text{cono parcial}} = \frac{1}{3} (3V)$$

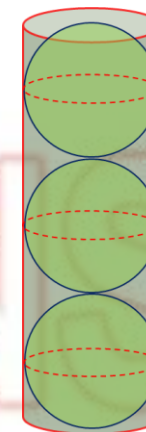
$$V_{\text{cono parcial}} = V$$

Ahora por semejanza de conos:

$$\frac{V}{7V} = \frac{x^3}{10^3}$$

$$x = \frac{10}{7} \sqrt[3]{49} \text{ cm}$$

3. Las pelotas de tenis se envasan en frascos cilíndricos, cada pelota tiene una superficie de $36\pi \text{ cm}^2$ y el material para la superficie lateral de los frascos tiene un costo de un dólar por cm^2 , ¿Cuál será el costo del material para la superficie lateral de los frascos si se quiere envasar 120 pelotas? ($\pi = 3, 1$) (Ceprunsa II Fase 2017)



- A. 13 392 dólares
 B. 15 392 dólares
 C. 14 392 dólares
 D. 13 429 dólares
 E. 12 729 dólares

RESOLUCIÓN:

Superficie de la pelota:

$$A = 4\pi \cdot R^2$$

$$36\pi = 4\pi \cdot R^2$$

$$9 = R^2$$

$$R = 3 \text{ cm}$$

Entonces: Altura del cilindro: $h = 18 \text{ cm}$

Encontramos la superficie lateral del cilindro:

$$A_L = 2\pi r g$$

$$A_L = 2(3,1)(3)(18)$$

RPTA. E

$$A_L = 334,8 \text{ cm}^2$$

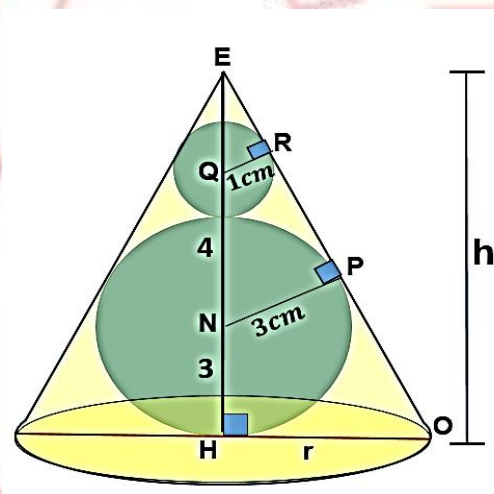
Costo en 120 pelotas, se necesitarán 40 cilindros:

$$A = 334,8(40) = 13392 \text{ cm}^2$$

$$\text{Costo} = 13\,392 \text{ dólares}$$

RPTA: A

4. En la figura se tienen dos esferas tangentes exteriormente, cuyos radios miden 1 cm y 3 cm . El volumen del cono recto circunscrito a ambas esferas es:



- A. $12\pi \text{ cm}^3$
- B. $6\pi \text{ cm}^3$
- C. $10\pi \text{ cm}^3$
- D. $81\pi \text{ cm}^3$
- E. $11\pi \text{ cm}^3$

RESOLUCIÓN:

En la figura podemos observar que:

$$\triangle ERQ \sim \triangle EPN$$

$$\frac{EQ}{EN} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{h-7}{h-3} = \frac{1}{3}$$

$$3h - 21 = h - 3$$

$$3h - h = 21 - 3$$

$$h = 9$$

En el triángulo ERQ: $EQ = 2\text{ cm}$ y $ER = \sqrt{3}\text{ cm}$

Luego: $\triangle ERQ \sim \triangle EHO$

$$\frac{r}{1} = \frac{9}{\sqrt{3}}$$

$$r = 3\sqrt{3}$$

Finalmente calculamos el volumen del cono

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi (3\sqrt{3})^2 9$$

$$V = 81\pi \text{ cm}^3$$

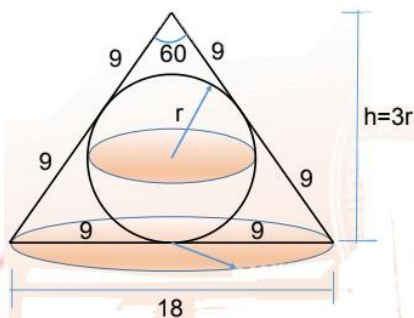
RPTA: D

5. Se inscribe una esfera en un cono de revolución, dos generatrices opuestas determinan un ángulo de 60° y el diámetro de la base es 18 u . Calcule el volumen de la esfera (en u^3).

- A. $52\pi\sqrt{3}$
- B. $58\pi\sqrt{3}$
- C. $72\pi\sqrt{3}$
- D. $98\pi\sqrt{3}$
- E. $108\pi\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

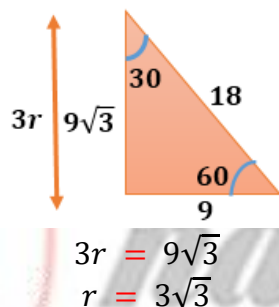
Graficando tenemos:



Tenemos el:

$$V_e = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Del dato de la altura del cono obtenemos el radio de la esfera, usando triángulos notables de 30 y 60.



Reemplazando el radio obtenido en la esfera tenemos:

$$V_e = \frac{4\pi(3\sqrt{3})^3}{3}$$

$$V_e = \frac{4\pi(27(\sqrt{3})(\sqrt{3})(\sqrt{3}))}{3}$$

$$V_e = \frac{4\pi(27(3)(\sqrt{3}))}{3}$$

$$V_e = 4\pi(27(\sqrt{3}))$$

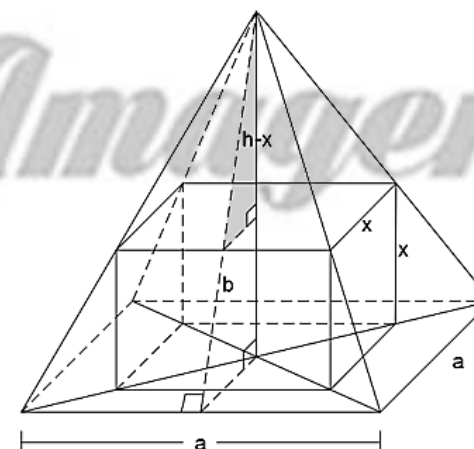
$$V_e = 108\sqrt{3}\pi$$

6. Un hexaedro regular se encuentra inscrito en una pirámide cuadrangular regular, de modo que una cara del hexaedro está contenida en la base de la pirámide y los vértices correspondientes a la cara opuesta están en las aristas laterales de dicha pirámide. Si la altura de la pirámide mide $\sqrt{21 + 12\sqrt{3}}$ cm y el área de la superficie lateral es el doble del área de la base en dicha pirámide. Calcular la longitud de la arista del hexaedro.

- A. $\sqrt{3}$
- B. $2\sqrt{3}$
- C. $3\sqrt{3}$
- D. $4\sqrt{3}$
- E. $5\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

Representamos gráficamente:



$$h = \sqrt{21 + 12\sqrt{3}}; S_L = 2S_B$$

RPTA: E

$$4 \frac{ab}{2} = 2a^2 \rightarrow a = b$$

Por semejanza:

$$\frac{h-x}{h} = \frac{x}{a} \quad \dots (1)$$

Por Pitágoras:

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} \quad \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{h-x}{h} = \frac{x}{\frac{2h}{\sqrt{3}}} \rightarrow 2h - 2x = x\sqrt{3}$$

$$2h = x(2 + \sqrt{3}) \rightarrow 4h^2 = x^2(7 + 4\sqrt{3})$$

Reemplazando el valor de h:

$$4(21 + 12\sqrt{3}) = x^2(7 + 4\sqrt{3})$$

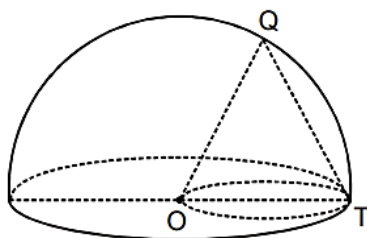
$$4(3)(7 + 4\sqrt{3}) = x^2(7 + 4\sqrt{3})$$

$$x^2 = 4(3)$$

$$\therefore x = 2\sqrt{3}$$

RPTA: B

7. En la figura adjunta, "O" es centro de la semiesfera y "T" y "Q" son puntos de tangencia. Si el área lateral del cono es $18\pi \text{ cm}^2$, hallar el volumen de la semiesfera.



A. $148\pi \text{ cm}^3$

B. $144\pi \text{ cm}^3$

C. $169\pi \text{ cm}^3$

D. $164\pi \text{ cm}^3$

E. $664\pi \text{ cm}^3$

RESOLUCIÓN:

Observando la figura deducimos que es un cono equilátero por lo tanto hallamos el radio, si tenemos el área lateral,

$$AL = \pi r g$$

$$18\pi = \pi r (2r)$$

$$9 = r^2$$

$$3 = r$$

Calculando el volumen de la semiesfera:

$$V_{se} = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$V_{se} = \frac{2}{3} \pi (6)^3$$

$$V_{se} = \frac{432}{3} \pi$$

$$V_{se} = 144\pi \text{ cm}^3$$

RPTA: B

CAPÍTULO X

TRIGONOMETRÍA

La trigonometría, rama esencial de las matemáticas, explora las relaciones entre ángulos y lados de los triángulos. Utilizando funciones como seno, coseno y tangente, proporciona herramientas cruciales para resolver problemas en diversas disciplinas, desde la física hasta la ingeniería. Su comprensión es fundamental para el avance en estudios científicos y tecnológicos.



10 TRIGONOMETRÍA

10.1 LEY DE SENOS Y COSENOS

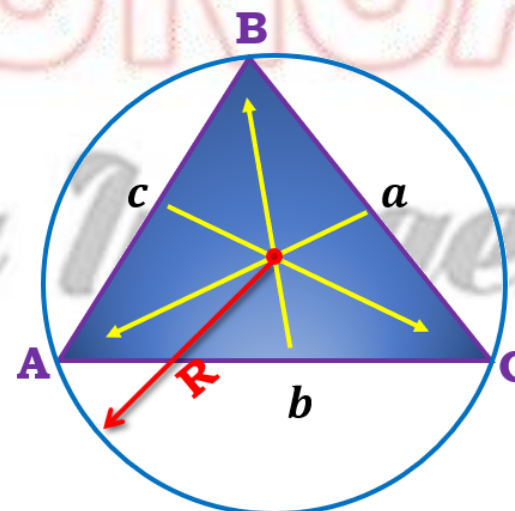
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

MEDIDAS DE LADOS DEL TRIÁNGULO: a, b y c

VÉRTICES DEL TRIÁNGULO: A, B y C

LEY DE SENOS

En todo triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

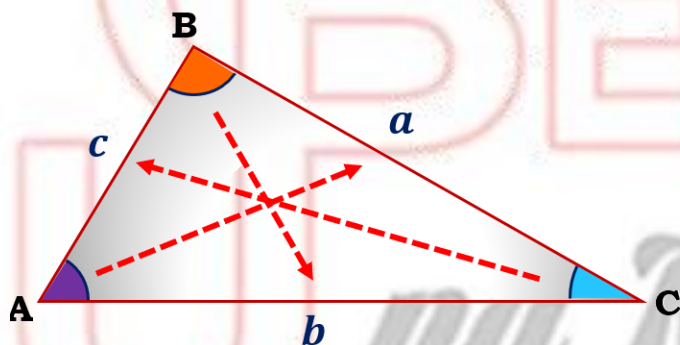
$$a = 2R \operatorname{sen} A$$

$$b = 2R \operatorname{sen} B$$

$$c = 2R \operatorname{sen} C$$

LEY DE COSENOS

Se cumple para todo triángulo agudo y obtuso. El cuadrado de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble de su producto por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. En un $\triangle ABC$, se cumple: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, además $(a + b + c)(a + b - c) = \frac{7ab}{3}$, determinar el valor de " $\cos C$ "

- A. $1/2$
- B. $1/3$
- C. $1/4$
- D. $1/6$
- E. $1/8$

RESOLUCIÓN:

Como

$$(a + b + c)(a + b - c) = \frac{7ab}{3}$$

Por diferencia de cuadrados:

$$(a + b)^2 - c^2 = \frac{7ab}{3}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = \frac{7}{3}ab - 2ab$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = \frac{1}{3}ab \dots (I)$$

Por la ley de cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C \dots (II)$$

De (I) y (II):

$$2ab \cos C = \frac{1}{3}ab$$

$$\cos C = \frac{1}{6}$$

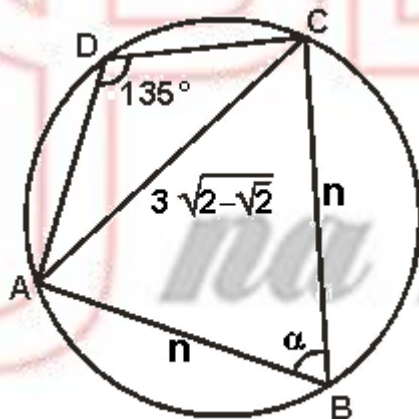
RPTA: D

2. Un cuadrilátero, inscrito en una circunferencia, tiene dos lados consecutivos iguales. La diagonal que une los extremos de los lados iguales miden $3\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; el ángulo opuesto, en el cuadrilátero, al ángulo comprendido entre dichos lados iguales, miden 135° ¿Cuánto miden los lados iguales?

- A. 3
B. 4
C. 5
D. 7
E. 1

RESOLUCIÓN:

Elaboramos el gráfico:



Observe que $\alpha = 45^\circ$

Aplicamos ley de cosenos en $\triangle ABC$:

$$n^2 + n^2 - 2(n)(n)\cos 45^\circ = (3\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2$$

$$2n^2 - 2n^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 9(2 - \sqrt{2})$$

$$n^2(2 - \sqrt{2}) = 9(2 - \sqrt{2})$$

$$n^2 = 9$$

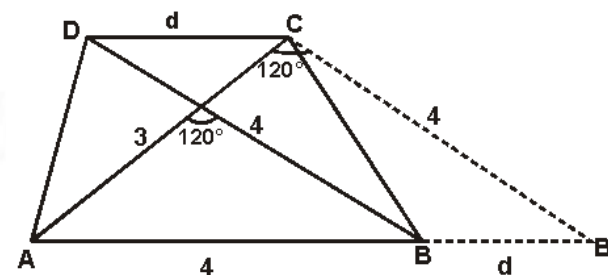
$$n = 3$$

RPTA: A

3. En un trapezio ABCD, la base mayor AB mide 4m, las diagonales AC y BD miden 3m y 4m respectivamente, el ángulo obtuso formado por las diagonales mide 120° . Hallar la medida de la base menor CD (en m).

- A. 18 m
B. $(2\sqrt{3} + 4)\text{ m}$
C. $(\sqrt{37} - 4)\text{ m}$
D. $(\sqrt{72} - 3)\text{ m}$
E. $(\sqrt{3} + 11)\text{ m}$

RESOLUCIÓN:



Se traza: $CB' \parallel DB$

Aplicamos la ley de cosenos $\triangle ACB'$:

$$(4 + d)^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos 120^\circ$$

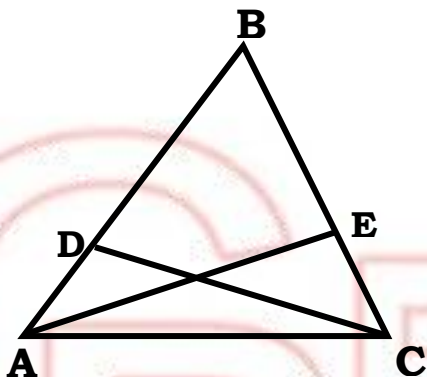
$$(4 + d)^2 = 25 - 24\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(4 + d)^2 = 37$$

$$d = (\sqrt{37} - 4)\text{ m}$$

RPTA: C

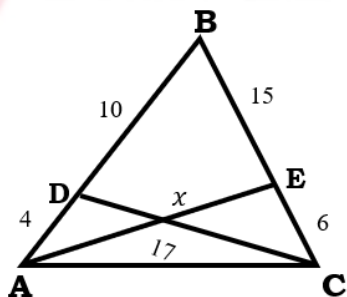
4. En el siguiente gráfico, $AD = 4$, $BD = 10$, $BE = 15$, $EC = 6$ y $CD = 17$. Calcular AE



- A. 13
B. 7
C. 8
D. 9
E. 10

RESOLUCIÓN:

Ubicando los datos



Por ley de los cosenos en el triángulo BCD:

$$\begin{aligned} 17^2 &= 10^2 + 21^2 - 2(10)(21) \cos B \\ 289 &= 100 + 441 - 420 \cos B \\ \cos B &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Por ley de los cosenos en el triángulo BCD:

$$\begin{aligned} x^2 &= 14^2 + 15^2 - 2(14)(15) \cos B \\ x^2 &= 196 + 225 - 420 \left(\frac{3}{5}\right) \\ x &= 13 \end{aligned}$$

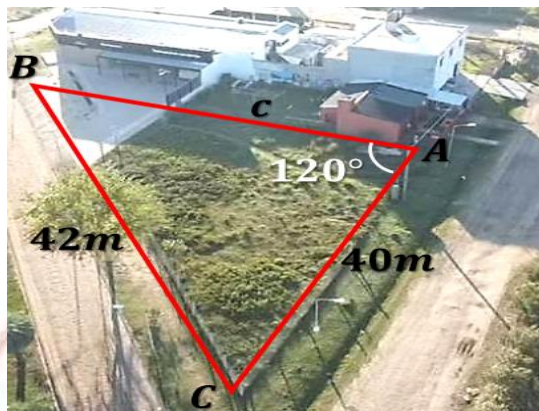
RPTA: A

5. Una casa tiene un patio en forma triangular y el dueño quiere ponerle grama, por lo que necesita calcular el área del patio para comprar la grama. Dos de los lados del patio miden 40 y 42 m, y el ángulo opuesto al lado que mide 42 m es de 120° . ¿Cuántos m^2 debe comprar de grama aproximadamente? Considerar $\sqrt{141} = 11,9$ y $\sin 120^\circ = 0,87$

- A. $62,7m^2$
B. $64,9m^2$
C. $64,7m^2$
D. $62,9m^2$
E. $66,12m^2$

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Por la ley de cosenos:

$$42^2 = c^2 + 40^2 - 2(c)(40)\cos 120^\circ$$

$$c^2 + 40c - 164 = 0$$

$$c = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 + 4(164)}}{2}$$

$$c = -20 \pm 2\sqrt{141}$$

Por lo tanto:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}(40)(-20 + 2\sqrt{141})\sin 120^\circ$$

$$A_{ABC} = 66,12m^2$$

RPTA: E

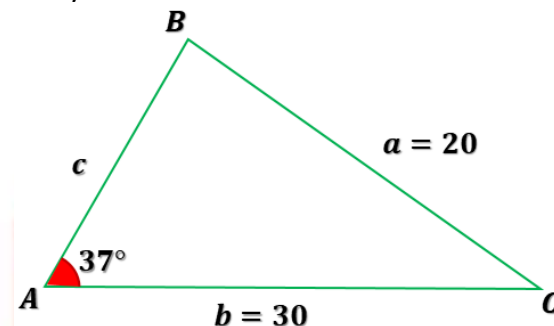
6. En un $\triangle ABC$, se cumple que: $BC = 20, AC = 30$ y $m\angle A = 37^\circ$.
Determinar $\cos 2B$

- A. $\frac{13}{100}$
 B. $-\frac{31}{50}$
 C. $\frac{81}{50}$
 D. $\frac{17}{100}$

E. $\frac{19}{100}$

RESOLUCIÓN:

Sabemos por la ley de senos:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{20}{\sin 37^\circ} = \frac{30}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{3}{2} \sin 37^\circ$$

$$\sin B = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{10} \dots (I)$$

También sabemos:

$$\cos 2B = 1 - 2\sin^2 B \dots (II)$$

Reemplazamos (I) en (II)

$$\cos 2B = 1 - 2\left(\frac{9}{10}\right)^2$$

$$\cos 2B = 1 - 2 \cdot \frac{81}{100}$$

$$\cos 2B = -\frac{31}{50}$$

RPTA: B

7. ¿En qué tipo de triángulo ABC , de lados $BC = a, AC = b, AB = c$, se cumple que:

$$\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}?$$

- A. Isósceles
B. Rectángulo
C. Obtusángulo
D. Acutángulo
E. Equilátero

RESOLUCIÓN:

Tenemos:

$$\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$$

Por la ley de senos tenemos:

$$\begin{aligned} a &= 2R \operatorname{sen} A \\ b &= 2R \operatorname{sen} B \\ c &= 2R \operatorname{sen} C \end{aligned}$$

Reemplazamos:

$$\frac{2R \operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{2R \operatorname{sen} B}{\cos B} = \frac{2R \operatorname{sen} C}{\cos C}$$

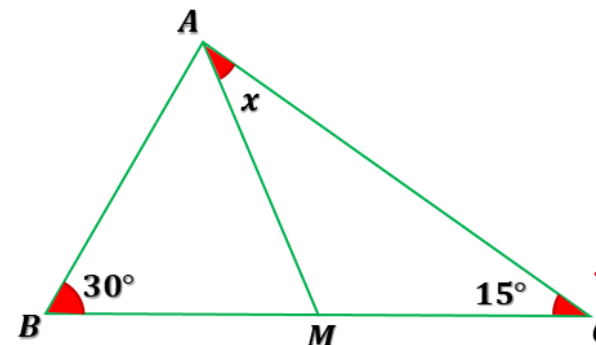
$$\tan A = \tan B = \tan C$$

Por lo tanto:

El triángulo es equilátero.

RPTA: E

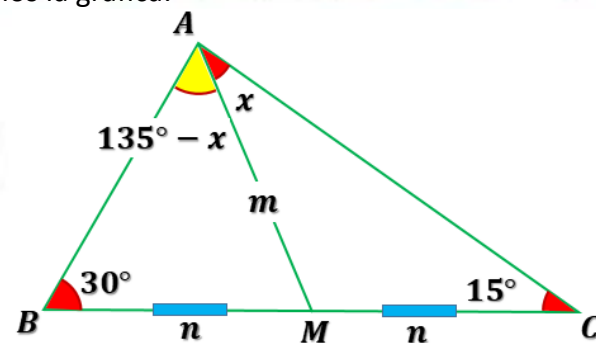
8. Al resolver el siguiente triángulo donde $\overline{AM}$ es mediana; la medida del ángulo "x" es:



- A. 15°
B. 30°
C. 45°
D. 75°
E. 60°

RESOLUCIÓN:

Completamos la gráfica:



En el $\triangle ABM$ aplicamos la ley de senos:

$$\frac{m}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{n}{\operatorname{sen}(135^\circ - x)}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen}(45^\circ + x)}$$

$\triangle AMC$ aplicamos la ley de senos:

$$\frac{m}{\operatorname{sen} 15^{\circ}} = \frac{n}{\operatorname{sen} x} \dots (I)$$

Por lo tanto:

$$\frac{m}{n} = \frac{\operatorname{sen} 15^{\circ}}{\operatorname{sen} x} \dots (II)$$

Igualemos (I) y (II):

$$\frac{\operatorname{sen} 30^{\circ}}{\operatorname{sen}(45^{\circ} + x)} = \frac{\operatorname{sen} 15^{\circ}}{\operatorname{sen} x}$$
$$\frac{\operatorname{sen}(45^{\circ} + x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} 30^{\circ}}{\operatorname{sen} 15^{\circ}}$$

Desarrollando el $\operatorname{sen}(45^{\circ} + x)$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)$$

$$\operatorname{ctg} x + 1 = \sqrt{3} + 1$$

$$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$$

$$\therefore x = 30^{\circ}$$

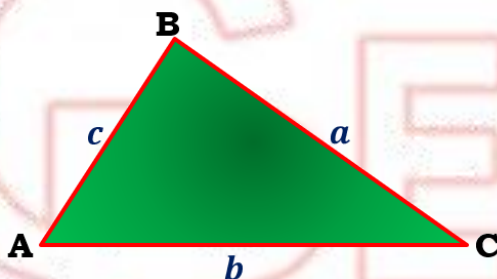
RPTA: B

na Nueva Imagen

10.2 LEY DE TANGENTES

LEY DE LAS TANGENTES

Se cumple que la suma de dos lados es a su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos que se oponen a dichos lados es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.



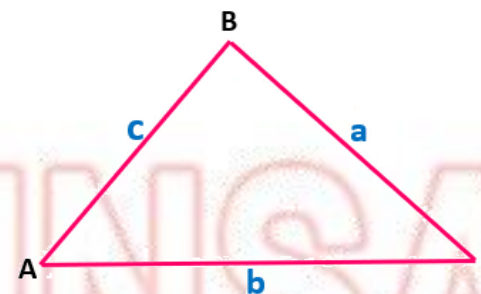
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{C+A}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{C-A}{2}\right)}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. En el triángulo de las Bermudas se denota los vertices ABC , además se cumple $a = 3b$, $\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Hallar: $\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}$.



- A. $\frac{1}{7}$
 B. $\frac{2}{5}$
 C. $\frac{3}{7}$
 D. $\frac{5}{7}$
 E. $\frac{5}{7}$

RESOLUCIÓN:

Por ley de tangentes, si $a = 3b$ y $\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{2}{3}$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\frac{3b+b}{3b-b} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\frac{2}{3}}$$

$$2 = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\frac{2}{3}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \frac{A+B}{2} = 53^\circ$$

Teniendo en cuenta que:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ$$

$$53^\circ + \frac{C}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{C}{2} = 37^\circ$$

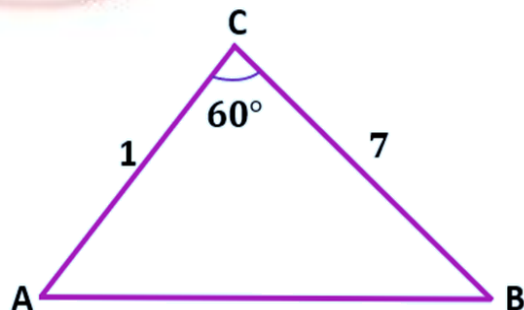
Luego nos pide hallar:

$$\cos \frac{C}{2} + \operatorname{sen} \frac{C}{2} = \cos 37^\circ + \operatorname{sen} 37^\circ$$

$$\cos \frac{C}{2} + \operatorname{sen} \frac{C}{2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

RPTA: D

2. Se observa en un parque tres postes ubicados en los puntos A, B y C: Hallar: $\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)$



- A. $3\sqrt{3}$
- B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- C. $2\sqrt{3}$
- D. $3\sqrt{3}$
- E. $\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

Sabemos que: $A + B = 120^\circ$

Aplicamos por ley de tangentes:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\frac{7-1}{7+1} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{120^\circ}{2}\right)}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{tg} 60^\circ}$$

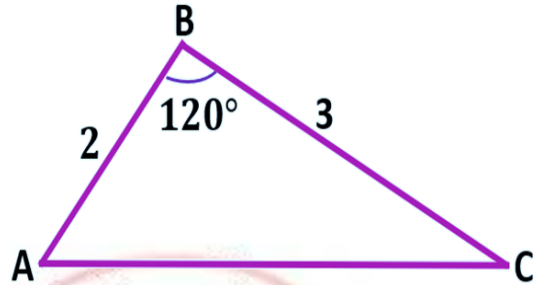
$$\rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

RPTA: B

3. En un mapa se observa la trayectoria de un camino de forma triangular por los puntos ABC. Calcular: $\operatorname{tg}\left(\frac{A-C}{2}\right)$

RPTA: D



- A. $5\sqrt{3}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$
- C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{15}$
- E. $\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

Datos: $A + C = 60^\circ$

Aplicando la Ley de Tangentes:

$$\frac{a - c}{a + c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A - C}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A + C}{2}\right)}$$

$$\frac{3 - 2}{3 + 2} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A - C}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{60^\circ}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A - C}{2}\right)}{\operatorname{tg} 30^\circ}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A - C}{2}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A - C}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{15}$$

4. En un campo de recreación en forma de triángulo rectángulo, recto en C, se cumple que $A + B = 90^\circ$, $A - B = 74^\circ$ y $b = 3m$. Se desea cercarlo, pero ha faltado malla para el lado "a", ¿Cuántos metros serán necesarios para el cerco?

- A. 19 m
- B. 27 m
- C. 25 m
- D. 21 m
- E. 33 m

RESOLUCIÓN:

Graficamos:



Aplicando la Ley de Tangentes:

$$\frac{a - 3}{a + 3} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A - B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A + B}{2}\right)}$$

$$\frac{a - 3}{a + 3} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{74^\circ}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{90^\circ}{2}\right)}$$

$$\frac{a - 3}{a + 3} = \frac{\operatorname{tg} 37^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ}$$

$$\frac{a-3}{a+3} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{a-3}{a+3} = \frac{3}{4}$$

$$4a - 12 = 3a + 9$$

$$a = 21 \text{ m}$$

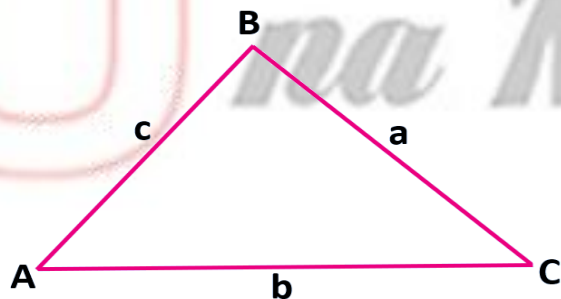
RPTA: D

5. En un triángulo ABC se cumple: $4 \operatorname{tg} \left(\frac{B}{2} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{A-C}{2} \right) = \frac{a+c}{a-c}$. Calcular la $m\angle B$.

- A. 15°
 B. 30°
 C. 37°
 D. 53°
 E. 60°

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Aplicando la Ley de Tangentes:

$$\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{A+C}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{A-C}{2} \right)} = \frac{a+c}{a-c}$$

Reemplazamos:

$$4 \operatorname{tg} \left(\frac{B}{2} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{A-C}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{A+C}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{A-C}{2} \right)}$$

$$4 \operatorname{tg} \left(\frac{B}{2} \right) \underbrace{\operatorname{tg} \left(\frac{A-C}{2} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{A-C}{2} \right)}_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{A+C}{2} \right)$$

(Por Identidades Recíprocas)

$$4 \operatorname{tg} \left(\frac{B}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{A+C}{2} \right) \dots\dots I$$

Del gráfico: $A + B + C = 180^\circ$

$$\left(\frac{A+C}{2} \right) + \left(\frac{B}{2} \right) = 90^\circ$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} \left(\frac{A+C}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{B}{2} \right) \dots\dots II$$

(Por Razones Trigonómicas Ángulos Complementarios)

Reemplazando II en I:

$$4 \operatorname{tg} \left(\frac{B}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{B}{2} \right)$$

$$4 \operatorname{tg} \left(\frac{B}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{B}{2} \right)}$$

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{B}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{B}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

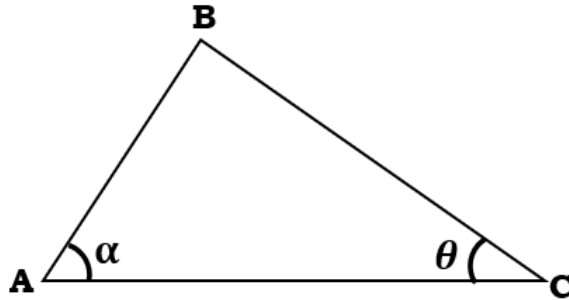
$$\frac{B}{2} = \frac{53^\circ}{2}$$

$$m\angle B = 53^\circ$$

RPTA: D

6. La distancia de tres objetos no identificados están ubicados en los puntos A, B y C formado una figura triangular donde $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$. Hallar el valor de:

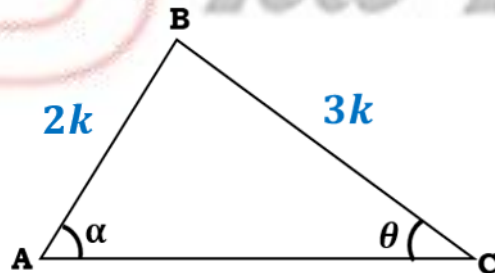
$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)}$$



- A. $\frac{10}{8}$
- B. $\frac{10}{3}$
- C. $\frac{5}{3}$
- D. $\frac{12}{7}$
- E. $\frac{13}{12}$

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Por ley de Senos:

$$\frac{3k}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \theta}} = \frac{2k}{\frac{2}{3}}$$

Por ley de tangentes:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)} = \frac{3k+2k}{3k-2k}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)} = 5$$

Acomodando:

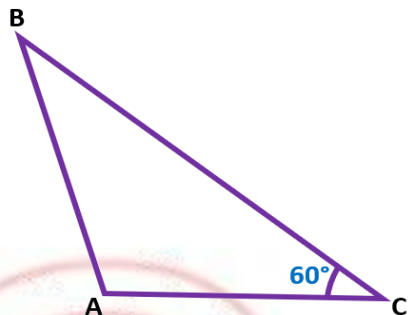
$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)} = \frac{2}{3} \cdot 5$$

$$\therefore \frac{10}{3}$$

RPTA: B

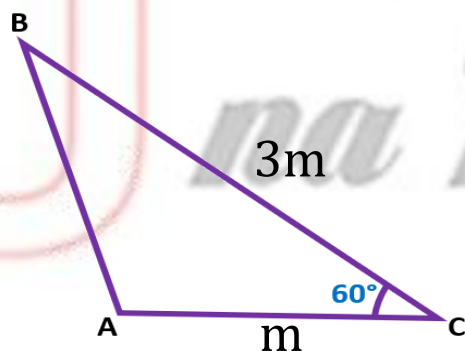
7. Se observa un triángulo obtusángulo A,B y C , Hallar: $2 \operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sqrt{3}$, si $BC = 3AC$.



- A. $\sqrt{3}$
- B. $2\sqrt{3}$
- C. $4\sqrt{3}$
- D. $6\sqrt{3}$
- E. $-\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Del gráfico se deduce: $A + B = 120^\circ$

Si: $AC = m$; $BC = 3m$

Por ley de tangentes:

$$\frac{3m - m}{3m + m} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A - B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A + B}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A - B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{120^\circ}{2}\right)} \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= 2 \operatorname{tg}\left(\frac{A - B}{2}\right) \\ \sqrt{3} &= 2 \operatorname{tg}\left(\frac{A - B}{2}\right)\end{aligned}$$

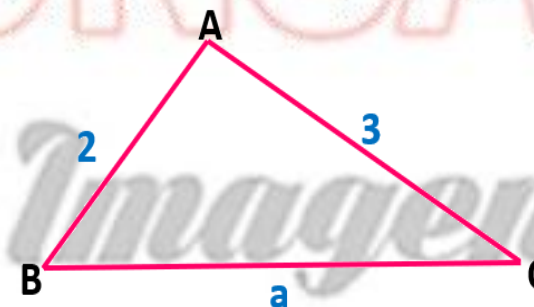
Reemplazando:

$$2 \operatorname{tg}\left(\frac{A - B}{2}\right) + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

RPTA: B

8. Tres plantas nucleares están ubicadas en los vértices A, B y C de un triángulo, de acuerdo al gráfico.

Si: $(2a + 5)(a + 5) = 3(a + 3)(a + 2)$ Calcular: $\operatorname{tg}\left(\frac{B - C}{2}\right)$



- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{7}$
- E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

RESOLUCIÓN:

Efectuando:

$$\begin{aligned}(2a + 5)(a + 5) &= 3(a + 3)(a + 2) \\ 2a^2 + 10a + 5a + 25 &= 3a^2 + 15a + 18 \\ 15a + 25 &= a^2 + 15a + 18 \\ a^2 &= 7 \rightarrow a = \sqrt{7}\end{aligned}$$

Por ley de los Cosenos:

$$\begin{aligned}a^2 &= 2^2 + 3^2 - 2(2)(3)\cos A \\ (\sqrt{7})^2 &= 4 + 9 - 2(2)(3)\cos A \\ 12\cos A &= 13 - 7 \\ \cos A &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Luego: $m\angle A = 60^\circ$ Entonces $\rightarrow B + C = 120^\circ$

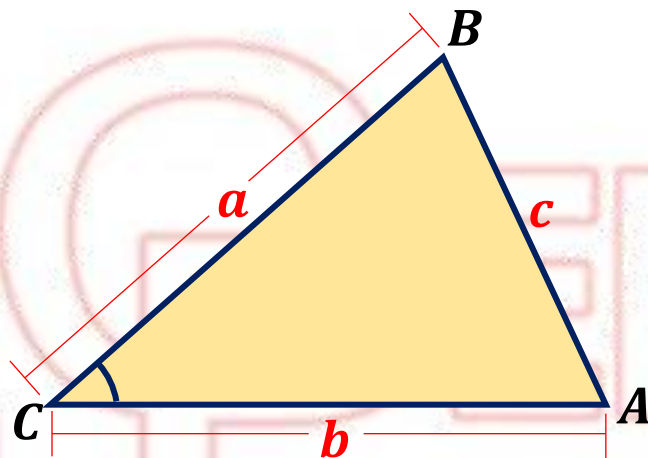
Por Ley de tangentes:

$$\begin{aligned}\frac{3-2}{3+2} &= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)} \\ \frac{1}{5} &= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\operatorname{tg} 60^\circ} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

RPTA: B

10.3 ÁREA DE REGIONES TRIANGULARES: CONOCIENDO LOS LADOS, ÁNGULO Y SEMIPERÍMETRO

10.3.1 EN TÉRMINOS DE DOS LADOS Y EL ÁNGULO COMPENDIDO

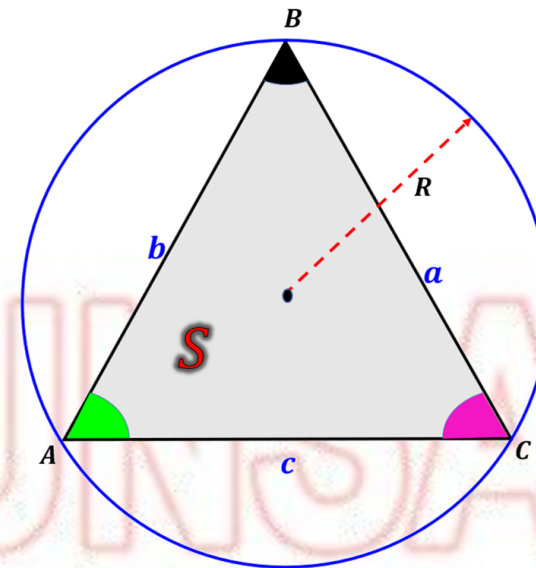


$$S = \frac{ab}{2} \sen C$$

$$S = \frac{bc}{2} \sen A$$

$$S = \frac{ac}{2} \sen B$$

10.3.2 EN TÉRMINOS DEL CIRCUNRADIO Y LOS ÁNGULOS INTERNOS DEL TRIÁNGULO



$$S = 2R^2 \sen A \cdot \sen B \cdot \sen C$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Donde R es el circunradio del triángulo.

10.3.3 EN TÉRMINOS DE LOS LADOS DEL TRIÁNGULO

Conocida también como la fórmula de Herón : el área de un triángulo (S), a partir de su semiperímetro:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Donde p es el semiperímetro del triángulo.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

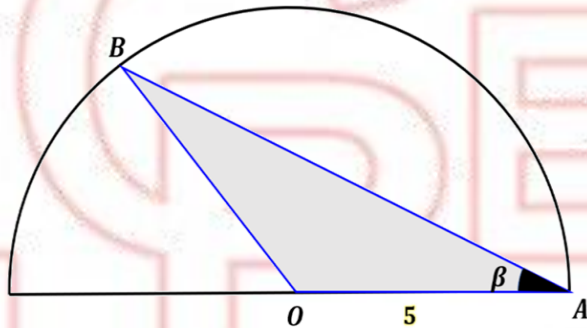
10.3.4 EN TÉRMINOS DEL SEMIPERÍMETRO Y EL INRADIO

$$S = p.r$$

Donde r es el inradio de la circunferencia.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

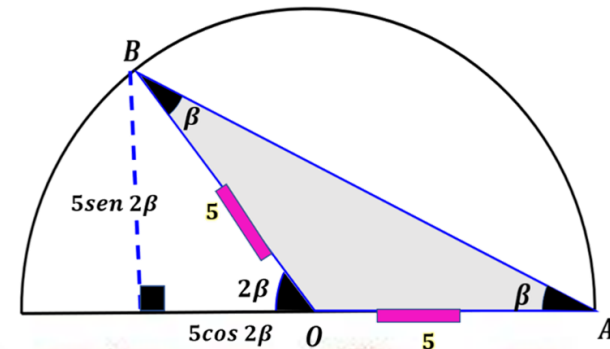
1. En la figura mostrada, calcular el área sombreada en u^2 , en función de " β ". Si el radio de la semicircunferencia es $5u$.



- A. $12,5 \text{sen } 2\beta$
B. $10 \text{sen } \beta$
C. $5 \text{sen } 2\beta$
D. $6 \text{sen } \beta$
E. $2,5 \text{sen } 2\beta$

RESOLUCIÓN:

Completando el gráfico:



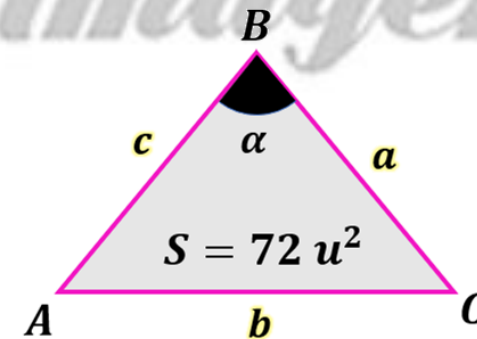
El área es:

$$S = \frac{1}{2} (5)(5 \text{sen } 2\beta)$$

$$\therefore S = 12,5 \text{sen } (2\beta) u^2$$

RPTA: A

2. En la siguiente figura, se prolongan los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ hasta los puntos D y E respectivamente, teniendo que $\overline{AD} = 3\overline{AB}$ y $\overline{CE} = 4\overline{BC}$. Hallar el área del triángulo DBE.

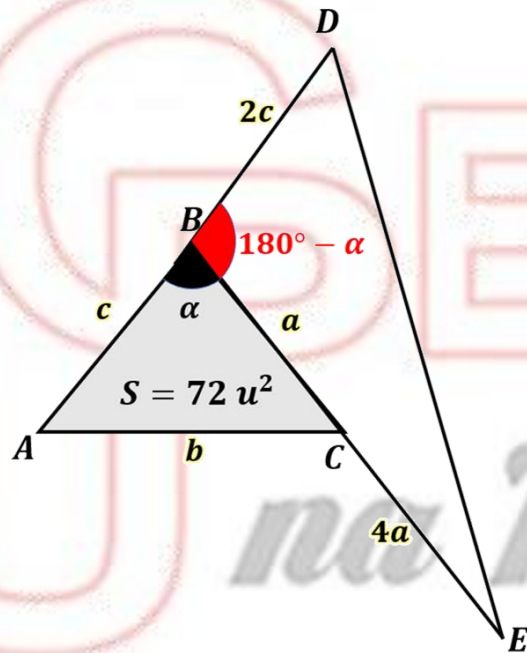


- A. $720 u^2$

- B. $744 u^2$
 C. $752 u^2$
 D. $360 u^2$
 E. $120 u^2$

RESOLUCIÓN:

Completando datos en la figura dada:



Por dato, la región sombreada es:

$$S = \frac{1}{2} ac(\sen \alpha) = 72$$

$$ac(\sen \alpha) = 144 \dots (*)$$

Reemplazando (*), en la fórmula de área de un triángulo:

$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \cdot 2c(5a) \sen (180^\circ - \alpha)$$

$$S_{\triangle BDE} = 5ac(\sen \alpha) = 5(144)$$

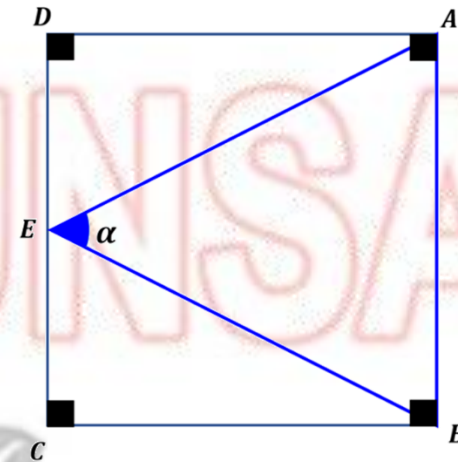
$$A_{\triangle BDE} = 720$$

Por lo tanto, el área del triángulo BDE es $720 u^2$

RPTA: A

3. En la figura, se muestra un cuadrado, si $\overline{CD} = 3\overline{ED}$ y $m \angle BEA = \alpha$. Calcular:

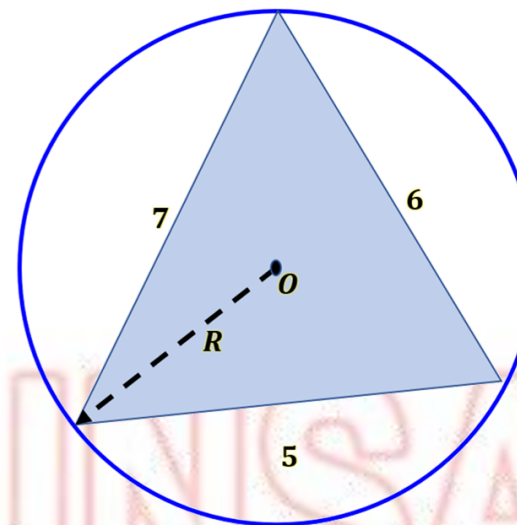
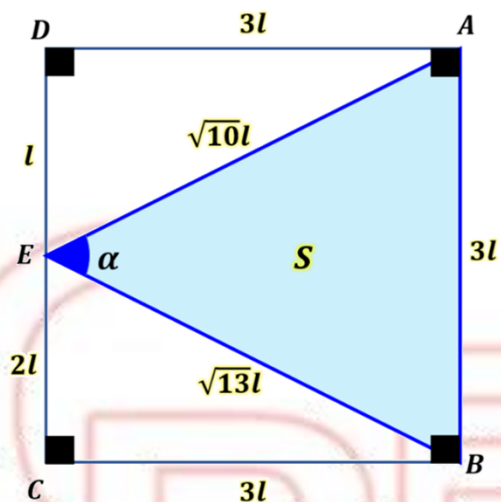
$\csc \alpha$



- A. 3
 B. $\frac{\sqrt{130}}{9}$
 C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$
 D. $\frac{\sqrt{13}}{2}$
 E. $\frac{9}{4}$

RESOLUCIÓN:

Completando la figura, completando los lados por el teorema de Pitágoras, se tiene:



Aplicamos fórmula de área de un triángulo, para el triángulo ABE:

$$S = \frac{BH}{2} = \frac{(3l)(3l)}{2} = \frac{9l^2}{2} \dots (I)$$

$$S = \frac{1}{2}(\sqrt{13}l)(\sqrt{10}l)\sin \alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{130})l^2 \sin \alpha \dots (II)$$

Comparando (I) y (II):

$$\frac{9l^2}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{130})l^2 \sin \alpha$$

$$\frac{9}{\sqrt{130}} = \sin \alpha$$

$$\therefore \csc \alpha = \frac{\sqrt{130}}{9}$$

RPTA: B

4. En la siguiente figura, calcular el circunradio "R":

- A. $\sqrt{6} u$
- B. $\frac{35}{24}\sqrt{6} u$
- C. $\frac{\sqrt{10}}{35} u$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{12} u$
- E. $4\sqrt{6} u$

RESOLUCIÓN:

Primero hallemos el semiperímetro:

$$p = \frac{5 + 6 + 7}{2} = 9$$

Luego el área del triángulo sombreado, usando el semiperímetro es:

$$S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$$

Por último, el área del triángulo, usando el inradio es:

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$6\sqrt{6} = \frac{5(6)7}{4R}$$

Racionalizando, se tiene:

$$R = \frac{5(7)}{4\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore R = \frac{35}{24}\sqrt{6}u$$

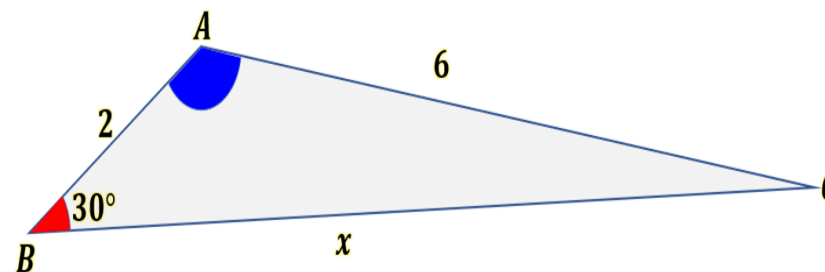
RPTA: B

5. En un triángulo ABC, obtuso en "A", cuya $m \angle ABC = 30^\circ$, $AB = 2u$ y $AC = 6u$ y si BC es entero. Calcular el área de dicho triángulo.

- A. $2u^2$
- B. $3u^2$
- C. $3,5u^2$
- D. $5u^2$
- E. $9,5u^2$

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Calculando el tercer lado, por existencia de un triángulo, se tiene que:

$$6 - 2 < x < 6 + 2$$

$$4 < x < 8 \quad \dots (I)$$

Por dato, el ΔABC es obtuso en "A", se cumple que:

$$x^2 > 2^2 + 6^2$$

$$x^2 > 40$$

$$x > 6,32 \quad \dots (II)$$

De (I) y (II), se tiene:

$$6,32 < x < 8$$

Como "x" es entero, resulta que $x = 7$

Luego, calculemos el área del triángulo, conociendo dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos:

$$S = \frac{2x \cdot \sen 30^\circ}{2} = \frac{2(7)\sen 30^\circ}{2}$$

$$\therefore S = 3,5u^2$$

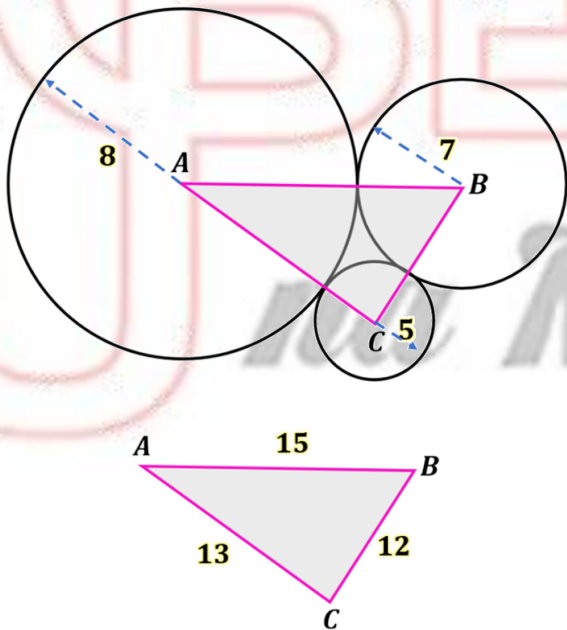
RPTA: C

6. Se tienen 3 circunferencias tangentes exteriormente dos a dos. Hallar el área del triángulo que se forma al unir sus centros, si se sabe que los radios miden 5, 7 y 8 cm

- A. 10 cm^2
- B. $\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- C. $20\sqrt{17} \text{ cm}^2$
- D. $3\sqrt{2} \text{ cm}^2$
- E. $20\sqrt{14} \text{ cm}^2$

RESOLUCIÓN:

Graficando:



Aplicando el teorema de Herón, primero se hallará el semiperímetro del triángulo ABC :

$$p = \frac{12 + 13 + 15}{2} = 20$$

El área del triángulo sombreado es :

$$S = \sqrt{20(20 - 15)(20 - 12)(20 - 13)} = \sqrt{5600}$$

$$\therefore S = 20\sqrt{14} \text{ cm}^2$$

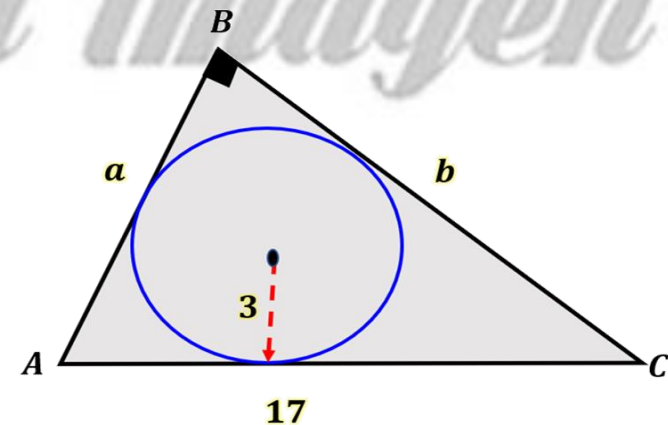
RPTA: E

7. Calcular el área de un triángulo rectángulo. Si el inradio y la hipotenusa miden 3 u y 17 u respectivamente.

- A. 20 u^2
- B. 30 u^2
- C. 40 u^2
- D. 50 u^2
- E. 60 u^2

RESOLUCIÓN:

Construyendo la figura:



Por el teorema de Poncelet:

$$a + b = 17 + 2(3)$$

$$a + b = 23$$

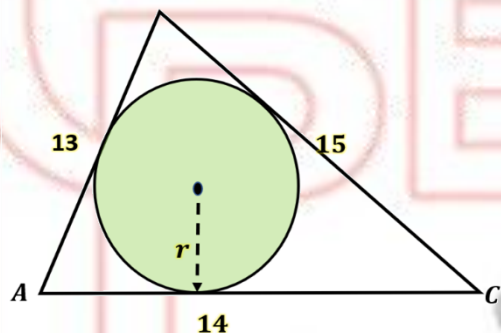
Luego, el área del triángulo ABC es:

$$S = p \cdot r = \left(\frac{a + b + 17}{2} \right) 3$$

$$\therefore S = 60 u^2$$

RPTA: E

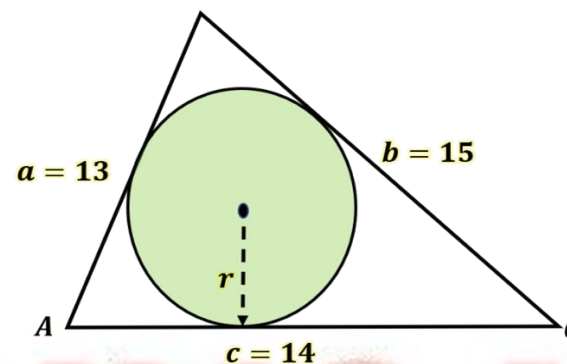
8. En la siguiente figura, calcular el inradio (en unidades).



- A. $3 u$
- B. $4 u$
- C. $6 u$
- D. $7 u$
- E. $8 u$

RESOLUCIÓN:

De la figura:



Hallando el semiperímetro:

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

Por Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-15)(21-14)}$$

$$S = \sqrt{42(42)4} = 84 u^2$$

Luego, en términos del inradio:

$$S = p \cdot r$$

$$84 = 21r$$

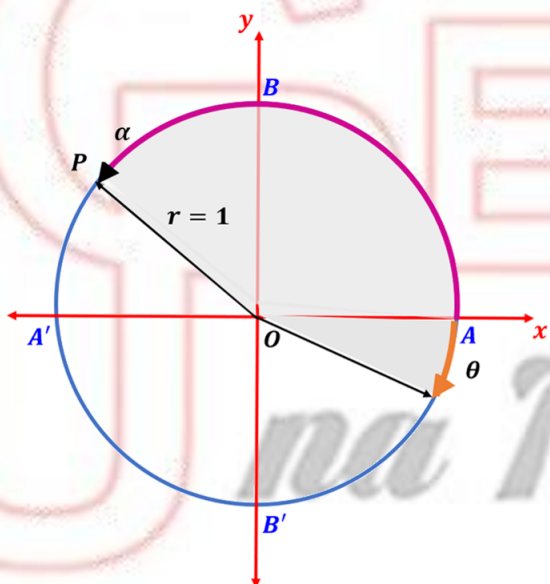
$$\therefore r = 4 u$$

RPTA: B

10.4 CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

La circunferencia trigonométrica es aquella circunferencia que pertenece al plano cartesiano, cuyo centro es el origen de coordenadas y radio igual a la unidad. A continuación, se muestra la ecuación de la Circunferencia Trigonométrica (CT):

$$x^2 + y^2 = 1$$



10.4.1 ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

O(0; 0): origen de coordenadas

A(1; 0): origen de arcos

B(0; 1): origen de complementos

A'(-1; 0): origen de suplementos

α: arco positivo que pertenece al II C, también conocido como arco en posición normal

θ: arco negativo que pertenece al IV C

P: extremo de arco α

AP: arco dirigido en posición normal del sector circular sombreado.

Los *arcos* en la CT son números reales, es decir, cantidades sin unidades. También son llamados cantidades adimensionales.

Teniendo en cuenta el extremo del arco, este extremo nos indicará el cuadrante al que pertenece dicho arco. Así en la figura anterior, **α ∈ II C.**

Un *arco en posición normal* es aquel arco orientado en la CT que se genera a partir del origen de arcos **A(1; 0)** siendo el extremo la posición final de dicho arco. A los arcos generados en sentido antihorario se les considera positivos, y en sentido horario se les considera negativos. Observando la ubicación del extremo del arco podemos determinar el cuadrante al que pertenece dicho arco. Los arcos dirigidos en posición normal no necesariamente pertenecen a determinado cuadrante, puede darse el caso que dichos arcos no pertenezcan a cuadrante alguno, llamados así ángulos cuadrantales.

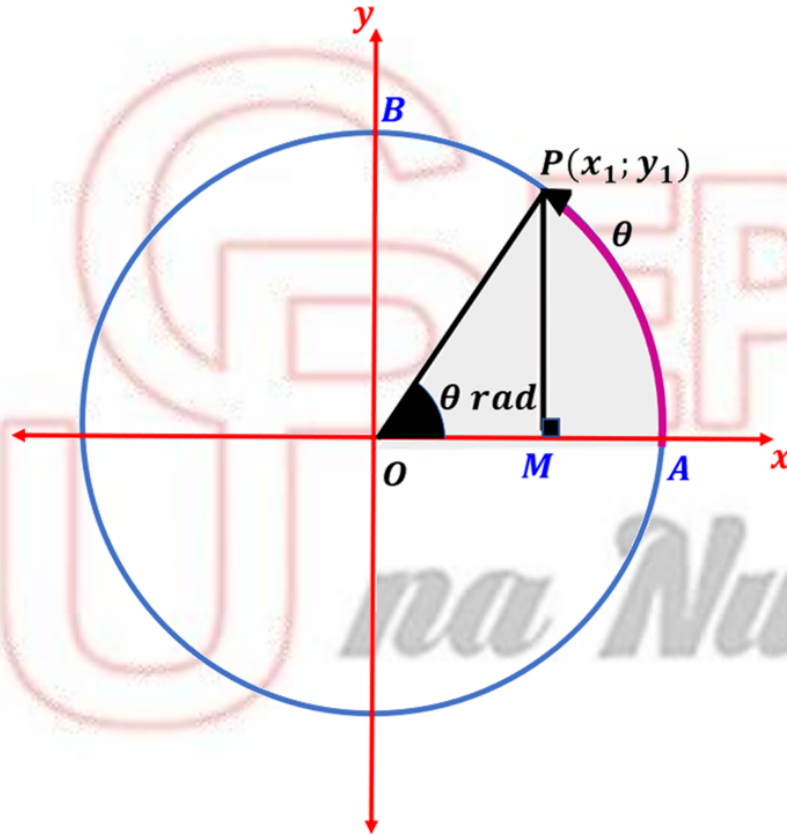
10.4.2 REPRESENTACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

En las representaciones siguientes, se han utilizado segmentos dirigidos. Las líneas trigonométricas son segmentos de medida positiva o negativa que van a representar el valor numérico de una razón trigonométrica de un ángulo o número cualquiera.

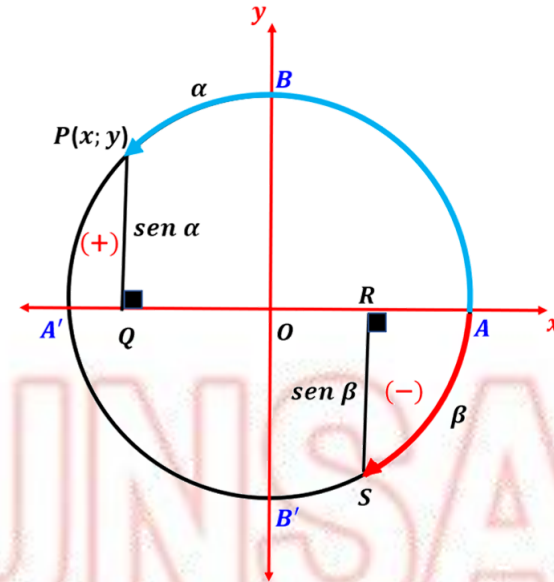
10.4.2.1 LÍNEA SENO (ORDENADA DEL EXTREMO DEL ARCO)

Es el segmento determinado por la perpendicular trazada desde el extremo del arco considerado, hacia el eje de las abscisas.

(Lumbreras, 2020)



$$\text{sen}(\widehat{AP}) = \text{sen}(\theta \text{ rad}) = \overline{PM} = y_1$$



donde:

$PQ = \text{sen } \alpha$ es positivo (+)

$SR = \text{sen } \beta$ es negativo (-)

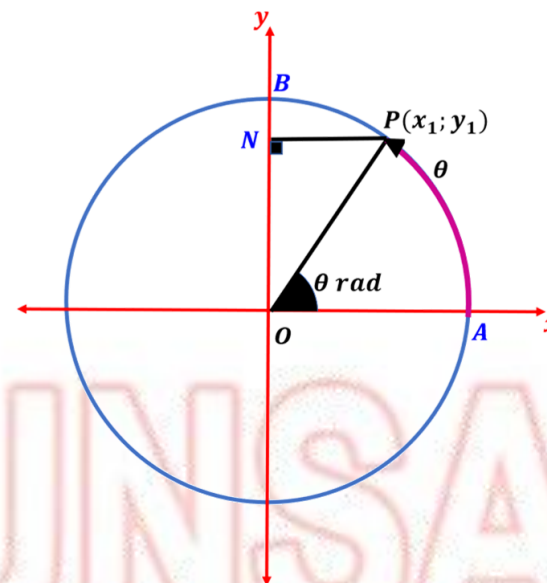
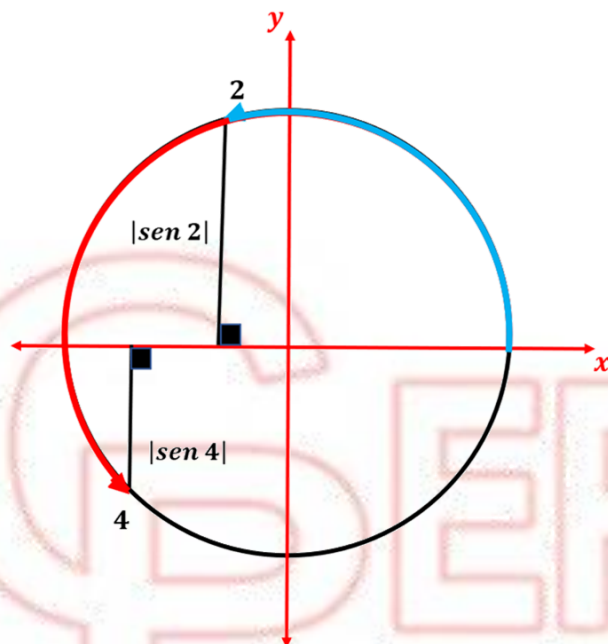
El seno de un arco α es la ORDENADA de su extremo.

$$\text{sen } \alpha = y$$

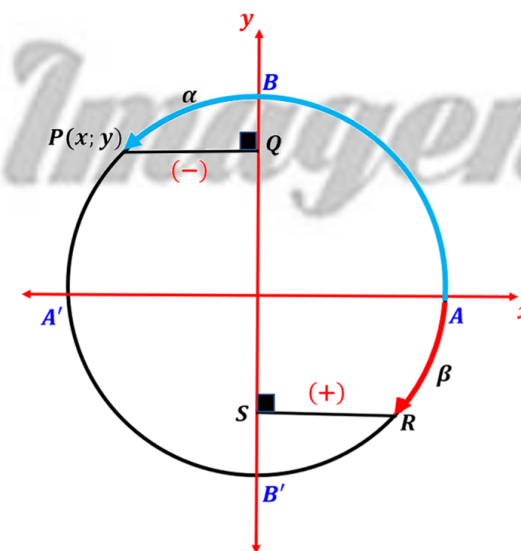
También se verifica:

- Su extensión: $-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$
- $(\text{sen } \alpha)_{\max} = 1$
- $(\text{sen } \alpha)_{\min} = -1$

EJEMPLO:



$$\cos(\widehat{AP}) = \cos(\theta \text{ rad}) = \overline{PN} = x_1$$



10.4.2.2 LÍNEA COSENO (ABSCISA DEL EXTREMO DEL ARCO)

Es el segmento determinado por la perpendicular trazada desde el extremo del arco considerado, hacia el eje de las ordenadas.

(Lumbreras, 2020)

donde:

$PQ = \cos \alpha$ es negativo (—)

$RS = \cos \beta$ es positivo (+)

El coseno de un arco α es la ABSCISA de su extremo.

$$\cos \alpha = x$$

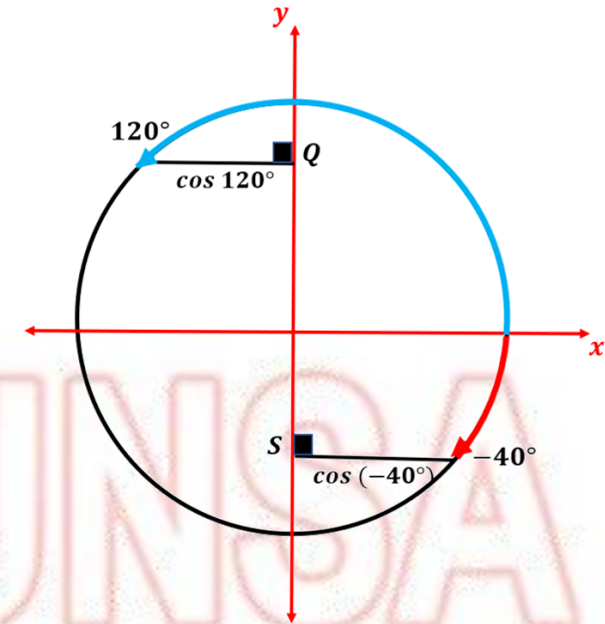
También se verifica:

- Su extensión: $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$
- $(\cos \alpha)_{\max} = 1$
- $(\cos \alpha)_{\min} = -1$

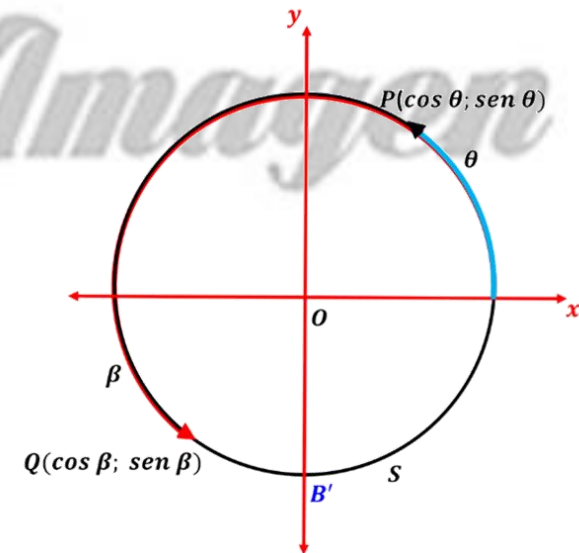
EJEMPLO:

Ubicar el coseno de los siguientes arcos: 120° y -40°

Resolución:

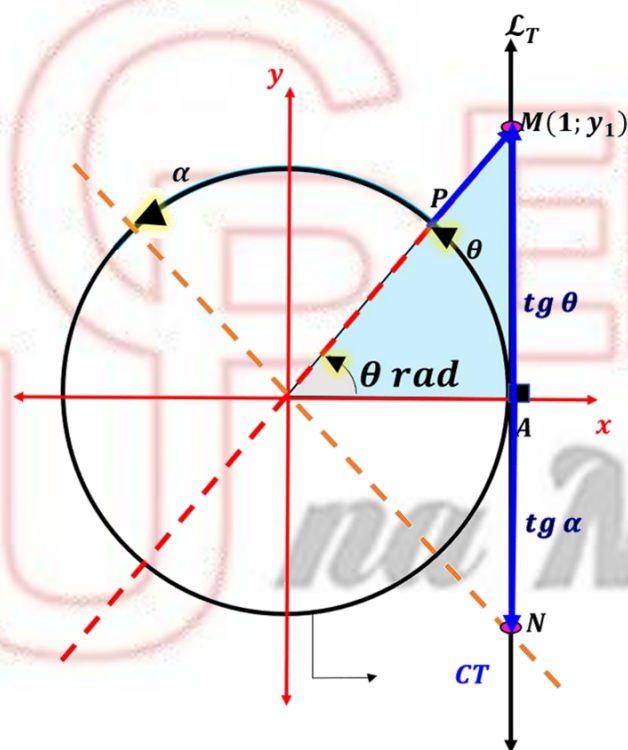


En términos de senos y cosenos, se tiene:



10.4.2.3 LÍNEA TANGENTE (ABSCISA DEL EXTREMO DEL ARCO).

La tangente de un arco en la circunferencia trigonométrica es representada geométricamente mediante un segmento dirigido vertical, correspondiente a la ordenada del punto de intersección del radio prolongado que contiene al extremo del arco y al eje de tangentes ($\mathcal{L}_T$). (Lumbreras, 2020)



$$tg(\widehat{AP}) = tg(\theta \text{ rad}) = \overline{AM} = y_1$$

$$tg \alpha = \overline{AN}$$

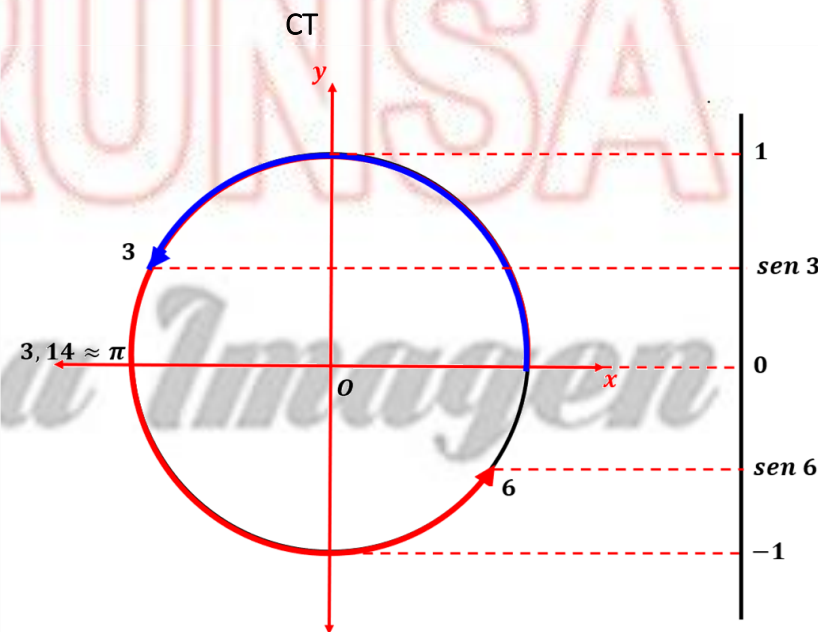
También se verifica:

- Su extensión: $-\infty \leq tg \alpha \leq \infty$
- La tangente no tiene máximo ni mínimo
- La tangente no está definida en: $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \dots$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\} / n \in \mathbb{Z}; tg x \in \mathbb{R}$$

10.4.3 VARIACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ARCO EN LA CT.

10.4.3.1 VARIACIÓN DEL SENO DE UN ARCO DE LA

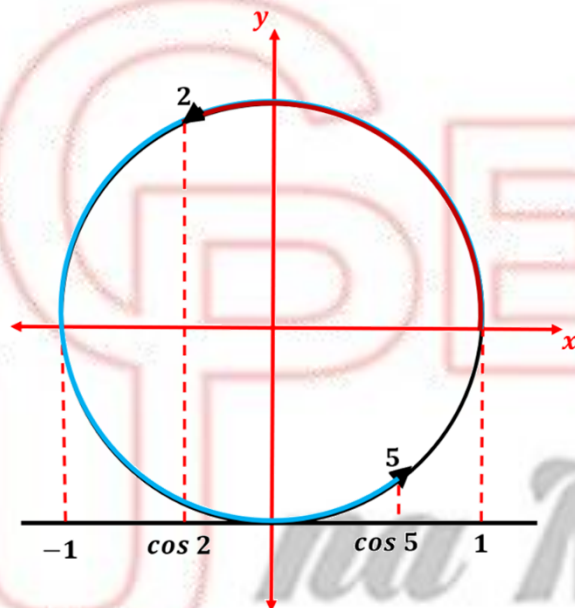


$$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow -1 \leq \text{sen } x \leq 1$$

- Si $x \in IC \rightarrow 0 < \text{sen } x < 1$
- Si $x \in IIC \rightarrow 0 < \text{sen } x < 1$

- Si $x \in IIC \rightarrow -1 < \text{sen } x < 0$
- Si $x \in IVC \rightarrow -1 < \text{sen } x < 0$

10.4.3.2 VARIACIÓN DEL COSENO DE UN ARCO DE LA CT



$$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$$

- Si $x \in IC \rightarrow 0 < \cos x < 1$
- Si $x \in IIC \rightarrow -1 < \cos x < 0$
- Si $x \in IIIC \rightarrow -1 < \cos x < 0$
- Si $x \in IVC \rightarrow 0 < \cos x < 1$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Indicar verdadero (V) o falso (F), según corresponda, en las siguientes proposiciones:

I) $\text{sen } 20^\circ < \text{sen } 60^\circ$

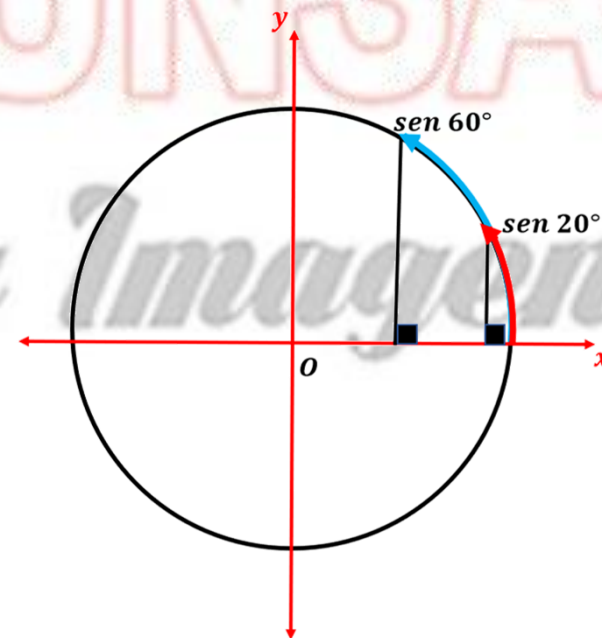
II) $\text{sen } 100^\circ < \text{sen } 150^\circ$

III) $\cos 280^\circ < \cos 300^\circ$

- A. VVV
- B. FFF
- C. VFV
- D. FVV
- E. FVF

RESOLUCIÓN:

I) Graficando:

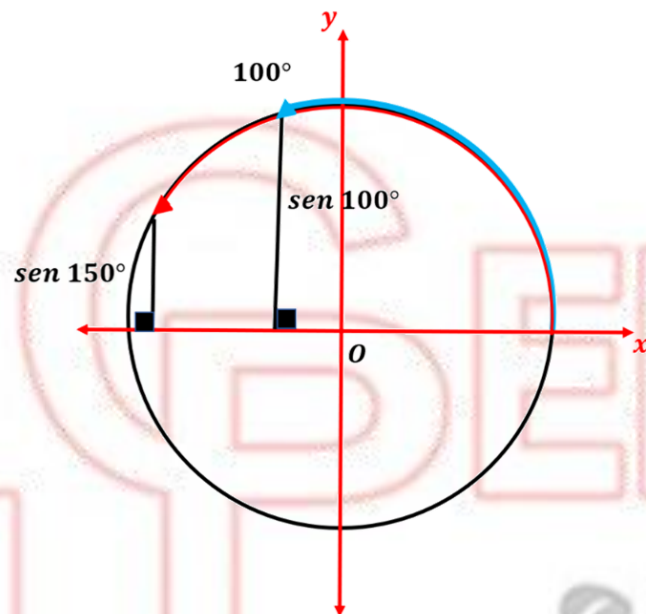


Del gráfico se tiene que:

$$\text{sen } 20^\circ < \text{sen } 60^\circ$$

(V)

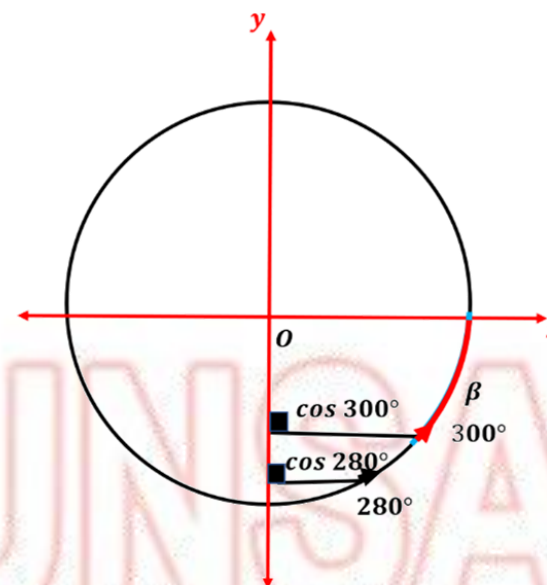
II) Graficando:



Del gráfico se tiene que:
 $\text{sen } 100^\circ > \text{sen } 150^\circ$

(F)

III. Graficando:

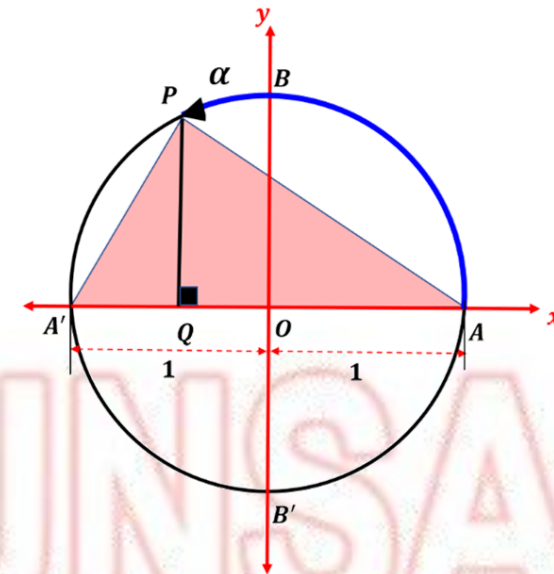
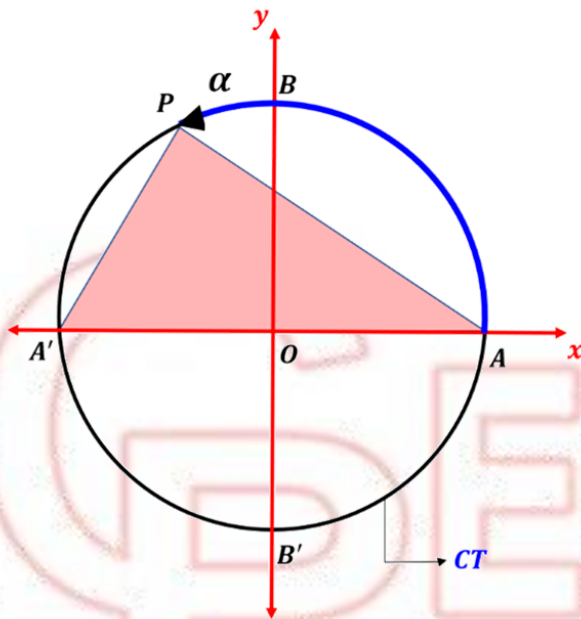


Del gráfico se tiene que:
 $\cos 300^\circ > \cos 280^\circ$

(V)

RPTA: C

2. En la figura mostrada, calcular el área de la región sombreada en función de " α ".



- A. $\sin \alpha$
- B. $\cos \alpha$
- C. $2\sin \alpha$
- D. $\sin (\alpha/2)$
- E. $2\cos \alpha$

RESOLUCIÓN:

Se traza la línea triangular, en la figura, formando la altura del triángulo:

Aplicamos fórmula de área de un triángulo:

$$A = \frac{B \times H}{2} = \frac{A'A \times PQ}{2} \dots (*)$$

Utilizando la línea triangular de seno en PQ , se tiene:

$$PQ = \underbrace{|\sin \alpha|}_{+}$$

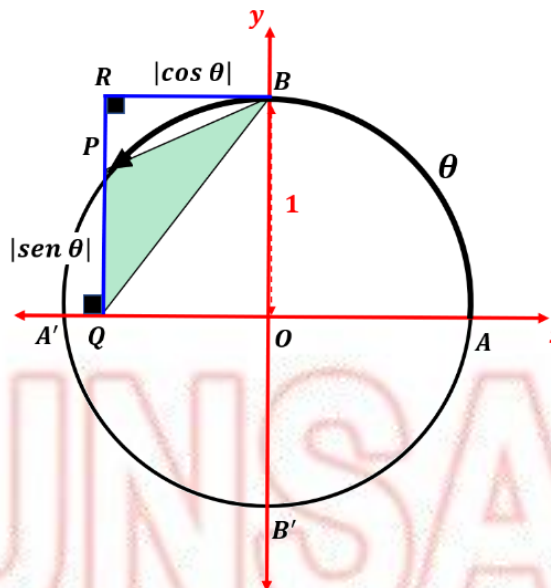
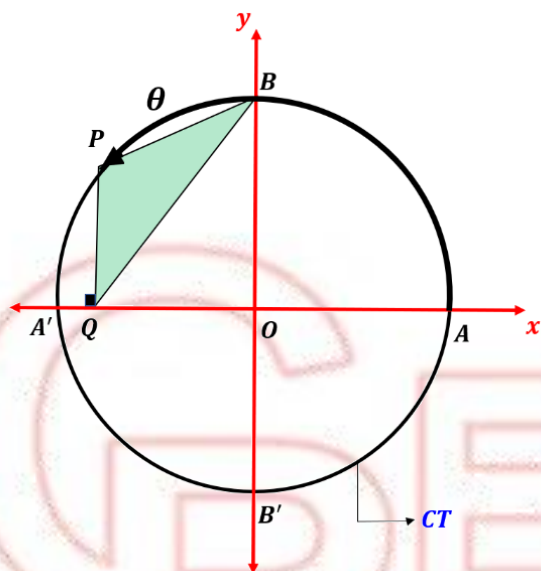
Se le aplica valor absoluto, ya que se debe tener una cantidad positiva. Luego en (*):

$$A = \frac{2 \times \sin \alpha}{2}$$

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $A = \sin \alpha$

RPTA: A

3. En la siguiente figura, calcular el área de la región sombreada en función de " θ ".



- A. $2\text{sen } \alpha$
- B. $-\frac{\text{sen } \theta \cos \theta}{2}$
- C. $2\cos \alpha$
- D. $\frac{\text{sen } \theta \cos \theta}{3}$
- E. $3\cos \alpha$

RESOLUCIÓN:

Se traza la línea triangular, en la figura, formando la altura del triángulo:

Aplicamos fórmula de área de un triángulo:

$$A = \frac{B \times H}{2} = \frac{PQ \times OQ}{2} \dots (*)$$

$$PQ = \underbrace{|\text{sen } \theta|}_{+} \rightarrow PQ = \text{sen } \theta$$

$$OQ = \underbrace{|\cos \theta|}_{-} \rightarrow OQ = -\cos \theta$$

Utilizando la línea triangular de seno y coseno en PQ y OQ respectivamente, se tiene:

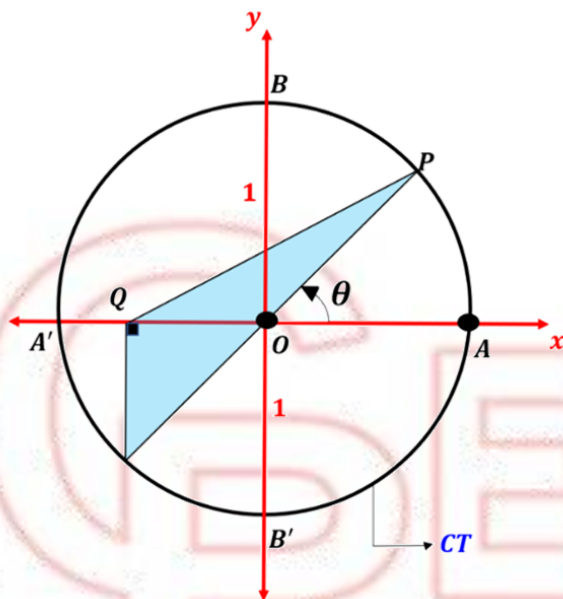
$$PQ = \frac{\text{sen } \theta \cdot (-\cos \theta)}{2}$$

$$A = -\frac{\text{sen } \theta \cos \theta}{2}$$

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $A = -\frac{\text{sen } \theta \cos \theta}{2}$

RPTA: B

4. En la siguiente figura:

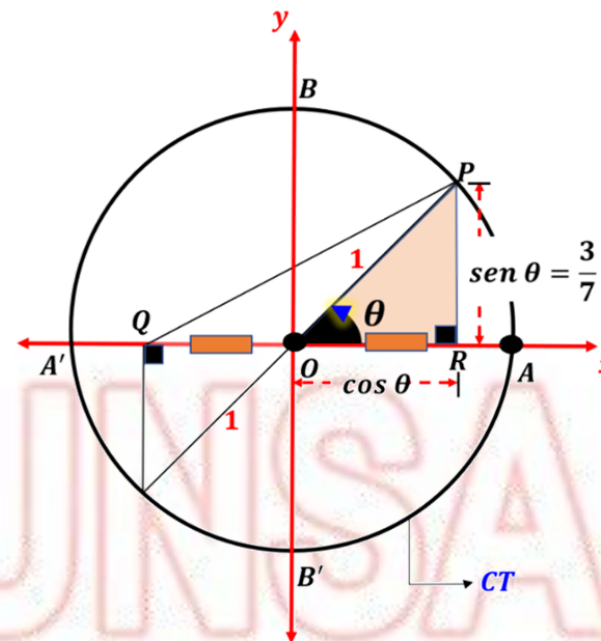


Si $\text{sen } \theta = \frac{3}{7}$
Calcular " $\overline{PQ}$ ".

- A. 13/7
- B. 2/3
- C. 4/5
- D. 15/7
- E. 5/3

RESOLUCIÓN:

Del gráfico:



Aplicando Pitágoras:

- En el $\triangle OPR$:

$$1^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + (\cos \theta)^2$$

$$\frac{40}{49} = \cos^2 \theta$$

- En el $\triangle PQR$:

$$\overline{PQ}^2 = (\text{sen } \theta)^2 + (2\cos \theta)^2$$

$$\overline{PQ}^2 = \text{sen}^2 \theta + 4\cos^2 \theta$$

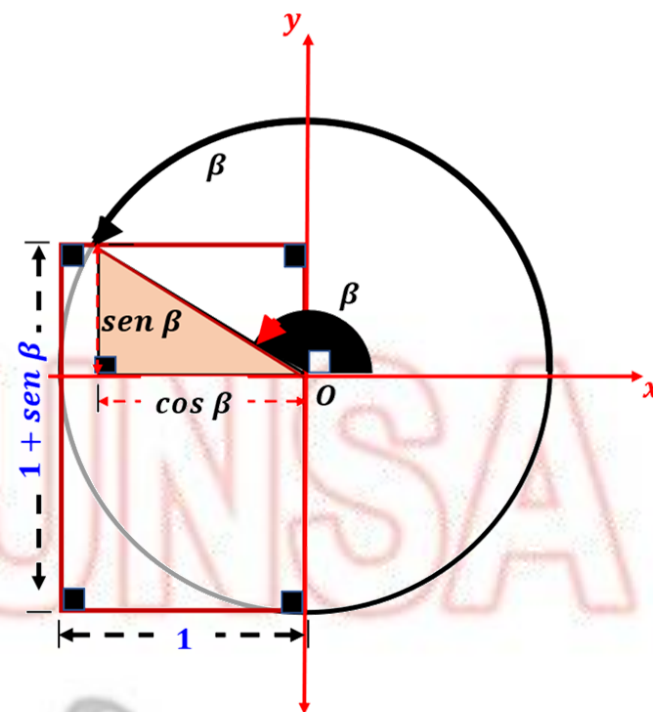
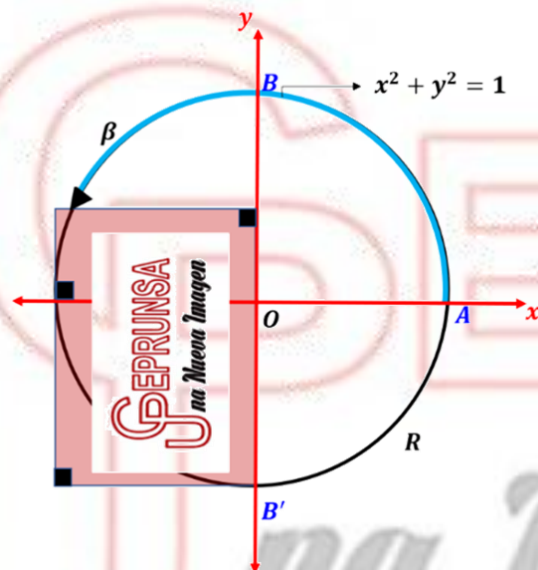
$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + 4\left(\frac{40}{49}\right)$$

$$\overline{PQ}^2 = \frac{169}{49}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{13}{7}$$

RPTA: A

5. En la siguiente figura. Hallar el área que ocupa el logotipo del Ceprunsa en términos de " β ".



Calculando el área del logotipo del Ceprunsa:

$$A = B \times H = 1 \times (1 + \operatorname{sen} \beta)$$

$$\therefore A = 1 + \operatorname{sen} \beta$$

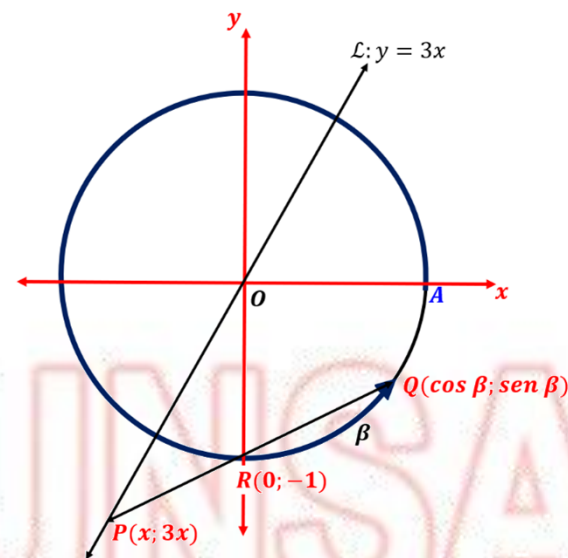
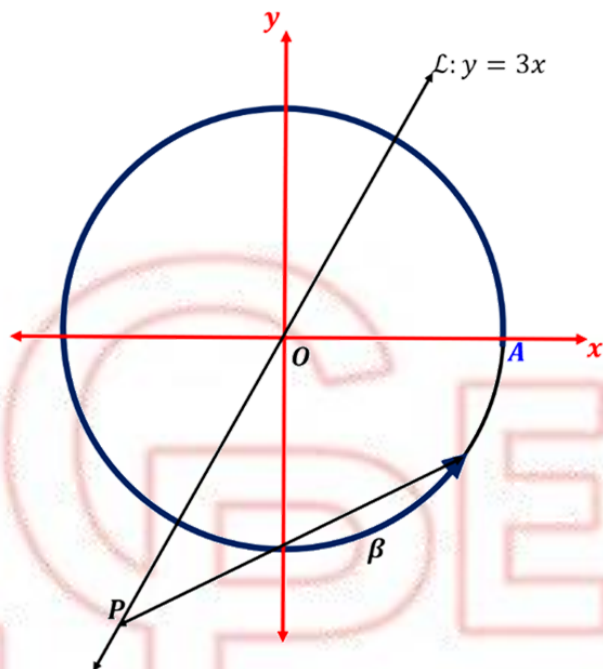
RPTA: E

- A. 1
- B. 2
- C. $\operatorname{sen} \beta$
- D. $\cos \beta$
- E. $1 + \operatorname{sen} \beta$

RESOLUCIÓN:

De la figura:

6. En la siguiente figura de la circunferencia trigonométrica. Hallar el valor de la ordenada del punto P.



Hallando la pendiente de la recta :

$$\begin{aligned}
 m_{PR} &= m_{RQ} \\
 \frac{3x - (-1)}{x - 0} &= \frac{\text{sen } \beta - (-1)}{\cos \beta - 0} \\
 \frac{3x + 1}{x} &= \frac{\text{sen } \beta + 1}{\cos \beta} \\
 \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} &= \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} + \frac{1}{\cos \beta} \\
 3 + \frac{1}{x} &= \text{tg } \beta + \sec \beta \\
 \frac{1}{x} &= \text{tg } \beta + \sec \beta - 3 \\
 \therefore x &= \frac{1}{\text{tg } \beta + \sec \beta - 3}
 \end{aligned}$$

- A. $\text{tg } \beta$
- B. $\sec \beta + \text{tg } \beta$
- C. $\text{sen } \beta$
- D. $1/(1 + \text{sen } \beta)$
- E. $1/(\text{tg } \beta + \sec \beta - 3)$

RESOLUCIÓN:

Del gráfico:

RPTA: E

7. Si $x \in \left[\frac{\pi}{36}; \frac{\pi}{4} \right]$

Hallar la variación de:

$$A = 3\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{12}\right)$$

- A. $[-1; 1]$
 B. $[-3; 3]$
 C. $[0; 1]$
 D. $[0; 3]$
 E. $\left[\frac{3}{2}; 3\right]$

RESOLUCIÓN:

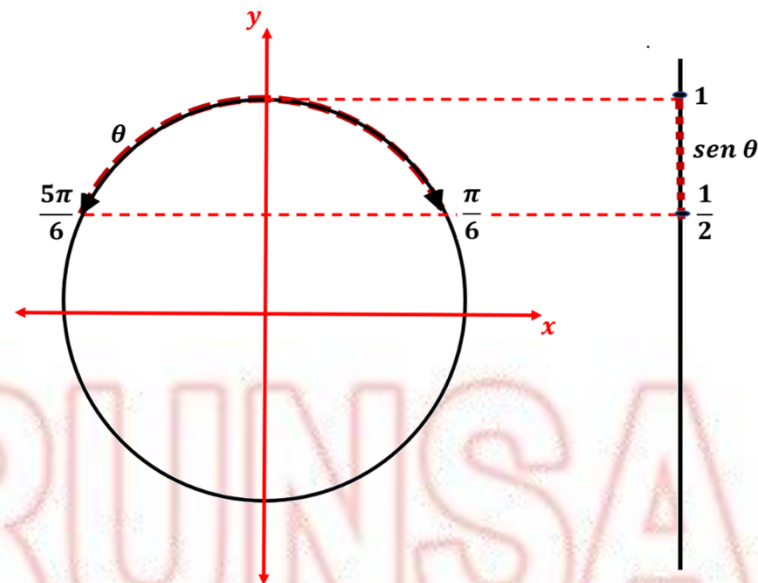
De:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{36} \leq x \leq \frac{\pi}{4} & \quad \left. \vphantom{\frac{\pi}{36} \leq x \leq \frac{\pi}{4}} \right\} * 3 \\ \frac{\pi}{12} \leq 3x \leq \frac{3\pi}{4} & \quad \left. \vphantom{\frac{\pi}{12} \leq 3x \leq \frac{3\pi}{4}} \right\} + \frac{\pi}{12} \\ \frac{\pi}{6} \leq 3x + \frac{\pi}{12} \leq \frac{5\pi}{6} & \quad \left. \vphantom{\frac{\pi}{6} \leq 3x + \frac{\pi}{12} \leq \frac{5\pi}{6}} \right\} \theta \end{aligned}$$

Luego:

$$A = 3\operatorname{sen} \theta; \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$$

En el gráfico:



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} & \leq \operatorname{sen} \theta \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \leq \operatorname{sen} \theta \leq 1 \quad \left. \vphantom{\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} \theta \leq 1} \right\} * 3 \\ \frac{3}{2} & \leq 3\operatorname{sen} \theta \leq 3 \\ \frac{3}{2} & \leq A \leq 3 \end{aligned}$$

$$\therefore A \in \left[\frac{3}{2}; 3\right]$$

RPTA: E

8. Si $\theta \in]-\pi; 0]$. Resolver la siguiente inecuación:

$$\cos \theta > \frac{1}{2}$$

- A. $[-\pi; 0]$
 B. $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[$

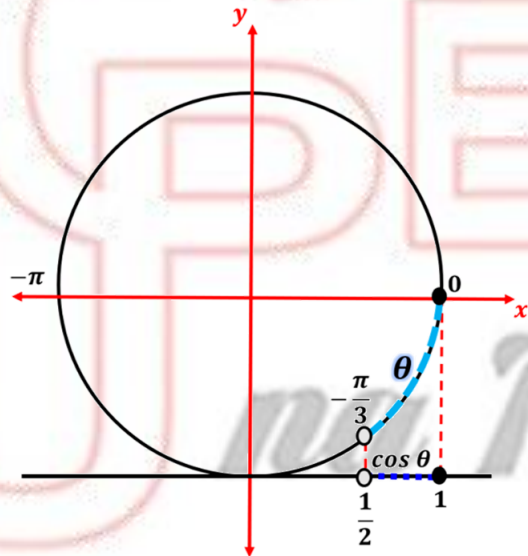
- C. $]-\frac{\pi}{3}; 0]$
 D. $]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$
 E. $\{-\pi; \pi\}$

RESOLUCIÓN:

Acotando la desigualdad, se tiene:

$$\frac{1}{2} < \cos \theta \leq 1$$

Analizando la variación de " θ " en la CT:



$$-\frac{\pi}{3} < \theta \leq 0$$

$$\therefore \theta \in]-\frac{\pi}{3}; 0]$$

RPTA: C

10.5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: SENO, COSENO

10.5.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: SENO, COSENO, DOMINIO Y RANGO

Se denomina Función Trigonométrica al conjunto de pares ordenados (x, y) , tal que la primera componente " x " es la medida de un ángulo cualquiera en radianes y la segunda componente " y " es la razón trigonométrica de " x ". (Lumbreras, 2020)

Es decir:

$$F.T = \{(x; y) / y = R.T.(x)\}$$

PERIODO DE UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA (T): el periodo representa la menor longitud de repetición de la gráfica sobre el eje x . Sea la función $f(x) = A.FT(Bx + C)$, donde A , B y C son constantes, siendo " $|A|$ " la amplitud, " FT " representa a las funciones de seno o coseno. Entonces el periodo de la función trigonométrica (seno o coseno) se determina por:

$$T = \frac{2\pi}{|B|}; B \neq 0$$

EJEMPLOS:

Calcula el periodo en las siguientes expresiones:

a) $f(x) = 2\text{sen } 3x$

b) $g(x) = 3\cos 2x$

RESOLUCIÓN:

a) Reemplazando en la fórmula del periodo, se tiene:

$$T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

b) De forma similar, se tiene para la función g .

$$T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

AMPLITUD DE UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA (A): la amplitud es la mitad de la distancia entre el límite superior e inferior y debe ser la misma para cada intervalo.

$$T = \frac{1}{2}|f_{\max} - f_{\min}|$$

Donde:

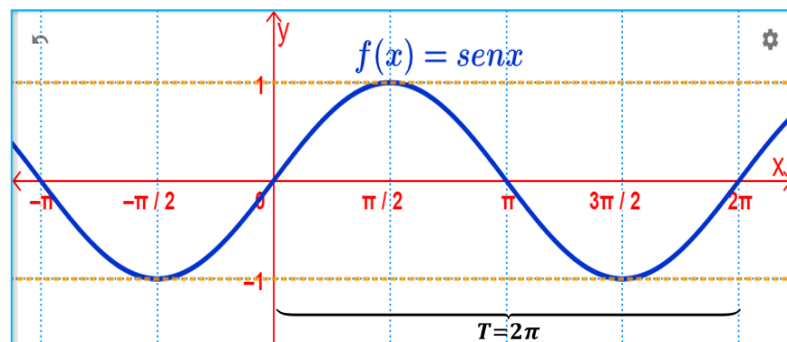
$f_{\max}$: es el máximo valor que puede tomar la función.

$f_{\min}$: es el mínimo valor que puede tomar la función.

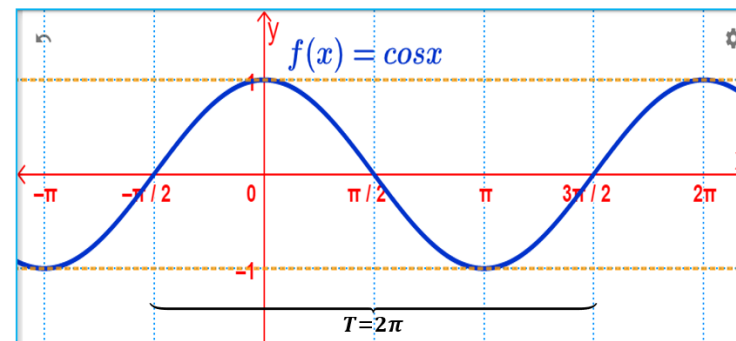
10.5.1.1 FUNCIÓN SENO

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \text{sen } x; x \in \mathbb{R}\}$$

Su gráfica es:



ANÁLISIS DEL GRÁFICO	
DOMINIO	$x \in \mathbb{R}$
RANGO	$y \in [-1; 1] \rightarrow -1 \leq \text{sen } x \leq 1$
PERIODO	$T = 2\pi$
FUNCIÓN	<i>Impar</i> $\rightarrow \text{sen}(-x) = -\text{sen } x$
CONTINUA	$\forall x \in \mathbb{R}$



ANÁLISIS DEL GRÁFICO	
DOMINIO	$x \in \mathbb{R}$
RANGO	$y \in [-1; 1] \rightarrow -1 \leq \text{cos } x \leq 1$
PERIODO	$T = 2\pi$
FUNCIÓN	<i>par</i> $\rightarrow \text{cos}(-x) = \text{cos } x$
CONTINUA	$\forall x \in \mathbb{R}$

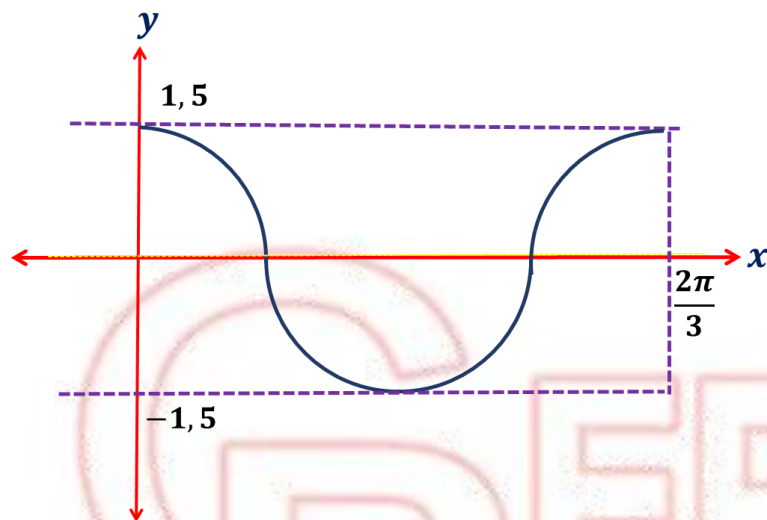
10.5.1.2 FUNCIÓN COSENO

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \text{cos } x; x \in \mathbb{R}\}$$

Su gráfica es:

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Dada la función coseno, en un periodo completo, como se muestra en la figura:



Determinar la función que describe la curva.

- A. $1,5\cos(3x)$
- B. $1,5\cos(2x)$
- C. $2,5\cos(3x)$
- D. $3,5\cos(2x)$
- E. $5,5\cos(4x)$

RESOLUCIÓN:

La función coseno:

$$f(x) = A\cos[Bx + C]$$

En el gráfico, encontramos la amplitud:

$$\begin{aligned} A &= 1,5 \\ T &= \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{B} \\ B &= 3 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$f(x) = 1,5\cos(3x)$$

RPTA: A

2. Identificar el máximo valor de la función f definida por:

$$f(x) = (4 - \operatorname{sen} x)(4 + \operatorname{sen} x) - 7$$

- A. 7
- B. 8
- C. 9
- D. 10
- E. 11

RESOLUCIÓN:

De la expresión:

$$f(x) = (4 - \operatorname{sen} x)(4 + \operatorname{sen} x) - 7$$

Por diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= (16 - \operatorname{sen}^2 x) - 7 \\ f(x) &= 9 - \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

Se sabe que:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \operatorname{sen} x \leq 1 \\ 0 &\leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1 \\ -1 &\leq -\operatorname{sen}^2 x \leq 0 \\ 8 &\leq 9 - \operatorname{sen}^2 x \leq 9 \\ 8 &\leq f(x) \leq 9 \end{aligned}$$

El máximo valor que puede tomar es 9.

RPTA: C

3. La corriente " I " (en amperios) que pasa por un conductor de un circuito de corriente alterna se determina con $I(t) = 30\operatorname{sen}(120\pi t)$, donde " t " es el tiempo expresado en segundos. Calcular el período de la función e indicar el valor máximo de la corriente.

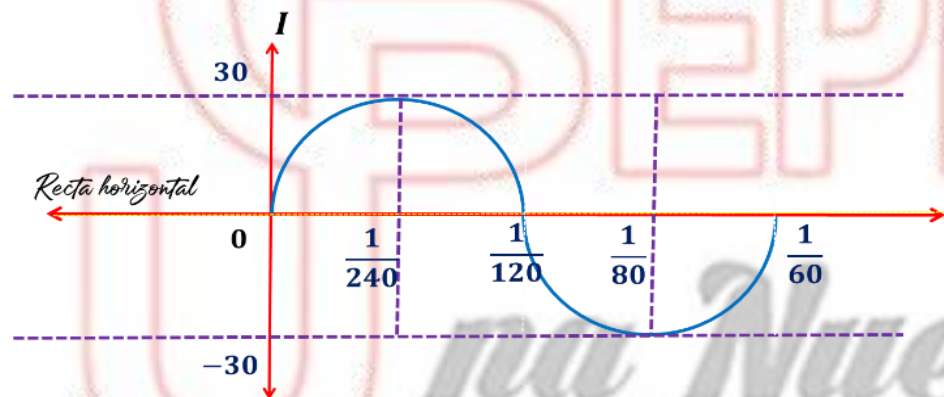
- A. $\frac{1}{60}$; 30 A
 B. $\frac{\pi}{60}$; 30 A
 C. $\frac{1}{120}$; 30 A
 D. $\frac{1}{60}$; 45 A
 E. $\frac{1}{60}$; 15 A

RESOLUCIÓN:

De la función:

$$I(t) = 30\text{sen}(120\pi t)$$

Graficamos:



Hallamos el período:

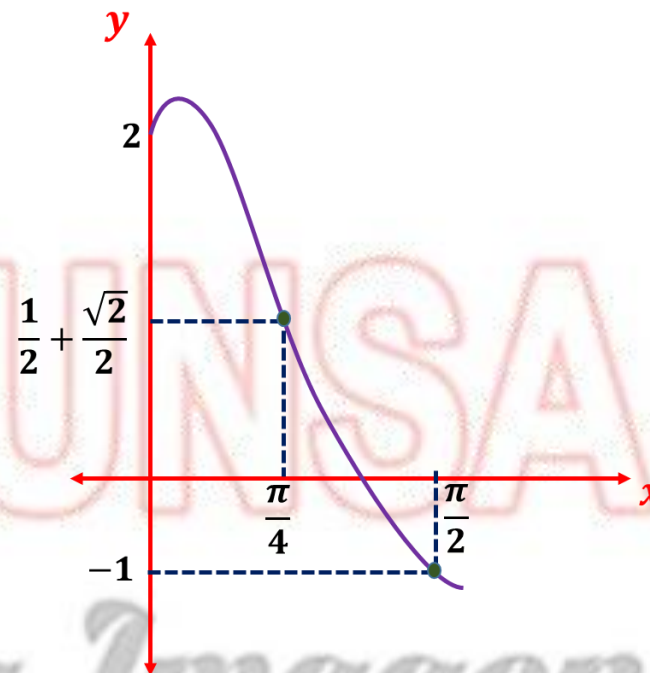
$$T = \frac{2\pi}{120\pi}$$

$$T = \frac{1}{60}$$

La amplitud es 30; entonces, el máximo valor de la corriente es 30 A.

RPTA: A

4. Sean A , B y C constantes, donde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a su vez está dada por $f(x) = A\text{sen } x + B\cos x + C\text{sen } x\cos x$, cuya gráfica parcial se muestra a continuación:

Calcular " $A + B + C$ "

- A. 1
 B. 2
 C. 3
 D. 4
 E. 5

RESOLUCIÓN:

Del gráfico tenemos que:

$$(0; 2) \in f:$$

$$2 = A\text{sen } 0 + B\cos 0 + C\text{sen } 0\cos 0$$

$$2 = B$$

$$\left(\frac{\pi}{2}; 1\right) \in f:$$

$$-1 = A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + B \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C \left(\sin\frac{\pi}{2}\right) \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-1 = A$$

$$\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in f:$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = A \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + B \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + C \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(A+B)\sqrt{2}}{2} + \frac{1 \cdot C}{2}$$

$$1 = C$$

Nos piden:

$$A + B + C = -1 + 2 + 1 = 2$$

RPTA: B

5. El tiempo de ejecución de un proyecto es de " a " meses, si empezó en el mes de marzo y " a " es la suma de los valores enteros del rango de la función:

$$g(x) = 3 \operatorname{sen} x + 1$$

¿En qué mes deberá culminar?

- A. Julio
- B. Noviembre
- C. Setiembre
- D. Junio
- E. Diciembre

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$g(x) = 3 \operatorname{sen} x + 1$$

Se sabe:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$

Multiplicamos por (3):

$$-3 \leq 3 \operatorname{sen} x \leq 3$$

Sumamos 1:

$$-2 \leq 3 \operatorname{sen} x + 1 \leq 4$$

$$-2 \leq \underbrace{3 \operatorname{sen} x + 1}_{g(x)} \leq 4$$

$$-2 \leq g(x) \leq 4$$

$$\operatorname{Ran}(g) = [-2; 4]$$

Suma de valores enteros:

$$-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 7$$

$$\therefore a = 7$$

El tiempo de ejecución es de 7 meses e inicia en marzo,

Por lo tanto, el proyecto deberá culminar en el mes de setiembre.

RPTA: C

6. Calcular el menor valor que toma la función definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x + 2 \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}$$

- A. -2
- B. -1
- C. 0
- D. 1
- E. 2

RESOLUCIÓN:

Nos piden el menor valor de $f(x)$:

Por I. Auxiliar ángulo triple y ángulo doble:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x(2\cos 2x + 1) + 2(2\operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen} x}$$

$$f(x) = 2\cos 2x + 1 + 4\cos x$$

Por ángulo doble del coseno:

$$f(x) = 2(2\cos^2 x - 1) + 1 + 4\cos x$$

$$f(x) = 4\cos^2 x + 4\cos x - 1$$

$$f(x) = (2\cos x + 1)^2 - 2$$

Debido a que $\operatorname{sen} x \neq 0$, entonces:

$$-1 < \cos x < 1$$

Construyendo $f(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned} -2 &< 2\cos x < 2 \\ -1 &< 2\cos x + 1 < 3 \\ 0 &\leq (2\cos x + 1)^2 < 9 \\ -2 &\leq (2\cos x + 1)^2 - 2 < 7 \\ -2 &\leq f(x) < 7 \end{aligned}$$

Entonces el menor valor de $f(x)$ es: -2

RPTA: A

7. Una población de aves amazónicas, tiene un modelo de crecimiento dado por la fórmula: $N(t) = 10^3[2\cos(\beta t) + 5]$, donde " t " está en años, con fluctuaciones de 7 años. Determinar el menor tiempo en que la población será de 6 000 aves.

- A. 3 años y 6 meses
- B. 2 años y 6 meses
- C. 2 años y 5 meses
- D. 1 año y 2 meses
- E. 1 año

RESOLUCIÓN:

Piden el menor tiempo en que la población será de 6000 aves:

$$N(t) = 10^3(2\cos(\beta t) + 5)$$

Periodo: $T = 7$

$$\frac{2\pi}{\beta} = 7$$

$$\beta = \frac{2\pi}{7}$$

Luego: $N(t) = 6000$

$$6000 = 10^3(2\cos(\beta t) + 5)$$

$$\cos \frac{2\pi t}{7} = \frac{1}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi t}{7} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi t}{7}$$

$$t = \frac{7}{6}$$

$$t = 1 \text{ año} + \frac{1}{6} \text{ año}$$

Por lo tanto, el tiempo será $t = 1 \text{ año y } 2 \text{ meses}$.

RPTA: D

8. En la función $y(t) = 2\cos 2t + 4\sqrt{2}\operatorname{sen} 2t$; la amplitud y el período son respectivamente:

- A. $4\sqrt{2}$ y π
- B. $4\sqrt{2}$ y 2π
- C. 6 y π
- D. 6 y 2π
- E. $2 + 4\sqrt{2}$ y π

RESOLUCIÓN:

Reducimos la función:

$$y(t) = 2 \cos 2t + 4\sqrt{2} \sin 2t$$

$$y(t) = 6 \left(\frac{2}{6} \cos 2t + \frac{4\sqrt{2}}{6} \sin 2t \right)$$

Donde: $\sin \theta = \frac{2}{6}$ y $\cos \theta = \frac{4\sqrt{2}}{6}$

$$y(t) = 6(\sin \theta \cos 2t + \cos \theta \sin 2t)$$

$$y(t) = 6 \sin(2t + \theta)$$

Por lo tanto, la amplitud será 6 y el periodo será π .

RPTA: C

SEPRUNSA
na Nueva Imagen

10.6 FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA TANGENTE. DOMINIO Y RANGO.

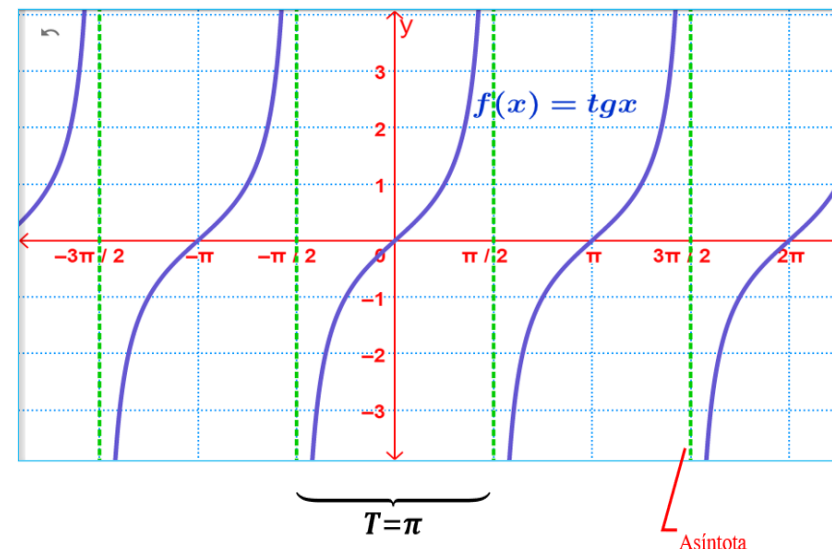
Es la función que asocia a cada número real x con la tangente del ángulo cuya medida en radianes es x . Como la función tangente viene definida por el cociente $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$, el dominio de la función será formado por todos los números reales, excepto aquellos en los que se anula el denominador.

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \text{tg } x; x \in \mathbb{R} - (2n + 1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\}$$

Sea la función $f(x) = A \cdot \text{tg}(Bx + C)$, donde A , B y C son constantes, el periodo (T) de la función tangente, se determina por:

$$T = \frac{\pi}{B}; B \neq 0$$

Su gráfica es:



ANÁLISIS DEL GRÁFICO	
DOMINIO	$x \in \mathbb{R} - (2n + 1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$
RANGO	$y \in \mathbb{R}$
PERIODO	$T = \pi$
FUNCIÓN	Impar $\rightarrow \text{tg}(-x) = -\text{tg } x$
DISCONTINUA	$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Determinar el dominio de: $f(x) = \text{tg}\left(\frac{3x}{5}\right)$

A. $\mathbb{R} - \left\{\left(\frac{5\pi}{6}\right)(2n+1); n \in \mathbb{Z}\right\}$

B. $\mathbb{R} - \left\{\left(\frac{7\pi}{6}\right)(2n+1); n \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\mathbb{R} - \left\{\left(\frac{5\pi}{2}\right)(2n+1); n \in \mathbb{Z}\right\}$

D. $\mathbb{R} - \left\{\left(\frac{7\pi}{5}\right)(2n+1); n \in \mathbb{Z}\right\}$

E. $\mathbb{R} - \left\{\left(\frac{3\pi}{5}\right)(2n+1); n \in \mathbb{Z}\right\}$

RESOLUCIÓN:

Dada la función:

$$f(x) = tg\left(\frac{3x}{5}\right)$$

Recordamos:

$$y = tg(x); x \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

Entonces:

$$\frac{3x}{5} \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3x}{5} \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$$

$$x \neq \frac{5\pi}{6}(2n+1)$$

$$\therefore Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{\left(\frac{5\pi}{6}\right)(2n+1); n \in \mathbb{Z}\right\}$$

C. $\mathbb{R} - \{2\pi(2n-1); n \in \mathbb{Z}\}$

D. $\mathbb{R} - \{\pi(2n+1); n \in \mathbb{Z}\}$

E. $\mathbb{R} - \{5\pi(2n-1); n \in \mathbb{Z}\}$

RESOLUCIÓN:

Dada la función:

$$f(x) = 2tg\left(\frac{x}{4}\right)$$

Por teoría:

$$y = tg(x); x \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

Luego:

$$\frac{x}{4} \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{4} \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$$

$$x \neq \frac{4\pi}{2}(2n+1)$$

$$x \neq 2\pi(2n+1)$$

$$\therefore Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\pi(2n+1); n \in \mathbb{Z}\}$$

RPTA: B

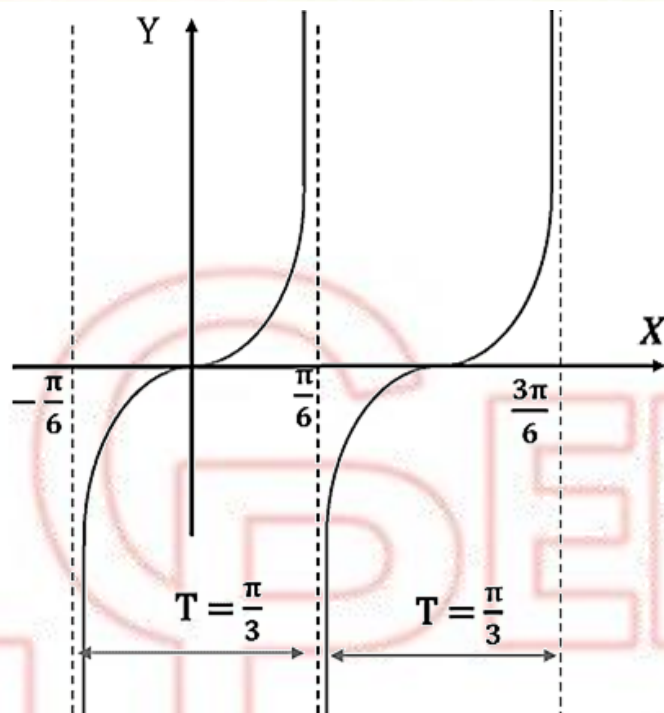
3. En el gráfico mostrado de la función $f(x) = tg(Bx)$, determinar el valor de B .

RPTA: A

2. Hallar el dominio de: $f(x) = 2tg\left(\frac{x}{4}\right)$.

A. $\mathbb{R} - \{3\pi(2n+1); n \in \mathbb{Z}\}$

B. $\mathbb{R} - \{2\pi(2n+1); n \in \mathbb{Z}\}$



- A. 1
B. 2
C. 3
D. 6
E. 7

RESOLUCIÓN:

Por teoría sabemos que:

$$T = \frac{\pi}{B}$$

De acuerdo con el gráfico:

$$T = \frac{\pi}{3}$$

Comparamos ambos resultados:

$$\frac{\pi}{B} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore B = 3$$

RPTA: C

4. Sabemos que, el siguiente par ordenado: $\left(\frac{6\pi}{24}; \frac{(n+1)^2-6}{3}\right)$, pertenece a la función $f(x) = \operatorname{tg} x$. Calcular el producto de los valores de "n".

- A. 20
B. 13
C. -8
D. -12
E. 14

RESOLUCIÓN:

Dado el par ordenado:

$$\left(\frac{6\pi}{24}; \frac{(n+1)^2-6}{3}\right)$$

Lo reemplazamos en la función:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg} x \\ \frac{(n+1)^2-6}{3} &= \operatorname{tg}\left(\frac{6\pi}{24}\right) \\ \frac{(n+1)^2-6}{3} &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{(n+1)^2-6}{3} &= \operatorname{tg} 45^\circ \\ \frac{(n+1)^2-6}{3} &= 1 \\ (n+1)^2-6 &= 3 \\ (n+1)^2 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n+1 &= \pm 3 \\ n &= 3-1 \quad y \quad n = -3-1 \\ n &= 2 \quad y \quad n = -4 \end{aligned}$$

Nos piden el producto:

$$\begin{aligned} (2)(-4) \\ \therefore \text{producto} &= -8 \end{aligned}$$

RPTA: C

5. Calcular el rango de la función definida como:

$$f(x) = \frac{2}{3} \operatorname{tg} x, \text{ si: } x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$$

- A. $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$
- B. $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$
- C. $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$
- D. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$
- E. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$

RESOLUCIÓN:

De la información dada:

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

Aplicamos tangente a todos los miembros:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) &< \operatorname{tg} x < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \operatorname{tg}(-45^\circ) &< \operatorname{tg} x < \operatorname{tg}(45^\circ) \\ -1 &< \operatorname{tg} x < 1 \end{aligned}$$

Multiplicamos por $\frac{2}{3}$:

$$-\frac{2}{3} < \frac{2}{3} \operatorname{tg} x < \frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3} < f(x) < \frac{2}{3}$$

El rango es:

$$\begin{aligned} f(x) &\in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ \therefore \operatorname{Ran}(f) &= \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

RPTA: D

6. El número de hijos de Jhon lo obtenemos al calcular la suma de los máximos valores del rango de las funciones:

$$f(x) = 2 \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \operatorname{tg}^2 x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$$

¿Cuántos hijos tiene Jhon?

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 6
- E. 10

RESOLUCIÓN:

Del enunciado:

$$f(x) = 2 \operatorname{tg} x$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

Sacamos la tangente:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-1 \leq \operatorname{tg} x \leq 1$$

Multiplicamos por (2):

$$-2 \leq \underbrace{2\operatorname{tg} x}_{f(x)} \leq 2$$

$$-2 \leq f(x) \leq 2$$

$$\therefore \operatorname{Ran}(f) = [-2; 2]$$

El máximo valor es 2.

Del enunciado:

$$g(x) = \operatorname{tg}^2 x$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

Sacamos la tangente:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-1 \leq \operatorname{tg} x \leq 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$0 \leq \underbrace{\operatorname{tg}^2 x}_{g(x)} \leq 1$$

$$0 \leq g(x) \leq 1$$

$$\therefore \operatorname{Ran}(g) = [0; 1]$$

El máximo valor es 1.

Por lo tanto, el número de hijos de Jhon es:

$$2 + 1 = 3$$

RPTA: B

7. Determinar el rango de la función f , definida por:

$$f(x) = \frac{32x^2}{\pi^2} \operatorname{tg} x, \text{ donde } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

A. $[0; 2]$

B. $[-2; 2]$

C. $[-1; 3]$

D. $[1; 2]$

E. $[2; 4]$

RESOLUCIÓN:

Para los valores de x :

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

Las funciones:

$$y = x^2$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

Son crecientes, por lo tanto, $f(x)$ también será creciente.

Hallamos el rango usando:

$$\operatorname{Ran}(f) = \left[f(0); f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$f(x) = \frac{32x^2}{\pi^2} \operatorname{tg} x$$

$$f(0) = \frac{32(0)^2}{\pi^2} \operatorname{tg} x$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{32\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\pi^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

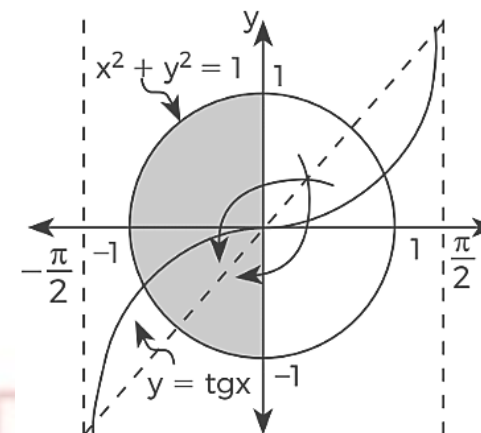
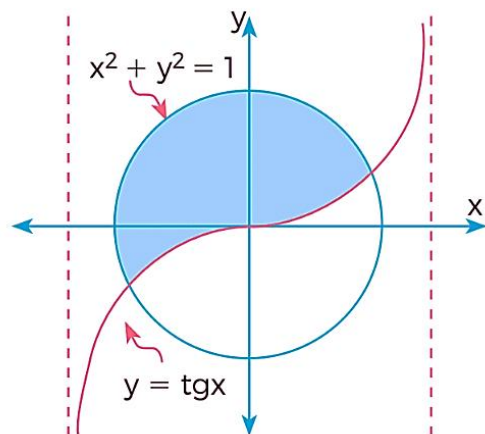
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2(1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = [0; 2]$$

RPTA: A

8. Elmer desea diseñar el logo que se muestra en el siguiente gráfico:



Hallamos el área de la semicircunferencia:

$$\text{Área} = \frac{\pi(1)^2}{2}$$

$$\therefore \text{Área} = \frac{\pi}{2} m^2$$

Si las dimensiones están en metros, determinar la cantidad de tela que va a utilizar.

- A. $\frac{\pi}{3} m^2$
- B. $\frac{\pi}{2} m^2$
- C. $\frac{\pi}{5} m^2$
- D. $\frac{\pi}{7} m^2$
- E. $\frac{3\pi}{2} m^2$

RPTA: B

RESOLUCIÓN:

La función tangente es impar por lo que existe simetría respecto a la recta $y = x$, entonces trasladamos la región sombreada:

10.7 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS: SENO, COSENO, DOMINIO Y RANGO.

10.7.1 FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA INVERSA

Una función trigonométrica inversa es un conjunto de pares ordenados de números reales $(x; y)$, en los cuales la primera componente X es el valor de alguna razón trigonométrica y la segunda componente Y es el arco cuya razón trigonométrica es X . (Lumbreras, 2020)

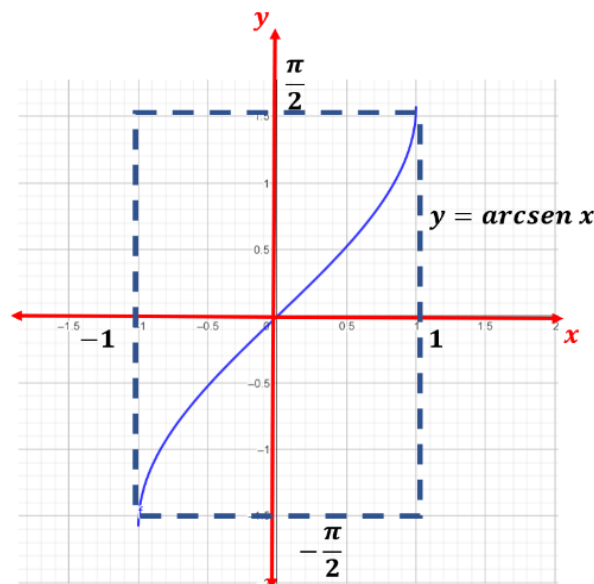
10.7.1.1 FUNCIÓN ARCO SENO

Es la función $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

Definida por $y = f(x) = \arcsen x$

Si y sólo si $x = \sen y$

Su gráfica es:



Características:

- $Dom(f) = [-1; 1]$
- $Ran(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- $0 \leq x \leq 1 \leftrightarrow 0 \leq \arcsen x \leq \frac{\pi}{2}$
- $-1 \leq x \leq 0 \leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \arcsen x \leq 0$
- f es creciente en $\langle -1; 1 \rangle$ y es impar

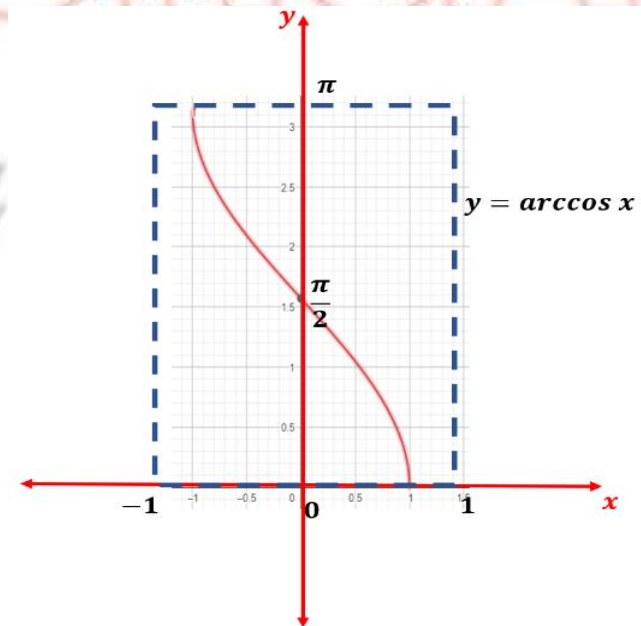
10.7.1.2 FUNCIÓN ARCO COSENO

Es la función $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

Definida por $y = f(x) = \arccos x$

Si y sólo si $x = \cos y$

Su gráfica es:



Características:

- $Dom(f) = [-1; 1]$
- $Ran(f) = [0; \pi]$
- $0 \leq x \leq 1 \leftrightarrow 0 \leq \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$
- $-1 \leq x \leq 0 \leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \arccos x \leq \pi$
- f es decreciente en $\langle -1; 1 \rangle$ y es impar.

$$K = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{\pi}{3}}$$

$$K = \frac{9}{4}$$

$\therefore$ El valor de K es $\frac{9}{4}$

RPTA: E**PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS:****1. Calcular el valor de la expresión:**

$$K = \frac{\arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos(0)}{\arcsen(1) - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

- A. $3/4$
- B. $1/4$
- C. 1
- D. $9/2$
- E. $9/4$

RESOLUCIÓN:

De la expresión se sabe que:

$$\text{Si } \theta = \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \sen \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Si } \beta = \arccos(0) \rightarrow \cos \beta = 0 \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Si } \varphi = \arcsen(1) \rightarrow \sen \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Si } \omega = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \cos \omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$$

Reemplazamos las expresiones en K :

2. Determinar el valor de la expresión:

$$M = \sen\left[\frac{\pi}{6} + \arcsen\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right]$$

- A. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$
- B. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$
- D. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{21}}{6}$
- E. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{6}$

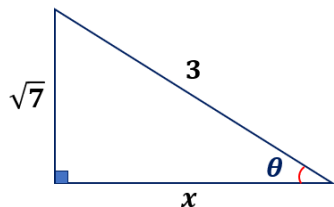
RESOLUCIÓN:

De la expresión tenemos que:

$$\theta = \arcsen\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) \rightarrow \sen \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}; \theta \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$$

Como $\arcsen\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$ resulta del $\sen \theta$ que es positivo, así entonces θ sería agudo.

Graficando:



Calculando “x” por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + \sqrt{7}^2 = 3^2$$

$$x = \sqrt{2}$$

Luego tenemos que:

$$M = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)$$

Aplicando identidades compuestas se tiene:

$$M = \sin \frac{\pi}{6} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{6} \sin \theta$$

Reemplazando valores, tenemos:

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

$$M = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{21}}{6}$$

∴ El valor de M es $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{21}}{6}$

3. Calcular el valor de:

$$F = \sin\left\{2\arctan\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{2}\arcsen\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]\right\}$$

- A. $\frac{\sqrt{5}}{7}$
 B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 C. $\frac{\sqrt{10}}{7}$
 D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

E. $\frac{2\sqrt{10}}{7}$

RESOLUCIÓN:

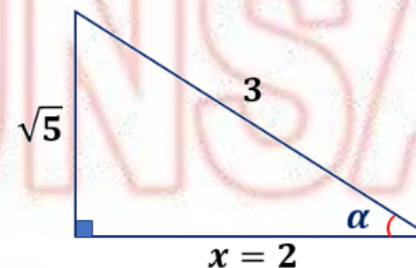
De la expresión se tiene que:

$$\sin\left\{2\arctan\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{2}\arcsen\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]\right\}$$

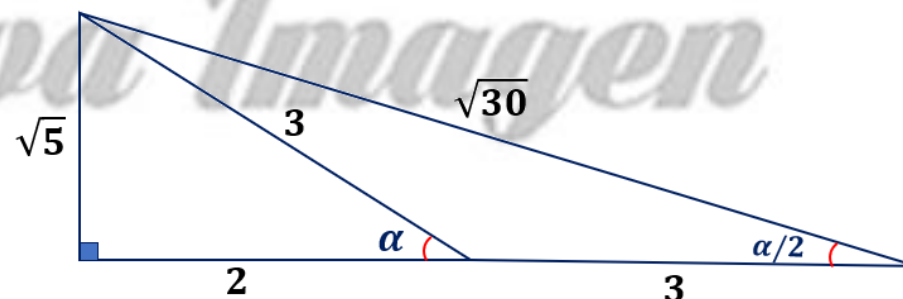
Entonces:

Si $\alpha = \arcsen\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Graficando y hallando los lados faltantes:



RPTA: D



De la gráfica se tiene entonces que: $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{30}}$

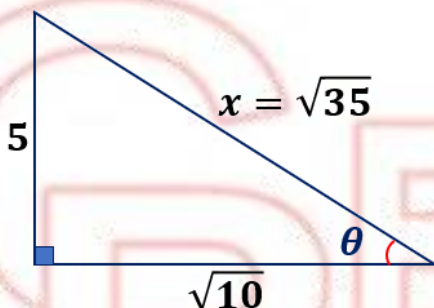
La expresión queda:

$$\sin\left\{2\arctan\left[\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}\right]\right\}$$

$$\begin{aligned} &\sin \left\{ 2 \arctan \left[\sqrt{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{30}} \right] \right\} \\ &\sin \left\{ 2 \arctan \frac{5}{\sqrt{10}} \right\} \end{aligned}$$

Si $\theta = \arctan \left(\frac{5}{\sqrt{10}} \right) \rightarrow \tan \theta = \frac{5}{\sqrt{10}}$

Graficando:



De la expresión nos queda: $\sin 2\theta$

Pero:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

Reemplazando:

$$\sin 2\theta = 2 \left(\frac{5}{\sqrt{35}} \right) \left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} \right) = \frac{10\sqrt{10}}{35} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

RPTA: E

4. Sea f una función definida por:

$$f(x) = \frac{4}{7} \arcsin \sqrt{3x-1} + \frac{\pi}{10}$$

Determinar el dominio de la función.

- A. $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right]$
 B. $\left[1; \frac{3}{2} \right]$

- C. $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2} \right]$
 D. $\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2} \right]$
 E. $[0; 1]$

RESOLUCIÓN:

Para el cálculo del dominio se tiene:

$$\sqrt{3x-1} \geq 0$$

Entonces para la función $\arcsin \sqrt{3x-1}$, tenemos que $\sqrt{3x-1} \in [0; 1]$

Evaluando:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sqrt{3x-1} \leq 1 \\ 0 &\leq 3x-1 \leq 1 \\ 1 &\leq 3x \leq 2 \\ \frac{1}{3} &\leq x \leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\therefore \text{Dom}(f) = \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right]$$

RPTA: A

5. Dada la función f definida por la regla de correspondencia:

$$f(x) = 4 \arcsin^{-1} \sqrt{\frac{3x-5}{x}}, \text{ si } \text{Dom}(f) = \left[\frac{5}{a}; \frac{5}{b} \right]$$

Entonces, el valor de $V = \frac{a+b}{5}$ es:

- A. -1
 B. 0
 C. 1
 D. 2
 E. 3

RESOLUCIÓN:

Calculando el dominio se tiene que:

Como $\sqrt{\frac{3x-5}{x}} \geq 0$, para nuestra función f , tendremos que:

$$\sqrt{\frac{3x-5}{x}} \in [0; 1]$$

Convirtiendo a desigualdad el intervalo se tiene:

$$0 \leq \sqrt{\frac{3x-5}{x}} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{3x-5}{x} \leq 1$$

$$0 \leq 3 - \frac{5}{x} \leq 1$$

$$-3 \leq -\frac{5}{x} \leq -2$$

$$3 \geq \frac{5}{x} \geq 2$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{x}{5} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

Por lo tanto, el dominio será:

$$Dom(f) = \left[\frac{5}{3}; \frac{5}{2}\right]$$

Como $Dom(f) = \left[\frac{5}{a}; \frac{5}{b}\right]$ entonces, se deduce que $a = 3$ y $b = 2$

Reemplazando en la expresión pedida se tiene:

$$V = \frac{a+b}{5} = \frac{3+2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

RPTA: C

6. Calcular el dominio de la función f , cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \arcsen\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\sqrt{x-1}$$

- A. $\left[1; \frac{3}{2}\right]$
- B. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$
- C. $[1; 3]$
- D. $\left[1; \frac{5}{2}\right]$
- E. $[0; 1]$

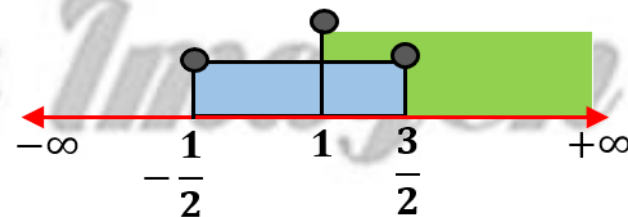
RESOLUCIÓN:

Para que la función este definida en $\mathbb{R}$, se cumple que:

$$-1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \quad \wedge \quad x - 1 \geq 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \quad \wedge \quad x \geq 1$$

Graficando en la recta numérica:



De la intersección se tiene que:

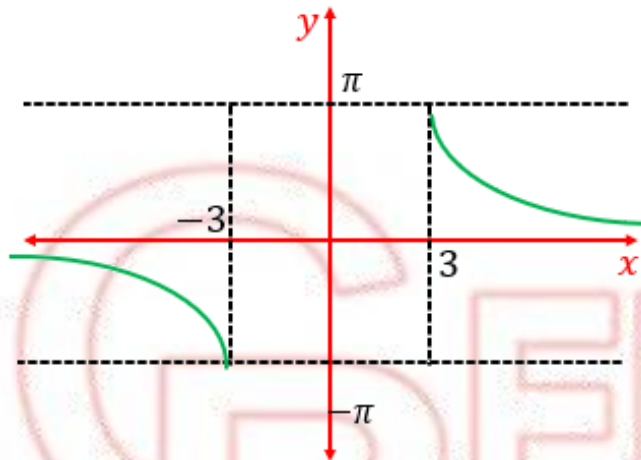
$$1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Por lo tanto:

$$Dom(f) = \left[1; \frac{3}{2}\right]$$

RPTA: A

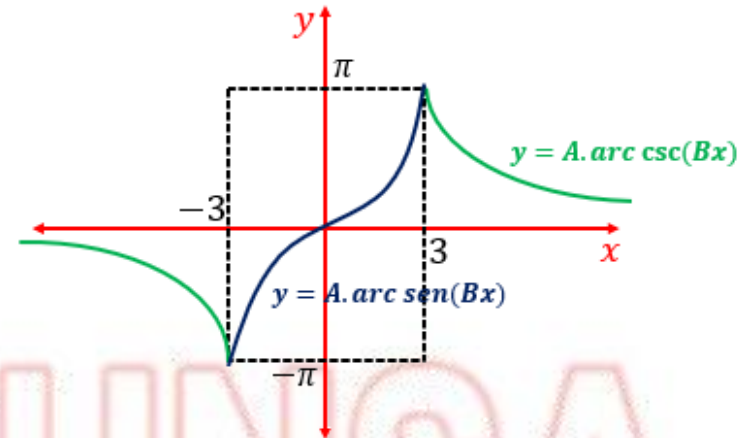
7. El gráfico mostrado corresponde a la función cuya regla de correspondencia es $f(x) = A \cdot \text{arc csc}(Bx)$, calcular A/B .



- A. 2
- B. 4
- C. 6
- D. 8
- E. 10

RESOLUCIÓN:

De la gráfica:



Para la función $y = A \cdot \text{arc sen}(Bx)$

$$\text{I) } Bx \in [-1; 1] \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{B}; \frac{1}{B}\right]$$

$$\text{Del gráfico: } x \in [-3; 3] \Rightarrow \frac{1}{B} = 3; \text{ entonces, } B = \frac{1}{3}$$

$$\text{II) } \text{arc sen}(Bx) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow A \cdot \text{arc sen}(Bx) \in \left[-\frac{\pi A}{2}; \frac{\pi A}{2}\right] \Rightarrow y \in \left[-\frac{\pi A}{2}; \frac{\pi A}{2}\right]$$

$$\text{Del gráfico: } \Rightarrow y \in [-\pi; \pi] \Rightarrow \frac{\pi A}{2} = \pi; \text{ por tanto, } A = 2$$

Finalmente:

$$\frac{A}{B} = 6$$

RPTA: C

8. Si el dominio y rango de la función $f(x) = a \cdot \text{arc sen}(bx + c) + d$ son respectivamente: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right]$ y $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$; hallar: $\text{sen}\left(\frac{bcd}{a}\right)$, donde $a > 0, b > 0$

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- C. 1
 D. $\text{sen} \frac{\pi}{18}$
 E. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

RESOLUCIÓN:

Hallando el dominio:

Es indispensable que: $-1 \leq bx + c \leq 1$ De donde: $\frac{-1-c}{b} \leq x \leq \frac{1-c}{b}$ Por dato: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{6}$

Comparando e igualando:

$$\frac{-1-c}{b} = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad \frac{1-c}{b} = \frac{1}{6}$$

Resolviendo:

$$b = 3 \quad \wedge \quad c = \frac{1}{2}$$

Hallando el rango:

Sabemos que: $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arc sen}(bx + c) \leq \frac{\pi}{2}$

De donde:

$$-\frac{\pi a}{2} + d \leq a \cdot \text{arc sen}(bx + c) + d \leq \frac{\pi a}{2} + d$$

$$-\frac{\pi a}{2} + d \leq f(x) \leq \frac{\pi a}{2} + d$$

Por dato:

$$-\frac{7\pi}{6} \leq f(x) \leq \frac{11\pi}{6}$$

Comparando e igualando:

$$-\frac{\pi a}{2} + d = -\frac{7\pi}{6} \quad \wedge \quad \frac{\pi a}{2} + d = \frac{11\pi}{6}$$

Resolviendo:

$$\begin{cases} -\frac{\pi a}{2} + d = -\frac{7\pi}{6} \\ \frac{\pi a}{2} + d = \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

Sumando ecuaciones:

$$2d = \frac{4\pi}{6}$$

$$d = \frac{\pi}{3} \rightarrow a = 3$$

Luego:

$$\text{sen}\left(\frac{bcd}{a}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

RPTA: A

11 Bibliografía

ANALÍTICA, G. (2020). *Geometria Analitica*.

HUERTAS, j. (2015).

Lehman. (2015). *Geometría Analítica*.

Lumbreras. (2020).

MINEDU. (2015).

UNI. (2020). CESAR VALLEJO.

Compendio de exámenes Unsa